THÉORIES HOMOTOPIQUES DANS LES TOPOS

DENIS-CHARLES CISINSKI

Abstract. The purpose of these notes is to give an *ad hoc* construction of a closed model category structure on a topos inverting an arbitrary small set of arrows. Moreover, a necessary and sufficient condition for those structures to be proper is given. As an example, the Joyal closed model category structure on the category of simplicial objects of a topos is constructed without the use of (boolean) points.

Introduction

La compréhension de la localisation des topos a un premier intérêt évident en ce que cela fournit des outils et un langage homotopiques à la géométrie [15, 8, 12]. Cela contribue aussi à l'étude des structures algébriques d'ordre supérieur, comme les ω-catégories [1] et les champs de Segal [8]. C'est enfin un moyen d'approcher une théorie homotopique des topos eux-mêmes [5].

Dans ce texte, nous nous intéressons à l'étude des couples $(\mathcal{E}, \mathcal{W})$ où $\mathcal{E}$ est un topos arbitraire, et où $\mathcal{W}$ est une classe de flèches de $\mathcal{E}$. Lorsque $\mathcal{W}$ satisfait à certains axiomes de stabilité (voir la définition 3.4), nous montrons que modulo des problèmes ensemblistes, la catégorie $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\mathcal{E}$ (théorème 3.9).

La construction de ces structures de catégorie de modèles fermée est menée en regard des deux observations suivantes. Comme cela l'a été remarqué par F. Morel [14], les constructions de P. Gabriel et M. Zisman [4] gardent un sens dans un cadre beaucoup plus général que celui des ensembles simpliciaux. D'autre part, les travaux de P.S. Hirschhorn [7] sur la localisation peuvent s'interpréter dans un cadre légèrement moins riche que celui des catégories de modèles fermées. Cela mène directement au théorème 2.13. C'est seulement ensuite qu'un point de vue axiomatique est adopté.

Dans un second temps, nous nous sommes consacrés l'étude de conditions nécessaires et suffisantes pour que les structures de catégorie de modèles fermée obtenues soient propres, nous inspirant en la matière de Morel-Voevodsky [15].

En guise d'application, nous donnons une démonstration *ad hoc* de l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée de Joyal sur les objets simpliciaux d'un topos.

1. Accessibilité

1.1. Ce paragraphe a pour but de rappeler les techniques élémentaires qui permettront d'utiliser l'argument du petit objet assez librement dans un topos. Les notions d'accessibilité telles que nous les envisageons ici sont celles de SGA 4 [6, I.9].

Lorsque E est un ensemble, on note $|E|$ son cardinal, et si A est une catégorie, on note $\mathsf{Ob}\, A$ et $\mathsf{Fl}\, A$ respectivement l'ensemble de ses objets et celui de ses flèches.

Définition 1.2. Soit α un cardinal. Un ensemble ordonné I est dit *α-filtrant*, si c'est un petit ensemble ordonné filtrant, et si tout sous-ensemble de I de cardinal inférieur ou égal à α admet un majorant.

Remarque 1.3. Dans SGA 4, un ensemble ordonné α-filtrant est appelé un ensemble ordonné grand devant α.

Exemple 1.4. Soit α un cardinal. Alors le cardinal successeur de α, vu comme un ordinal (et donc comme un ensemble bien ordonné), est α-filtrant.

Définition 1.5. Soit α un cardinal.

Un foncteur $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est *α-accessible* si pour tout petit ensemble ordonné α-filtrant I, f commute aux limites inductives de type I. On dira qu'un foncteur est *accessible* s'il est α-accessible pour un certain cardinal α.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet X de $\mathcal{C}$ est *α-accessible* (resp. *accessible*) si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$, $Y \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'est.

Remarque 1.6. Si $\alpha' \geq \alpha$, tout foncteur α-accessible est α'-accessible.

Exemple 1.7. Tout foncteur qui commute aux petites limites inductives est α-accessible pour tout cardinal α.

Remarque 1.8. Soit A une petite catégorie. Dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux d'ensembles sur A, les objets représentables sont α-accessibles pour tout cardinal α. En effet, les limites inductives se calculent terme à terme dans $\widehat{A}$, ce qui peut se reformuler en disant que si a est un objet de A, le foncteur $\mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(a, \ .\ ) : \widehat{A} \to \mathcal{E}ns$ commute aux petites limites inductives.

Proposition 1.9. *Soient A une petite catégorie, et $\alpha = |\,\mathsf{Fl}\, A|$. Le foncteur $\varprojlim : \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{E}ns) \to \mathcal{E}ns$ est α-accessible.*
(Voir SGA 4, corollaire I.9.8).

Démonstration. Il est bien connu que dans la catégorie des ensembles, les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. On se ramène alors facilement au cas où A est une catégorie discrète, *i.e.* un ensemble de cardinal α. En effet, si F est un foncteur de A vers $\mathcal{E}ns$, la limite projective de F se calcule comme le noyau d'une double flèche dont le but est un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des flèches de A, et la source un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des objets de A.

Soient I un ensemble ordonné α-filtrant, et $(F_a)_{a\in A}$ une famille de foncteurs de I vers $\mathcal{E}ns$. Il faut montrer que l'application naturelle

$$\phi : \varinjlim \prod_a F_a \to \prod_a \varinjlim F_a$$

est bijective.

Soient x et y deux éléments de $\varinjlim \prod_a F_a$. On peut supposer que x et y sont des éléments de $\prod_a F_a(i_0)$ pour un $i_0 \in I$ convenable, car I est filtrant. Si $\phi(x) = \phi(y)$, alors pour tout $a \in A$, il existe $i_a \in I$ tel que $x_a = y_a$ dans $F_a(i)$ pour i plus grand que i_a. Comme I est α-filtrant, il existe un $i_1 \in I$ majorant tous les i_a. On a donc $x = y$ dans $\prod_a F_a(i_1)$, ce qui montre l'injectivité.

si $z \in \prod_a \varinjlim F_a$, pour chaque élément a de A, il existe un $i_a \in I$ tel que z_a provienne de l'ensemble $F_a(i_a)$. Encore une fois, vu que I est α-filtrant, il existe un majorant i des i_a, et donc les images des z_a dans $F_a(i)$ définissent un antécédent de z.

Proposition 1.10. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des limites inductives. On considère un cardinal α, une petite catégorie A, et un foncteur $F : A \to \mathcal{C}$, tels que pour tout $a \in \mathsf{Ob}\, A$, l'objet $F(a)$ soit α-accessible, et on note $\lambda = \max(\alpha, |\, \mathsf{Fl}\, A|)$. Alors $\varinjlim F$ est λ-accessible. (Voir SGA 4, corollaire I.9.9).*

Démonstration. Soit I un petit ensemble ordonné α-filtrant, et soit $\phi : I \to \mathcal{C}$ un foncteur. On a alors les bijections suivantes :

$$\begin{aligned}
\varinjlim_I \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_A F, \phi) &\simeq \varinjlim_I \varprojlim_{A^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \phi) \\
&\simeq \varprojlim_{A^\circ} \varinjlim_I \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \phi) \\
&\simeq \varprojlim_{A^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \varinjlim_I \phi) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_A F, \varinjlim_I \phi).
\end{aligned}$$

Corollaire 1.11. *Soient A une petite catégorie, et X un préfaisceau sur A. On note $\alpha = |\, \mathsf{Fl}\, A/X|$, où A/X désigne la catégorie dont les objets sont les couple (a, u), $a \in \mathsf{Ob}\, A$, $u \in \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(a, X)$, et dont les flèches $(a, u) \to (a', u')$ sont les flèches $f : a \to a'$ de A, telles que $u'f = u$. Alors X est α-accessible.*

Démonstration. D'après la remarque 1.8, cela résulte trivialement de la proposition ci-dessus et du fait que X est la limite inductive dans $\widehat{A}$ du foncteur $A/X \to \widehat{A}$, $(a, u) \mapsto a$.

1.12. On fixe à présent un topos $\mathcal{E}$, et on choisit un petit site (C, J) tel que $\mathcal{E}$ s'identifie à la catégorie des faisceaux sur ce dernier. On note $i : \mathcal{E} \to \widehat{C}$ le foncteur d'inclusion canonique de $\mathcal{E}$ dans la catégorie des préfaisceaux sur C, et $a : \widehat{C} \to \mathcal{E}$ son adjoint à gauche, le foncteur "faisceau associé".

Lemme 1.13. *Le foncteur composé $ia : \widehat{C} \to \widehat{C}$ est accessible.*

Démonstration. On rappelle que le foncteur ia peut se construire comme suit. On définit un foncteur $L : \widehat{C} \to \widehat{C}$ en posant pour chaque préfaisceau X sur C, et chaque objet U de C

$$LX(U) = \varinjlim_{R \in J(U)} \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(R, X) \ ,$$

où $J(U)$ désigne l'ensemble des cribles couvrants de U, ordonné par l'ordre dual de l'inclusion. On a alors un isomorphisme de foncteurs $L^2 \simeq ia$. Il suffit donc de montrer que le foncteur L est accessible. Soit α un cardinal tel que pour tout objet U de C, tout crible couvrant R de U soit α-accessible (ce qui existe en vertu du corollaire 1.11). Comme toute limite inductive de foncteurs accessibles est accessible, on s'aperçoit aussitôt que le foncteur L l'est.

Proposition 1.14. *Tous les objets de $\mathcal{E}$ sont accessibles.*

Démonstration. Soit X un objet de $\mathcal{E}$. On choisit un cardinal α tel que iX et ia soient α-accessibles (ce qui existe grâce au corollaire 1.11 et au lemme 1.13). On va montrer que X est α-accessible. Considérons un ensemble ordonné α-filtrant I, et un foncteur $F : I \to \mathcal{E}$. Comme i est pleinement fidèle, et comme le foncteur a commute aux petites limites inductives (car c'est un adjoint à gauche), on a les isomorphismes suivants :

$$i \varinjlim F \simeq i \varinjlim aiF \simeq ia \varinjlim iF \simeq \varinjlim iaiF \simeq \varinjlim iF \ .$$

On en déduit les bijections ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \varinjlim F) &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX, i \varinjlim F) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX, \varinjlim iF) \\ &\simeq \varinjlim \mathsf{Hom}_{\widehat{C}}(iX, iF) \\ &\simeq \varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, F) \ . \end{aligned}$$

Définition 1.15. Un objet X de $\mathcal{E}$ est de *taille* $\leq \alpha$ s'il existe un sous-préfaisceau R de iX, tel que l'inclusion $R \to iX$ soit couvrante pour la topologie J sur C (*i.e.* induise un isomorphisme $aR \simeq aiX \simeq X$), et tel que $|\,\mathsf{Fl}\, C/R| \leq \alpha$.

Remarque 1.16. Si $\alpha \geq |\,\mathsf{Fl}\, C|$ est un cardinal infini, un objet X de $\mathcal{E}$ est de taille $\leq \alpha$ si et seulement s'il existe une famille couvrante $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ de X, dont l'ensemble d'indice I soit de cardinal $\leq \alpha$.

Cela revient encore à dire qu'il existe un préfaisceau R sur C, tel que pour tout objet U de C, $|R(U)| \leq \alpha$, et tel que $aR \simeq X$.

1.17. Pour chaque cardinal α, on note $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ (resp. $T_\alpha(\mathcal{E})$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée des objets α-accessibles (resp. des objets de taille $\leq \alpha$).

Proposition 1.18. *Soit α un cardinal infini qui majore $|\mathsf{Fl}\, C|$, et tel que pour tout objet U de C, le faisceau aU soit α-accessible. Alors tout objet de $\mathcal{E}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles. En outre, on a l'égalité :*

$$T_\alpha(\mathcal{E}) = Acc_\alpha(\mathcal{E}) \ .$$

En particulier, la catégorie $Acc_\alpha(\mathcal{E})$ est essentiellement petite.

Démonstration. Soit X un objet de taille $\leq \alpha$. Alors par définition, il existe un sous-préfaisceau R de iX tel que $aR \simeq X$, et $|\mathsf{Fl}\, C/R| \leq \alpha$. On sait qu'on a un isomorphisme

$$\varinjlim_{(U,\phi:U\to R)\in C/R} U \simeq R \ , \text{ d'où } \varinjlim_{(U,\phi:U\to R)\in C/R} aU \simeq X \ .$$

Il résulte de la proposition 1.10 que X est α-accessible. On a donc une inclusion $T_\alpha(\mathcal{E}) \subset Acc_\alpha(\mathcal{E})$.

Soit X un objet de $\mathcal{E}$. On note I l'ensemble de ses sous-objets de taille $\leq \alpha$, ordonné par l'inclusion, et $\phi : I \to \mathcal{E}$ le foncteur d'inclusion canonique. L'ensemble I est un ensemble ordonné α-filtrant. Cela vient du fait que l'ensemble J des sous-préfaisceaux Y de iX tels que $|\mathsf{Fl}\, C/Y| \leq \alpha$, ordonné par l'inclusion, est α-filtrant. En outre, la flèche canonique $\varinjlim \phi \to X$ est un isomorphisme. C'est en effet un monomorphisme, car c'est un limite inductive filtrante de monomorphismes, et les limites inductives filtrantes sont exactes dans $\mathcal{E}$. Pour voir que c'est un épimorphisme, on montre aussitôt que le morphisme $\varinjlim i\phi \to iX$ est déjà un épimorphisme, car pour tout objet U de C, tout morphisme $U \to iX$ se factorise par son image. Si on suppose que X est α-accessible, alors on a deux bijections canoniques

$$\varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \phi) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \varinjlim \phi) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, X) \ .$$

Cela montre qu'il existe un sous-objet Y de X, de taille $\leq \alpha$, tel que l'inclusion $Y \to X$ admette une section, et donc tel que $Y = X$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 1.19. *Sous les hypothèses de la proposition 1.18, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(a) Toute limite projective finie d'objets α-accessibles est α-accessible.
(b) Tout sous-objet d'un objet α-accessible est α-accessible.

Démonstration. La proposition 1.18 montre qu'il suffit de vérifier que la catégorie $T_\alpha(\mathcal{E})$ est stable par limites projectives finies et par sous-objets, autrement dit qu'on peut supposer que $\mathcal{E} = \widehat{C}$, puis même que $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel, auquel cas la proposition est triviale.

Proposition 1.20. *Soient $\mathcal{F}$ un second topos, et $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un foncteur accessible. Alors il existe un cardinal α tel que pour tout cardinal $\beta \geq \alpha$, on ait :*

$$\phi(Acc_\beta(\mathcal{E})) \subset Acc_{\beta^\alpha}(\mathcal{F}) \ .$$

En particulier, si $\gamma \geq \alpha$ est infini, et si $\beta = 2^\gamma$, alors

$$\phi(Acc_\beta(\mathcal{E})) \subset Acc_\beta(\mathcal{F}) \ .$$

(Voir SGA 4, proposition I.9.14).

Démonstration. En vertu de la proposition 1.18, il existe un cardinal α_0 tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :
- le foncteur ϕ est α_0-accessible ;
- pour tout cardinal $\beta \geq \alpha_0$, on a l'égalité $Acc_\beta(\mathcal{E}) = T_\beta(\mathcal{E})$;
- tout objet X de $\mathcal{E}$ est la réunion α_0-filtrante de ses sous-objets α_0-accessibles.

Comme la catégorie $Acc_{\alpha_0}(\mathcal{E})$ est essentiellent petite (prop. 1.18), et comme tous les objets de $\mathcal{F}$ sont accessibles (prop. 1.14), il existe un cardinal $\alpha \geq \alpha_0$ tel que $\phi(Acc_{\alpha_0}(\mathcal{E})) \subset Acc_\alpha(\mathcal{F})$.

Considérons un cardinal $\beta \geq \alpha$, et un objet β-accessible X de $\mathcal{E}$. On note I l'ensemble de ses sous-objets α_0-accessibles, ordonné par l'inclusion, et $\tau : I \to \mathcal{E}$ le foncteur d'inclusion. On sait que $\varinjlim \tau \simeq X$, que I est α_0-filtrant, et que ϕ est α_0-accessible. Par conséquent, on a un isomorphisme dans $\mathcal{F}$: $\varinjlim \phi\tau \simeq \phi X$. Or $|I| \leq \beta^\alpha$. En effet, comme $Acc_\beta(\mathcal{E}) = T_\beta(\mathcal{E})$, il existe un sous-préfaisceau R de iX tel que $|\mathsf{Fl}\, C/R| \leq \beta$, et tel que $aR \simeq X$. D'autre part, l'ensemble I se plonge dans l'ensemble des applications de α_0 vers $\mathsf{Fl}\, C/R$, et donc on a $|I| \leq \beta^{\alpha_0} \leq \beta^\alpha$. La proposition 1.10 implique donc que ϕX est β^α-accessible.

Considérons un cardinal infini $\gamma \geq \alpha$, et posons $\beta = 2^\gamma$. On a alors $\alpha\gamma = \gamma$, et $\beta^\alpha = (2^\gamma)^\alpha = 2^{\gamma\alpha} = 2^\gamma = \beta$, ce qui permet d'achever cette démonstration.

1.21. Dans ce qui suit, on utilisera l'argument du petit objet, et les notions qui lui sont attachées (propriétés de relèvement, composition transfinie, rétractes, *etc.*). Le lecteur pourra consulter par exemple [9, 1.1 et 2.1] pour un développement plus complet.

Notations 1.22. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si F est un ensemble de flèches de $\mathcal{C}$, on notera $l(F)$ (resp. $r(F)$), l'ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ qui vérifient la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à tous les éléments de F.

Remarque 1.23. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie admettant des petites limites inductives, alors pour tout ensemble de flèches F de $\mathcal{C}$, $l(F)$ est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes. En particulier, l'ensemble des flèches de $\mathcal{C}$ formé des flèches qui sont des composés transfinis d'images directes d'éléments de F, notée $Cell(F)$

est contenu dans $l(r(F))$. On peut montrer que $Cell(F)$ est stable par compositions transfinies et par images directes (voir [9, lemme 2.1.2]). Cela implique que $l(r(F))$ et $Cell(F)$ sont stables par sommes, puique toute somme est un composé transfini d'images directes.

On remarque que dans un topos $\mathcal{E}$, l'ensemble des monomorphismes de $\mathcal{E}$ est stable par images directes, par compositions transfinies et par rétractes (comme les foncteurs faisceaux associés sont exacts, il suffit de considérer le cas des catégories de préfaisceaux, puis seulement de la catégorie des ensembles).

Définition 1.24. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et soit I un petit ensemble de flèches de $\mathcal{C}$. On dira que I *permet l'argument du petit objet* si pour tout morphisme $A \to B$ qui est un élément de I, l'objet A est accessible.

Lemme 1.25 (lemme du rétracte)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On considère deux morphismes $i : X \to Y$ et $p : Y \to Z$ de $\mathcal{C}$. Si $pi \in l(p)$, alors pi est un rétracte de i.*

Démonstration. Voir [9, lemme 1.1.9].

Proposition 1.26 (l'argument du petit objet)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, admettant des petites limites inductives, et I un petit ensemble de flèches de $\mathcal{C}$ permettant l'argument du petit objet. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\mathcal{C}$ en $f = pi$ où $p \in r(I)$ et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de I. En outre la classe $l(r(I))$ est le plus petit ensemble de flèches de $\mathcal{C}$, contenant I, et stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes.*

Démonstration. Voir [9, théorème 2.1.14, corollaire 2.1.15].

Lemme 1.27. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère une classe C de monomorphismes de $\mathcal{E}$ ayant les propriétés suivantes.*

(a) La classe C est stable par images directes, par compositions tansfinies et par rétractes.

(b) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux monomorphismes composables de $\mathcal{E}$, et si f et gf sont des éléments de C, alors $g \in \mathsf{C}$.

(c) Il existe un cardinal α tel que tout objet de $\mathcal{E}$ soit la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles, et tel que pour tout élément $X \to Y$ de C, et tout sous-objet α-accessible Z de X, il existe un sous-objet α-accessible T de X, contenant Z, et tel que $T \cap X \to T$ soit un élément de C.

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments de C dont le but est α-accessible. Alors $\mathsf{C} = l(r(\mathcal{N}))$.

Démonstration. Il est immédiat que $l(r(\mathcal{N})) \subset \mathsf{C}$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion. Soit $i : K \to L$ un élément de C. On considère l'ensemble E des sous-objets α-accessibles de L qui ne sont pas contenus dans K, que l'on munit d'un bon ordre. On va construire un foncteur

$\phi : E \to \mathcal{E}$ tel que pour tout $e \in E$, $\phi(e)$ soit un sous-objet de L contenant K et e, l'inclusion $K \to \phi(e)$ étant un élément de $l(r(\mathcal{N}))$, et tel que si $e \neq 0$ (où 0 est l'élément initial de E), le morphisme $\varinjlim_{e'<e} \phi(e') \to \phi(e)$ soit un élément de $l(r(\mathcal{N}))$. La flèche $K \to \varinjlim \phi$ s'identifiera canoniquement à i, et elle sera un élément de $l(r(\mathcal{N}))$. Pour $e = 0$, comme 0 est α-accessible, il existe un sous-objet α-accessible U_0 de L contenant 0, tel que $U_0 \cap K \to U_0$ soit dans C. On pose $\phi(0) = U_0 \cup K$. On procède ensuite par induction transfinie. Supposons que pour un $e > 0$, on ait construit les $\phi(e')$ pour $e' < e$. On pose $V = \varinjlim_{e'<e} \phi(e')$. Alors $K \to V$ est un élément de C, et donc $V \to L$ aussi. Il existe donc un sous-objet α-accessible U_e de L, contenant e, et tel que l'inclusion $U_e \cap V \to U_e$ soit dans C. On pose alors $\phi(e) = V \cup U_e$, et on vérifie immédiatement que $\varinjlim_{e'<e} \phi(e') \to \phi(e)$ est un élément de $l(r(\mathcal{N}))$, ce qui achève la démonstration.

Définition 1.28. Un *modèle cellulaire* d'un topos $\mathcal{E}$ est un petit ensemble $\mathcal{M}$ de monomorphismes de $\mathcal{E}$, tel que $l(r(\mathcal{M}))$ soit l'ensemble des monomorphismes de $\mathcal{E}$.

Proposition 1.29. *Tout topos admet un modèle cellulaire.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 1.18 et du lemme 1.27 appliqué à la classe des monomorphismes du topos considéré.

Corollaire 1.30. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\mathcal{E}$ en $f = pi$ où i est un monomorphisme et où p vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Cela résulte du corollaire 1.14 et de la proposition 1.29, qui permettent d'appliquer l'argument du petit objet.

1.31. On rappelle ici succintement la construction de la factorisation par l'argument du petit objet, et on développe quelques unes de ses propriétés. Ces considérations forment un cas particulier de certaines constructions de [7, chapitre 16], qui se révèlent un peu plus simples dans le cadre des topos.

On considère à présent un topos $\mathcal{E}$, un petit ensemble $\mathcal{N}$ de monomorphismes de $\mathcal{E}$, et un ensemble bien ordonné λ. On note 0 le plus petit élément de λ, et pour $\mu \in \lambda$, on note $\mu+1$ son successeur lorsqu'il existe dans λ. On définit alors un foncteur $L : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et un morphisme de foncteurs $1_{\mathcal{E}} \to L$ par la méthode du petit objet : on commence par définir deux foncteurs $S, B : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ en posant pour chaque objet X de $\mathcal{E}$

$$SX = \amalg_{C \to D \in \mathcal{N}} \amalg_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(C,X)} C \ ,$$

et

$$BX = \amalg_{C \to D \in \mathcal{N}} \amalg_{\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(C,X)} D \ ,$$

et on obtient deux morphismes de foncteurs évidents $S \to B$ et $S \to 1_{\mathcal{E}}$. On forme ensuite le carré cocartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & 1_{\mathcal{E}} \arrow[d, "l_1"] \\ B \arrow[r] & L_1 \end{tikzcd} .$$

D'autre part, comme $S \to B$ est un monomorphisme, l_1 est un monomorphisme. Pour $\mu \in \lambda$, on définit le foncteur L_μ par induction transfinie en posant $L_{\mu+1} = L_1 L_\mu$, et lorsque μ n'est pas un élément successeur, on pose $L_\mu = \varinjlim_{\nu<\mu} L_\nu$, la limite étant définie par les mophismes de foncteurs $l_1 L_\mu : L_\mu \to L_{\mu+1}$. On définit enfin le foncteur $L = \varinjlim_{\mu\in\lambda} L_\mu$, et on obtient en outre par composition transfinie un morphisme de foncteurs $l : 1_{\mathcal{E}} \to L$. On remarque que par construction, si X est un objet de $\mathcal{E}$, l_X est un composé transfini d'images directes d'éléments de $\mathcal{N}$, et donc un élément de $l(r(\mathcal{N}))$. C'est en particulier un monomorphisme.

Proposition 1.32. *Le foncteur L vérifie les propriétés suivantes.*

(a) Il respecte les monomorphismes.

(b) Si $X \to Z$ et $Y \to Z$ sont deux monomorphismes de $\mathcal{E}$, la flèche canonique $L(X \cap Y) \to L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme.

(c) Il est accessible.

(d) Si α est un cardinal tel que L soit α-accessible, et tel que tout objet de $\mathcal{E}$ soit la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles, alors pour tout objet X de $\mathcal{E}$, et tout sous-objet α-accessible Y de LX, il existe un sous-objet α-accessible Z de X, tel que LZ contienne Y.

Démonstration. On remarque que pour tout objet T de $\mathcal{E}$, le foncteur $\mathcal{E}ns \to \mathcal{E}$, $E \mapsto \amalg_E T$ commute aux petites limites inductives, puisque c'est l'adjoint à gauche du foncteur $F \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(T, F)$. La propriété (c) résulte alors immédiatement de la proposition 1.14, et du fait que les foncteurs accessibles sont stables par composition et par limites inductives.

Pour montrer (a) et (b), on remarque qu'il suffit de montrer leurs analogues pour le foncteur L_1, car les limites inductives filtrantes sont exactes dans $\mathcal{E}$.

Commençons par montrer (a). Soit $i : X \to Y$ un monomorphisme de $\mathcal{E}$. On vérifie que la flèche $BX \amalg_{SX} SY \to BY$ est un monomorphisme, et on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "l_1 X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocartésien}"] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "l_1 Y"] & \\
L_1 X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "L_1 i"'] & L_1 X \amalg_X Y \arrow[dr] & \\
& & L_1 Y
\end{tikzcd} ,$$

dont les flèches $l_1 X$, $l_1 Y$ et $L_1 X \to L_1 X \amalg_X Y$ sont des monomorphismes (car ce sont des images directes de monomorphismes). D'autre part, on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
BX \amalg_{SX} SY \arrow[r] \arrow[d] & L_1 X \amalg_X Y \arrow[d] \\
BY \arrow[r] & L_1 Y
\end{tikzcd} ,$$

ce qui montre que la flèche $L_1 X \amalg_X Y \to L_1 Y$ est un monomorphisme, et achève la démonstration de (a).

Pour montrer (b), on considère la catégorie I engendrée par le graphe $* \leftarrow * \to *$. Si on note $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de I vers $\mathcal{E}$ (qui est un topos), on a le foncteur limite inductive $\varinjlim : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. Les morphismes de foncteurs $B \leftarrow S \to 1_{\mathcal{E}}$ s'interprètent comme un foncteur $\phi : \mathcal{E} \to \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$, et le foncteur L_1 s'écrit alors $L_1 = \varinjlim \phi$. Le foncteur ϕ respecte les monomorphismes et commute aux intersections (car dans un topos, les sommes sont disjointes et universelles). Soient $X \to Z$ et $Y \to Z$ sont deux monomorphismes de $\mathcal{E}$. On forme le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd} ,$$

ce qui nous donne un carré cartésien dont toutes les flèches sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\phi(X \cap Y) \arrow[r] \arrow[d] & \phi Y \arrow[d] \\
\phi X \arrow[r] & \phi Z
\end{tikzcd} .$$

On en déduit qu'on a un carré à la fois cartésien et cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
\phi(X \cap Y) \arrow[r] \arrow[d] & \phi Y \arrow[d] \\
\phi X \arrow[r] & \phi(X) \cup \phi(Y)
\end{tikzcd} ,$$

ce qui donne un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
L_1(X\cap Y) \arrow[r] \arrow[d] & L_1 Y \arrow[d] \\
L_1 X \arrow[r] & \varinjlim(\phi(X)\cup\phi(Y))
\end{tikzcd} .$$

Or d'après (a), les flèches $L_1(X\cap Y)\to L_1X$ et $L_1(X\cap Y)\to L_1Y$ sont des monomorphismes, ce qui implique que ce carré est aussi cartésien. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que la flèche $\varinjlim \phi(X)\cup\phi(Y)\to L_1Z$ est un monomorphisme. Or on vérifie directement que la flèche

$$SZ\amalg_{(SX\amalg_{S(X\cap Y)}SY)}(BX\amalg_{B(X\cap Y)}BY)\to BZ$$

est un monomorphisme, et donc cela résulte du fait que le carré

$$\begin{tikzcd}
SZ\amalg_{(SX\amalg_{S(X\cap Y)}SY)}(BX\amalg_{B(X\cap Y)}BY) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim \phi(X)\cup\phi(Y)) \arrow[d] \\
BZ \arrow[r] & L_1 Z
\end{tikzcd}$$

est cocartésien.

Pour montrer la propriété (d), on considère un objet X de $\mathcal{E}$, on note I l'ensemble des sous-objets α-accessibles de X, ordonné par l'inclusion, et $\phi: I\to\mathcal{E}$ le foncteur évident. Si Y est un objet α-accessible, comme $\varinjlim\phi\simeq X$, comme I est α-filtrant, et comme L est α-accessible, il vient une bijection canonique :

$$\varinjlim \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y,L\phi)\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y,LX)\ .$$

Lorsque $Y\subset LX$, cela implique que Y est contenu dans l'un des objets $L\phi(i)$, $i\in I$, et achève la démonstration de la proposition.

2. Extensions anodines

Définition 2.1. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un *cylindre* d'un objet X de $\mathcal{E}$ est un quadruplet

$$(IX,\partial^0_X,\partial^1_X,\sigma_X)$$

correspondant à un diagramme commutatif du type suivant dans $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\partial^0_X"'] \arrow[drr, bend left, "1_X"] & & \\
& IX \arrow[r, "\sigma_X"] & X \\
X \arrow[ur, "\partial^1_X"] \arrow[urr, bend right, "1_X"'] & &
\end{tikzcd} ,$$

et tel que $(\partial^0_X,\partial^1_X): X\amalg X\to IX$ soit un monomorphisme.

Un morphisme de cylindres

$$(IX,\partial^0_X,\partial^1_X,\sigma_X)\to(IY,\partial^0_Y,\partial^1_Y,\sigma_Y)$$

est une paire de morphismes $\phi : X \to Y$ et $\psi : IX \to IY$ tels que $\psi\partial^e_X = \partial^e_Y\phi$ pour $e = 0, 1$ et $\phi\sigma_X = \sigma_Y\psi$.

On note $Cyl(\mathcal{E})$ la catégorie des cylindres de $\mathcal{E}$.

Un *cylindre fonctoriel* est une section du foncteur

$$Cyl(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}\ ,\ \ (IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X) \mapsto X\ ,$$

i.e. c'est un quadruplet $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ où I est un foncteur de la catégorie $\mathcal{E}$ vers elle-même, et où ∂^0, $\partial^1 : 1_{\mathcal{E}} \to I$ sont des morphismes de foncteurs admettant une rétraction commune σ, tels que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, le morphisme $(\partial^0_X, \partial^1_X)$ soit un monomorphisme.

Notations 2.2. Soit $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ un cylindre fonctoriel dans $\mathcal{E}$. Si X est un objet de $\mathcal{E}$, on notera $X \otimes I$ l'objet $I(X)$, parfois aussi $1_X \otimes \partial^e$ le morphisme $\partial^e_X : X \to X \otimes I$, $e = 0, 1$, et enfin $1_X \otimes \sigma$ le morphisme $\sigma_X : X \otimes I \to X$. Autrement dit, on voit la catégorie des foncteurs $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ comme une catégorie monoïdale stricte (le produit tensoriel étant donné par la composition des foncteurs), et $\mathcal{E}$ comme un module sur celle-ci. On notera ∂I le foncteur $X \mapsto X \otimes \partial I := X \amalg X$. Le couple (∂^0, ∂^1) définit donc une inclusion canonique i de ∂I dans I.

Définition 2.3. Une *donnée homotopique élémentaire* sur un topos $\mathcal{E}$ est un cylindre fonctoriel dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$, vérifiant les axiomes suivants.

DH1 Le foncteur I commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes.

DH2 Pour tout monomorphisme $j : K \to L$ dans $\mathcal{E}$, les carrés suivants sont cartésiens $(e = 0, 1)$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_K\otimes\partial^e"'] & L \arrow[d, "1_L\otimes\partial^e"] \\ K\otimes I \arrow[r, "j\otimes 1_I"'] & L\otimes I \end{tikzcd} .$$

Une *donnée homotopique* sur $\mathcal{E}$ est un couple $(\mathcal{I}, S)$ où $\mathcal{I}$ est une donnée homotopique élémentaire, et où S est un petit ensemble de monomorphismes de $\mathcal{E}$.

Remarque 2.4. Si on a un carré cartésien dans $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ T \arrow[r] & U \end{tikzcd} ,$$

et si les flèches $S \to U$ et $T \to U$ sont des monomorphismes, alors la flèche canonique $T \amalg_R S \to U$ est un monomorphisme, et on la notera $T \cup S \to U$.

Si $(\mathcal{I}, S)$ est une donnée homotopique sur $\mathcal{E}$, on note pour chaque objet X de $\mathcal{E}$, $X \otimes \{e\} \to X \otimes I$ le morphisme $1_X \otimes \partial^e$ $(e = 0, 1)$, et donc pour chaque inclusion $K \to L$ dans $\mathcal{E}$, il vient des monomorphismes ($e = 0, 1$)

$$K \otimes I \cup L \otimes \{e\} \to L \otimes I \ .$$

D'autre part, on remarque que comme les sommes sont universelles dans $\mathcal{E}$, pour toute inclusion $j : K \to L$ d'objets de $\mathcal{E}$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} K \otimes \partial I \arrow[r, "j\otimes 1_{\partial I}"] \arrow[d, "1_K\otimes i"'] & L \otimes \partial I \arrow[d, "1_L\otimes i"] \\ K \otimes I \arrow[r, "j\otimes 1_I"'] & L \otimes I \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui donne une inclusion

$$K \otimes I \cup L \otimes \partial I \to L \otimes I \ .$$

Exemple 2.5. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Le foncteur $\mathbb{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}ns$, défini par

$$X \mapsto \mathbb{L}(X) = \{\text{sous-objets de X}\} \ ,$$

est représentable (voir [13, prop. III.7.3 et prop. I.3.1]). On note L un représentant, qu'on appelle *l'objet de Lawvere de* $\mathcal{E}$. On a donc pour tout objet X de $\mathcal{E}$, par définition de L, une bijection naturelle

$$\phi : \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(X, L) \simeq \mathbb{L}(X) \ .$$

Soit $*$ l'objet final de $\mathcal{E}$. Alors il admet deux sous-objets canoniques $* \to *$ et $\varnothing \to *$, ce qui définit respectivement deux morphismes $\lambda^0 : * \to L$ et $\lambda^1 : * \to L$. Le morphisme λ^0 permet d'ailleurs d'expliciter la bijection ϕ : si $u : X \to L$ est un morphisme de $\mathcal{E}$, le sous-objet de X correspondant est l'image réciproque $X \times_L *$ de λ^0 par u. On a donc un foncteur $X \mapsto X \times L$, et deux morphismes de foncteurs de l'identitié de $\mathcal{E}$ vers ce dernier, induits respectivement par λ^0 et λ^1. Cela définit un cylindre fonctoriel $\mathcal{L}$, appelé le *cylindre de Lawvere*. Pour le voir, il faut vérifier que le morphisme $(\lambda^0, \lambda^1) : * \amalg * \to L$ est un monomorphisme, ou encore que le carré suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "\lambda^0"] \\ * \arrow[r, "\lambda^1"'] & L \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui est la définition même de λ^1.

Ce cylindre jouera un rôle important dans la suite, car on vérifie immédiatement que l'objet de Lawvere est un objet injectif de $\mathcal{E}$ (voir [13, prop. VI.10.1]), ce qui implique que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la projection $X \times L \to X$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes de $\mathcal{E}$ (*i.e.* est une fibration triviale au sens de la définition 2.12).

Définition 2.6. Soit $(\mathcal{I}, S)$ une donnée homotopique sur un topos $\mathcal{E}$. On dira qu'une flèche $u_0 : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ est *$\mathcal{I}$-homotope* à $u_1 : X \to Y$ (ou encore *homotope* à u_1, lorsque cela ne sera pas trop ambigu), s'il existe un morphisme $h : X \otimes I \to Y$ tel que $h(1_X \otimes \partial^e) = u_e$ pour $e = 0, 1$.

Remarque 2.7. On vérifie immédiatement que la relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$, engendrée par la relation d'homotopie, est compatible à la composition. On notera $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$ la catégorie quotient, et $Q : \mathcal{E} \to h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$ le foncteur canonique. On dira qu'une flèche f de $\mathcal{E}$ est une *$\mathcal{I}$-équivalence d'homotopie* si $Q(f)$ est un isomorphisme de $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$.

2.8. La notion de catégorie de modèles fermée que nous allons considérer tout au long de ces notes est celle de [9]. Elle est un peu plus restrictive que celle de Quillen dans [16], mais nous arriverons naturellement dans ce cadre.

Définition 2.9. Une catégorie de modèles fermée est la donnée d'un quadruplet $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie, et où $\mathcal{W}$, Fib, Cof sont des ensembles de flèches de $\mathcal{C}$, appelés respectivement l'ensemble des *équivalences faibles*, l'ensemble des *fibrations*, et l'ensemble des *cofibrations*, tel que les axiomes suivants soient vérifiés (on appelle *fibrations triviales* (resp. *cofibrations triviales*) les éléments de l'ensemble $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fib}$ (resp. de l'ensemble $\mathcal{W} \cap \mathsf{Cof}$).

CM1 La catégorie $\mathcal{C}$ admet des petites limites inductives et projectives.

CM2 Dans tout triangle commutatif de $\mathcal{C}$, si deux des flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième en est une.

CM3 Les classes $\mathcal{W}$, Fib et Cof sont stables par rétractes.

CM4 Toute cofibration triviale (resp. fibration triviale) vérifie la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à toute fibration (resp. à toute cofibration).

CM5 Il existe deux factorisations fonctorielles de toute flèche f de $\mathcal{C}$ en $f = pi$ et $f = qj$ où p et q sont des fibrations, i et j des cofibrations, i et q des équivalences faibles.

Une catégorie de modèle fermée $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ est *à engendrement cofibrant* s'il existe deux petits ensembles de flèches I et J de $\mathcal{C}$, permettant l'argument du petit objet, et tels que $l(r(I)) = \mathsf{Cof}$ et $l(r(J)) = \mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$. On dira alors que le couple (I, J) engendre la-dite structure de catégorie de modèles fermée.

2.10. Dans toute la suite de ce paragraphe, on considère un topos $\mathcal{E}$ fixé, et une donnée homotopique $(\mathcal{I}, S)$ sur $\mathcal{E}$. On se propose de définir en un certain sens la structure de catégorie de modèles fermée engendrée par cette donnée.

2.11. On commence par choisir un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$, ce qui est possible en vertu de la proposition 1.29. On note alors Λ^0 l'ensemble des flèches qui sont des éléments de S ou bien qui sont de la forme $A \otimes I \cup B \otimes \{e\} \to B \otimes I$ pour $A \to B \in \mathcal{M}$ et $e = 0, 1$.

Si T est un ensemble de monomorphismes de $\mathcal{E}$, on lui associe l'ensemble de monomorphismes

$$\Lambda(T) = \{A \otimes I \cup B \otimes \partial I \to B \otimes I \mid A \to B \in T\} .$$

On définit alors par récurrence des ensembles Λ^n par la formule

$$\Lambda^{n+1} = \Lambda(\Lambda^n) ,$$

puis on pose

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}) = \cup_{n \geq 0} \Lambda^n .$$

Autrement-dit, $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ est le plus petit ensemble de flèches de $\mathcal{E}$ qui contient Λ^0 et qui est stable par l'opération Λ.

Définition 2.12. Une *cofibration* est un monomorphisme. On notera Cof la classe des cofibrations de $\mathcal{E}$.

Une *fibration triviale* est un élément de la classe $r(\mathsf{Cof})$.

Une *extension anodine* est un élément de la classe $l(r(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})))$.

Une *fibration naïve* est un élément de la classe $r(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$.

Un objet X de $\mathcal{E}$ sera dit *fibrant* si la flèche $X \to *$ est une fibration naïve.

Une flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ est une *équivalence faible* si pour tout objet fibrant T, l'application

$$f^* : \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(Y, T) \to \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(X, T)$$

est bijective. On note $\mathcal{W}$ la classe des équivalences faibles.

Une *cofibration triviale* est un élément de la classe $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$.

Enfin, une *fibration* est un élément de la classe $\mathsf{Fib} = r(\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W})$.

Ce paragraphe sera dévoué à la démonstration de l'énoncé ci-dessous.

Théorème 2.13. *Avec les définitions ci-dessus,* $(\mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.*

Remarque 2.14. On remarque immédiatement que la classe des équivalences faibles vérifie l'axiome **CM2** et est stable par rétractes. Elle vérifie en outre la propriété suivante : si $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ sont deux flèches de $\mathcal{E}$ telles que fg et gf soient des équivalences faibles, alors f et g sont des équivalences faibles.

Définition 2.15. Une flèche $f : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ est un *rétracte par déformation fort* (resp. le *dual d'un rétracte par déformation fort*) s'il existe deux flèches $h : Y \otimes I \to Y$ (resp. $k : X \otimes I \to X$) et $g : Y \to X$ telles que :

(i) $gf = 1_X$ (resp. $fg = 1_Y$) ;

(ii) $h\partial^0_Y = 1_Y$ et $h\partial^1_Y = fg$ (resp. $k\partial^0_X = 1_X$ et $k\partial^1_X = gf$) ;

(iii) $h(f \otimes 1_I) = (1_Y \otimes \sigma)(f \otimes 1_I)$ (resp. $fk = f(1_X \otimes \sigma)$).

Proposition 2.16. *Toute fibration triviale est le dual d'un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. Soit $p : X \to Y$ une fibration triviale. Comme la flèche $\varnothing \to Y$ est une cofibration, p admet une section $s : Y \to X$. On a en outre un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \amalg X \arrow[rr, "(1_X,\, sp)"] \arrow[d, "(\partial^0_X,\, \partial^1_X)"'] & & X \arrow[d, "p"] \\ X \otimes I \arrow[r, "\sigma_X"'] & X \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

lequel admet un relèvement $h : X \otimes I \to X$, qui est l'homotopie cherchée.

Corollaire 2.17. *Toute fibration triviale est une équivalence faible.*

Démonstration. Cela résulte de la remarque 2.14 et de la proposition ci-dessus.

Remarque 2.18. On peut à présent faire l'analyse de ce qu'il manque pour démontrer le théorème 2.13.

Par le corollaire 1.30, il existe une factorisation (fonctorielle) de toute flèche f de $\mathcal{E}$, de la forme $f = pi$, où i est une cofibration, et où p est une fibration triviale. On en déduit facilement qu'une fibration q est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale. En effet, on peut factoriser q en $q = pi$ où $i \in \mathsf{Cof}$ et où $p \in r(\mathsf{Cof})$, et comme $p \in \mathcal{W}$ par le corollaire 2.17, si $q \in \mathcal{W}$, cela implique que $i \in \mathcal{W}$. Le lemme du rétracte appliqué à q montre donc que q est une fibration triviale, puisque p en est une. La réciproque n'est autre que le corollaire 2.17.

Ceci posé, on voit qu'en vue de la démonstration du théorème 2.13, les axiomes **CM1**, **CM2**, **CM3** et **CM4** sont vérifiés, le corollaire 1.30 assurant une moitié de l'axiome **CM5**. Cela signifie qu'il suffit de montrer que toute flèche f de $\mathcal{E}$ se factorise par l'argument du petit objet (et donc fonctoriellement) en une cofibration triviale suivie d'une fibration.

Proposition 2.19. *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\mathcal{E}$ en $f = pi$ où p est une fibration naïve, et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ (en particulier, i est une extension anodine).*

Démonstration. La proposition 1.14 permet d'appliquer l'argument du petit objet à l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$.

Proposition 2.20. *Soit $K \to L$ une cofibration (resp. une extension anodine). Alors pour $e = 0, 1$, $K \otimes I \cup L \otimes \{e\} \to L \otimes I$ (resp. $K \otimes I \cup L \otimes \partial I \to L \otimes I$) est une extension anodine. En particulier, pour tout* *objet X de $\mathcal{E}$, les morphismes $\partial^e_X : X \to X \otimes I$ sont des extensions anodines.*

Démonstration. Cela résulte de [9, lemme 4.2.4].

Remarque 2.21. L'énoncé ci-dessus permet de montrer que l'ensemble des extensions anodines ne dépend pas du choix d'un modèle cellulaire, mais seulement de la donnée homotopique.

Lemme 2.22. *Soient K et T deux objets de $\mathcal{E}$, T étant fibrant. Alors la relation de $\mathcal{I}$-homotopie sur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(K,T)$ est une relation d'équivalence. En particulier, si $u, v : K \to T$ sont deux morphismes de $\mathcal{E}$, alors $u = v$ dans $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$ si et seulement s'il existe un morphisme $h : K \otimes I \to T$ tel que $h(1_K \otimes \partial^0) = u$ et $h(1_K \otimes \partial^1) = v$.*

Démonstration. La réflexivité est immédiate : si $u : K \to T$ est une flèche de $\mathcal{E}$, $u\sigma_K : K \otimes I \to T$ est une homotopie de u vers u.

Montrons la symmétrie : soit $h : K \otimes I \to T$ un morphisme de $\mathcal{E}$. On pose $u = h\partial^0_K$ et $v = h\partial^1_K$, et on veut trouver un morphisme $H : K \otimes I \to T$ tel que $u = H\partial^1_K$ et $v = H\partial^0_K$. En remarquant que $K \otimes \partial I \otimes I = (K \otimes I) \amalg (K \otimes I)$, on définit une flèche $f : K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{1\} \to T$ par $f = ((v\sigma_K, h), v\sigma_K)$, et on obtient un relèvement k (en vertu de la proposition 2.20) :

$$\begin{tikzcd} K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{1\} \arrow[r] \arrow[d] & T \\ K \otimes I \otimes I \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd} .$$

On pose alors $H = k\partial^0_{K \otimes I}$. Il vient les égalités

$$H\partial^0_K = k\partial^0_{K\otimes I}\partial^0_K = k(\partial^0_K \otimes 1_I)\partial^0_K = v\sigma_K\partial^0_K = v$$

$$\text{et } H\partial^1_K = k\partial^0_{K\otimes I}\partial^1_K = k(\partial^1_K \otimes 1_I)\partial^0_K = h\partial^0_K = u\ .$$

Pour montrer la transitivité, vu qu'on a déjà la symmétrie, il suffit de montrer que si on a deux flèches $h, k : K \otimes I \to T$ telles que $h\partial^0_K = k\partial^0_K = v$ et $h\partial^1_K = u$, $k\partial^1_K = w$, alors il existe une flèche $l : K \otimes I \to T$ telle que $l\partial^0_K = u$ et $l\partial^1_K = w$. Or on a une flèche $g : K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{0\} \to T$ donnée par $g = ((h,k), v\sigma_K)$, ce qui permet d'obtenir un relèvement q :

$$\begin{tikzcd} K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & T \\ K \otimes I \otimes I \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} .$$

On pose $l = q\partial^1_{K\otimes I}$. Alors il vient comme ci-dessus les égalités $l\partial^0_K = h\partial^1_K = u$ et $l\partial^1_K = k\partial^1_K = w$.

Proposition 2.23. *Toute extension anodine est une équivalence faible.*

Démonstration. Soient $j : K \to L$ une extension anodine, et T un objet fibrant de $\mathcal{E}$. Il faut montrer que l'application

$$j^* : \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(L, T) \to \mathsf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})}(K, T)$$

est bijective. Or la surjectivité est immédiate : soit $k : K \to T$ une flèche de $\mathcal{E}$. On a alors un relèvement l de j sous k :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"'] & T \\ L \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd} .$$

On a donc l'égalité $j^* l = k$.

Pour l'injectivité on considère deux flèches $l_0, l_1 : L \to T$ telles que $l_0 j = l_1 j$ dans $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$. Par le lemme 2.22, il existe un morphisme $h : K \otimes I \to T$ tel que $h\partial^0_K = l_0 j$ et $h\partial^1_K = l_1 j$. On obtient une flèche $u : K \otimes I \cup L \otimes \partial I \to T$, définie par $u = (h, l_0, l_1)$, et grâce à la proposition 2.20, on a le relèvement suivant :

$$\begin{tikzcd} K \otimes I \cup L \otimes \partial I \arrow[r] \arrow[d] & T \\ L \otimes I \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd} .$$

Il vient les égalités $H\partial^e_L = l_e$ pour $e = 0, 1$, autrement dit, $l_0 = l_1$ dans $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$.

Lemme 2.24. *Soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathcal{E}$, les objets X et Y étant fibrants. Alors le morphisme f est une équivalence faible si et seulement si c'est une $\mathcal{I}$-équivalence d'homotopie (*i.e. *$Q(f)$ est un isomorphisme de $h_{\mathcal{I}}(\mathcal{E})$).*

Démonstration. C'est une application immédiate du lemme de Yoneda.

Lemme 2.25. *Soit $p : X \to Y$ une fibration naïve. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *La flèche p est une fibration triviale.*
(b) *La flèche p est le dual d'un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) résulte de la proposition 2.16.

Il reste ainsi à montrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). On se donne donc des morphismes $s : Y \to X$ et $k : X \otimes I \to X$ tels que $ps = 1_Y$, $k\partial^0_X = 1_X$, $k\partial^1_X = sp$, et $pk = p\sigma_X$, et on veut montrer que p est une fibration triviale. On considère un monomorphisme $i : K \to L$, et un carré commutatif dans $\mathcal{E}$,

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

dont on va montrer qu'il admet un relèvement l. Or d'après la proposition 2.20, le carré suivant admet un relèvement $\lambda : L \otimes I \to X$:

$$\begin{tikzcd}
K \otimes I \cup L \otimes \{1\} \arrow[rr, "{(k(a\otimes 1_I), sb)}"] \arrow[d, "j"'] & & X \arrow[d, "p"] \\
L \otimes I \arrow[r, "\sigma_L"'] & L \arrow[r, "b"'] & Y
\end{tikzcd} .$$

On pose $l = \lambda \partial^0_L$. On a alors les relations $pl = p\lambda\partial^0_L = b\sigma_L\partial^0_L = b$ et $li = \lambda\partial^0_L i = \lambda(j \otimes 1_I)\partial^0_K = k(a \otimes 1_I)\partial^0_K = k\partial^0_X a = a$.

Lemme 2.26. *Une fibration naïve de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale.*

Démonstration. Soit $p : X \to Y$ une fibration naïve de but fibrant. Par le lemme 2.24, p est une équivalence faible si et seulement si c'est une $\mathcal{I}$-équivalence d'homotopie (*i.e.* si $Q(p)$ est un isomorphisme). Donc si p est une équivalence faible, par le lemme 2.22, il existe une flèche $k : Y \otimes I \to Y$, et une flèche $t : Y \to X$, telles que $h\partial^0_Y = 1_Y$ et $h\partial^1_Y = pt$. On a ainsi un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\partial^1_Y"'] & X \arrow[d, "p"] \\
Y \otimes I \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

qui admet un relèvement $k' : Y \otimes I \to X$. On pose $s = k'\partial^0_Y$. Alors $ps = pk'\partial^0_Y = k\partial^0_Y = 1_Y$. D'autre part, comme $Q(p)$ est un isomorphisme, il vient $Q(s)Q(p) = 1_X$, et donc par le lemme 2.22, il existe une $\mathcal{I}$-homotopie de 1_X vers sp. On se donne donc une flèche $h : X \otimes I \to X$ telle que $h\partial^0_X = 1_X$ et $h\partial^1_X = sp$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \partial I \arrow[r, "\partial^1_{X\otimes\partial I}"] \arrow[d, "{(\partial^0_X, \partial^1_X)}"'] & X \otimes \partial I \otimes I \arrow[d, "{(h, sph)}"] \\
X \otimes I \arrow[r, "sp\sigma_X"'] & X
\end{tikzcd} ,$$

ce qui définit une flèche $(sp\sigma_X, (h, sph)) : X \otimes I \otimes \{1\} \cup X \otimes \partial I \otimes I \to X$. On a d'autre part les relations $p\sigma_X = psp\sigma_X = ph\partial^1_X\sigma_X = ph(\sigma_X \otimes I)\partial^1_{X\otimes I}$, et $p(h, sph) = ph(\sigma_X \otimes 1_I)((\partial^0_X, \partial^1_X) \otimes 1_I)$, ce qui montre la commutativité du carré suivant,

$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \otimes \{1\} \cup X \otimes \partial I \otimes I \arrow[rrr, "{(sp\sigma_X, (h, sph))}"] \arrow[d, "{(\partial^1_{X\otimes I}, (\partial^0_X \otimes 1_I, \partial^1_X \otimes 1_I))}"'] & & & X \arrow[d, "p"] \\
X \otimes I \otimes I \arrow[r, "\sigma_X \otimes 1_I"'] & X \otimes I \arrow[r, "h"'] & X \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd} ,$$

ce dernier admettant un relèvement $H : X \otimes I \otimes I \to X$. On pose $k = H\partial^0_{X\otimes I}$. Alors $k\partial^0_X = H\partial^0_{X\otimes I}\partial^0_X = H(\partial^0_X \otimes 1_I)\partial^0_X = h\partial^0_X = 1_X$, $k\partial^1_X = H\partial^0_{X\otimes I}\partial^1_X = H(\partial^1_X \otimes 1_I)\partial^0_X = sph\partial^0_X = sp$, et $pk = pH\partial^0_{X\otimes I} = ph(\sigma_X \otimes 1_I)\partial^0_{X\otimes I} = ph\partial^0_X\sigma_X = p\sigma_X$. Le lemme 2.25 montre que p est une fibration triviale. La réciproque résulte du corollaire 2.17.

Corollaire 2.27. *Une cofibration de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une extension anodine.*

Démonstration. Soit $i : K \to L$ une cofibration, l'objet L étant fibrant. On factorise i en $i = qj$ où j est une extension anodine, et où q est une fibration naïve. Alors en vertu de la proposition 2.23, i est une équivalence faible si et seulement si q est une équivalence faible, et par la proposition ci-dessus, q est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale. Donc si i est une équivalence faible, q vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à i, et par suite, i est un rétracte de j, ce qui montre que i est une extension anodine. La réciproque a déjà été montrée (voir la proposition 2.23).

Proposition 2.28. *Une cofibration est une équivalence faible si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naïves de but fibrant. En particulier, toute fibration naïve de but fibrant est une fibration, et pour tout objet X de $\mathcal{E}$, l'unique flèche $X \to *$ est une fibration si et seulement si X est fibrant.*

Démonstration. Soit $i : K \to L$ une cofibration. Il existe une extension anodine de but fibrant $j : L \to L'$ (par la proposition 2.19, en factorisant le morphisme canonique $L \to *$), et par le corollaire 2.27, i est une équivalence faible si et seulement si ji est une extension anodine.

Supposons que i soit une équivalence faible, et considérons un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

où la flèche p est une fibration naïve de but fibrant. On veut montrer qu'il admet un relèvement. Comme Y est fibrant, et comme j est une extension anodine, il vient un relèvement $b' : B' \to Y$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "b"] \arrow[d, "j"'] & Y \\ L' \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

On obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "a"] \arrow[d, "ji"'] & X \arrow[d, "p"] \\ L' \arrow[r, "b'"'] & Y \end{tikzcd},$$

lequel admet un relèvement $l : L' \to X$. Il vient alors les égalités $lji = a$ et $plj = b'j = b$.

Réciproquement, si i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naïves de but fibrant, on factorise ji en $ji = pk$ où $k : K \to K'$ est une extension anodine, et $p : K' \to L'$ est une fibration naïve. Vu que i et j vérifient la propriété de relèvement à gauche relativement à p, il en est de même de ji. On en déduit que ji est un rétracte de k, et donc que c'est une extension anodine. Par conséquent, i est une équivalence faible.

Corollaire 2.29. *Les cofibrations triviales sont stables par images directes et par compositions transfinies.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.28, car tout ensemble de flèches défini par une propriété de relèvement à gauche relativement à un autre ensemble de flèches est stable par images directes et par compositions transfinies.

Lemme 2.30. *Toute extension anodine de source et de but fibrants est un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. Soit $i : K \to L$ une extension anodine de source et de but fibrants. Grâce aux propriétés de relèvement, on voit que i admet une rétraction $r : L \to K$, ce qui permet de définir le morphisme $(i\sigma_K, (1_L, ir)) : K \otimes I \cup L \otimes \partial I \to L$, et ainsi d'obtenir un relèvement h dans le diagrame suivant (en vertu de la proposition 2.20) :

$$\begin{tikzcd} K \otimes I \cup L \otimes \partial I \arrow[r, "{(i\sigma_K,(1_L,ir))}"] \arrow[d] & L \\ L \otimes I \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}.$$

On vérifie alors les équations $h\partial^0_L = 1_L$, $h\partial^1_L = ir$, et $h(i \otimes 1_I) = i \otimes \sigma$.

L'énoncé suivant, ainsi que sa démonstration, sont directement inspirés de leurs analogues dans [7].

Proposition 2.31. *Pour tout cardinal α assez grand, si on pose $\beta = 2^\alpha$, alors pour toute cofibration triviale $i : C \to D$, et pour tout sous-objet β-accessible J de D, il existe un sous-objet β-accessible K de D, qui contient J, tel que l'inclusion $C \cap K \to K$ soit une cofibration triviale.*

Démonstration. On va utiliser les propositions 1.20 et 1.32, appliquées au foncteur $L : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, défini à partir de l'ensemble $\mathcal{N} := \Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ et d'un ensemble bien ordonné bien choisi, tel que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, LX soit fibrant (voir la section sur l'argument du petit objet dans [9] pour plus de détails). On reprendra les mêmes notations que celles de 1.32. On rappelle que les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) Le foncteur L respecte les monomorphismes.

(b) Si $X \to Z$ et $Y \to Z$ sont deux monomorphismes de $\mathcal{E}$, la flèche canonique $L(X \cap Y) \to L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme.

(c) Le foncteur L (resp. I) est accessible, et donc pour tout cardinal assez grand α, si $\beta = 2^\alpha$, tout objet β-accessible de $\mathcal{E}$ est envoyé par L (resp. par I) sur un objet β-accessible.

(d) Pour tout cardinal β assez grand, pour tout sous-objet β-accessible Y de LX, il existe un sous-objet β-accessible Z de X, tel que LZ contienne Y.

On a en outre un morphisme de foncteurs $l : 1_{\mathcal{E}} \to L$, tel que pour tout X, l_X soit une extension anodine.

Considérons une cofibration triviale $i : C \to D$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "l_C"] \arrow[d, "i"'] & LC \arrow[d, "Li"] \\ D \arrow[r, "l_D"'] & LD \end{tikzcd} .$$

On remarque que Li est une cofibration triviale de source et de but fibrants, et donc d'après le lemme précédent et le corollaire 2.27, c'est un rétracte par déformation fort. Il existe par conséquent des morphismes $r : LD \to LC$, et $h : LD \otimes I \to LD$, tels que $rLi = 1_{LC}$, $h\partial^0_{LD} = 1_{LD}$, $h\partial^1_{LD} = L(i)r$, et $h(Li \otimes 1_I) = Li \otimes \sigma$.

On choisit un cardinal infini et assez grand α, on note α^+ le cardinal successeur de α, vu comme un ensemble bien ordonné, puis on pose $\beta = 2^\alpha$. On sait que α^+ est un ensemble ordonné α-filtrant et que $\alpha^+ \leq \beta$.

On se donne enfin un sous-objet β-accessible J de D. On va construire par induction transfinie une suite de sous-objets β-accessibles de D

$$K_0 \subset \ldots \subset K_\gamma \subset K_{\gamma+1} \subset \ldots \subset D \ , \ \gamma \in \alpha^+ \ ,$$

telle que K_0 contienne J, et telle que pour chaque élément γ de α^+, la composée $LK_\gamma \otimes I \to LD$ de l'inclusion $LK_\gamma \otimes I \to LD \otimes I$ et de l'homotopie $h : LD \otimes I \to LD$, se factorise par un morphisme $k_\gamma : LK_\gamma \otimes I \to LK_{\gamma+1}$ (ces factorisations étant nécessairement uniques, puisque les flèches $LK_\gamma \to LD$ sont des monomorphismes). Pour cela, on pose $K_0 = J$. Si $\gamma > 0$, et si on a construit les sous-objets $K_{\gamma'}$ pour tout $\gamma' < \gamma$, on pose $K'_\gamma = \varinjlim_{\gamma' < \gamma} K_{\gamma'}$. Alors K'_γ est toujours β-accessible par la proposition 1.10, ainsi que $LK'_\gamma \otimes I$. Comme LD est la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles, on en déduit que le morphisme $LK'_\gamma \otimes I \to LD$, composé de l'inclusion $LK'_\gamma \otimes I \to LD \otimes I$ et du morphisme $h : LD \otimes I \to LD$, se factorise par un sous-objet β-accessible de LD. Or par la propriété (d) ci-dessus, ce dernier est contenu dans un sous-objet de la forme LK''_γ, où K''_γ est un sous-objet β-accessible de D. On pose enfin $K_\gamma = K'_\gamma \cup K''_\gamma$, ce qui achève la construction de cette suite transfinie.

Posons $K = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} K_\gamma$. La proposition 1.10 montre déjà que K est un objet β-accessible de $\mathcal{E}$. Grâce à l'accessibilité de L, et à l'universalité des limites inductives dans $\mathcal{E}$, on a les identifications suivantes.

$$LK = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} LK_\gamma$$
$$K \cap C = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} K_\gamma \cap C$$
$$L(K \cap C) = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} L(K_\gamma \cap C)$$

On obtient ainsi un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} LK \otimes I \arrow[r, "k"] \arrow[d] & LK \arrow[d] \\ LD \otimes I \arrow[r, "h"'] & LD \end{tikzcd} \quad ,$$

où k est la limite inductive des morphismes k_γ. D'autre part, on a des isomorphismes $L(K_\gamma \cap C) \to L(K_\gamma) \cap L(C)$, ce qui implique que les morphismes $LK_\gamma \to LC$, composés de $LK_\gamma \to LD$ et de r, se factorisent de manière unique en des morphismes $s_\gamma : LK_\gamma \to L(K_{\gamma+1} \cap C)$, tels qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} LK_\gamma \arrow[r, "s_\gamma"] \arrow[d] & L(K_{\gamma+1} \cap C) \arrow[d] \\ LD \arrow[r, "r"'] & LC \end{tikzcd} \quad .$$

On obtient un morphisme $s : LK \to L(K \cap C)$, tel que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} LK \arrow[r, "s"] \arrow[d] & L(K \cap C) \arrow[d] \\ LD \arrow[r, "r"'] & LC \end{tikzcd} \quad ,$$

comme la limite inductive des flèches s_γ.

On vérifie facilement que la donnée de k et de s fait de l'inclusion $L(K \cap C) \to LK$ un rétracte par déformation fort, et donc une équivalence faible (et même une extension anodine par le corollaire 2.27). Par conséquent, le morphisme $K \cap C \to K$ est une cofibration triviale.

Proposition 2.32. *Il existe un petit ensemble $\mathcal{N}$ de cofibrations triviales, tel que $l(r(\mathcal{N})) = \mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$.*

Démonstration. Cela résulte des propositions 2.31 et 1.18, ainsi que du lemme 1.27.

Corollaire 2.33. *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de $\mathcal{E}$, de la forme $f = qj$, où j est une cofibration triviale, et où q est une fibration.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.32 et de l'argument du petit objet.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.13, en vertu de la remarque 2.18.

3. $\mathcal{E}$-LOCALISATEURS

3.1. Si $\mathcal{E}$ est un topos, on dira parfois *cofibration* pour monomorphisme, et on notera Cof la classe des cofibrations de $\mathcal{E}$. On appelera *fibrations triviales* les flèches de $\mathcal{E}$ qui vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes de $\mathcal{E}$.

Définition 3.2. Soient $\mathcal{M}$ une catégorie, et $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$. On dira que $\mathcal{W}$ est *faiblement saturée* si les axiomes suivants sont vérifiés.

FS1 Toutes les identités sont des éléments de $\mathcal{W}$.

FS2 Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{M}$, deux des trois flèches sont dans $\mathcal{W}$, alors il en est de même de la dernière.

FS3 Si $i : X \to Y$ et $r : Y \to X$ sont deux flèches de $\mathcal{M}$, telles que $ri = 1_X$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors r est un élément de $\mathcal{W}$.

Si $\mathcal{M}$ est une catégorie, et $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$, on note $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ la localisation de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{W}$, et $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ le foncteur canonique. On dira que $\mathcal{W}$ est *fortement saturée* si une flèche f de $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{W}$ à condition et à condition seulement que la flèche $\gamma(f)$ soit un isomorphisme de $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$.

Lemme 3.3. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{W}$ une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$. On note L l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *(a) L'ensemble $\mathcal{W}$ contient toutes les fibrations triviales de $\mathcal{E}$.*
- *(b) Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la projection $X \times L \to X$ est un élément de $\mathcal{W}$.*
- *(c) Tout objet X de $\mathcal{E}$ admet un cylindre $(IX, \partial^0_X, \partial^1_X, \sigma_X)$ tel que $\sigma_X \in \mathcal{W}$.*

Démonstration. On a (a) $\Rightarrow$ (b) car l'objet de Lawvere est injectif, et l'implication (b) $\Rightarrow$ (c) résulte du fait que l'objet de Lawvere définit un cylindre fonctoriel (voir 2.5). Enfin (c) $\Rightarrow$ (a) se montre en recopiant la preuve de la proposition 2.16.

Définition 3.4. Soit $\mathcal{E}$ un topos.

Une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$ est un *$\mathcal{E}$-localisateur* si les axiomes suivants sont vérifiés.

L1 Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{E}$, deux des trois flèches sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même de la dernière.

L2 $\mathcal{W}$ contient toutes les fibrations triviales de $\mathcal{E}$.

L3 La classe $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ est stable par images directes et par compositions transfinies.

Si S est un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$, le *$\mathcal{E}$-localisateur engendré par S*, noté $\mathcal{W}(S)$, est l'intersection de tous les $\mathcal{E}$-localisateurs contenant S.

Un $\mathcal{E}$-localisateur est *accessible* s'il est engendré par un petit ensemble.

Le *$\mathcal{E}$-localisateur minimal* est le $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}(\varnothing)$.

3.5. On appellera *équivalences faibles* ou *$\mathcal{W}$-équivalences faibles* les éléments de $\mathcal{W}$, et *cofibrations triviales* ou *$\mathcal{W}$-cofibrations triviales* ceux de $\mathcal{W} \cap \mathsf{Cof}$.

Exemple 3.6. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par la flèche canonique $\varnothing \to *$ est la classe $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$ de toutes les flèches de $\mathcal{E}$.

Exemple 3.7. Considérons le topos ponctuel, à savoir la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. On remarque que si $*$ désigne l'ensemble à un élément, l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}ns$ est la somme $* \amalg *$. Si on note $\mathcal{W}$ la classe des applications $X \to Y$ telles que $(X = \varnothing) \Rightarrow (Y = \varnothing)$, on en déduit que $\mathcal{W}$ est le $\mathcal{E}ns$-localisateur minimal.

Proposition 3.8. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $(\mathcal{I}, S)$ une donnée homotopique sur $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$ obtenue à partir de $(\mathcal{I}, S)$ par le théorème 2.13, et on choisit un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$, ce qui permet de définir un petit ensemble d'extensions anodines $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$. En particulier, $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible.*

Démonstration. La remarque 2.14, et les corollaires 2.17 et 2.29, impliquent que $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur qui contient $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. On en déduit immédiatement l'inclusion $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})) \subset \mathcal{W}$.

En vertu de la proposition 2.19, il existe un foncteur $L : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et un morphisme de foncteurs $l : 1_{\mathcal{E}} \to L$, tels que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, LX soit fibrant, et l_X soit un composé transfini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. Par conséquent, pour tout objet X, l_X est un élément de $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$. Considérons un élément $f : X \to Y$ de $\mathcal{W}$. On obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "f"'] & LX \arrow[d, "Lf"] \\ Y \arrow[r, "l_Y"'] & LY \end{tikzcd} \quad ,$$

et on factorise par l'argument du petit objet Lf en $Lf = qj$ où j est une extension anodine et où q est une fibration naïve. On peut encore imposer que j soit un composé transfini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(S,\mathcal{M})$. On sait alors que les morphismes l_X, l_Y et j sont des éléments de $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S,\mathcal{M}))$, et donc q est une fibration triviale, par le lemme 2.26. Par conséquent, Lf est un élément de $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S,\mathcal{M}))$, et donc il en est de même de f.

Théorème 3.9. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur accessible. On note* Cof *l'ensemble des monomorphismes de $\mathcal{E}$, et* $\mathsf{Fib} := r(\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W})$*. Alors le quadruplet* $(\mathcal{E},\mathcal{W},\mathsf{Fib},\mathsf{Cof})$ *est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.*

En particulier, $\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}(\varnothing)$, appelée la structure de catégorie de modèles fermée minimale.

Démonstration. On considère un petit ensemble T de flèches de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(T)$. On factorise chaque élément f de T en $f = p_f i_f$ où i_f est un monomorphisme, et où p_f est une fibration triviale (par le corollaire 1.30), et on pose $S = \{i_f \mid f \in T\}$. Il est clair que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(S)$. D'autre part on a une donnée homotopique $(\mathcal{L},S)$, où $\mathcal{L}$ est le cylindre de Lawvere (voir l'exemple 2.5), et en choisissant un modèle cellulaire $\mathcal{M}$, on définit un petit ensemble d'extensions anodines $\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M})$. Vu que $\mathcal{W}$ contient toutes les fibrations triviales, et donc en particulier celles du type $X \times L \to X$, on remarque qu'une flèche $f : X \to Y$ est une $\mathcal{W}$-équivalence faible si et seulement si $f \times 1_L : X \times L \to Y \times L$ en est une. Par conséquent, comme $S \subset \mathcal{W}$, pour tout élément f de S, $f \times 1_L \in \mathcal{W}$. On voit aussi que si $f \in S$, alors $f \amalg f \in \mathcal{W}$. En effet, les éléments de $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ sont stables par images directes, ce qui montre que pour tout objet Z de $\mathcal{E}$, $f \amalg 1_Z$ est un élément de $\mathcal{W}$, puis que $f \amalg f \in \mathcal{W}$. Cela permet de constater que $\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M}) \subset \mathcal{W}$, en reprenant pas à pas la construction de $\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M})$. On en déduit que $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M})) \subset \mathcal{W}$. On a en outre trivialement l'incusion $S \subset \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M}))$, ce qui montre l'égalité $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S,\mathcal{M}))$. La proposition ci-dessus permet d'achever la démonstration.

Remarque 3.10. Il résulte du théorème ci-dessus que la donnée d'un $\mathcal{E}$-localisateur accessible est équivalente à celle d'une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur $\mathcal{E}$, dont les cofibrations sont les monomorphismes.

Corollaire 3.11. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Tout $\mathcal{E}$-localisateur est fortement saturé. En particulier, tout $\mathcal{E}$-localisateur est stable par rétractes.*

Démonstration. Lorsque le $\mathcal{E}$-localisateur est accessible, cela résulte de la proposition ci-dessus et de [16, chap. I, sect. 5, prop. 1] (ou alors on peut le montrer directement à partir du paragraphe précédent).

Dans le cas général, si $\mathcal{W}_0$ est un $\mathcal{E}$-localisateur on note $\mathbb{W}$ l'ensemble des $\mathcal{E}$-localisateurs accessibles $\mathcal{W}$ qui sont contenus dans $\mathcal{W}_0$, ordonné par l'inclusion. C'est un (gros) ensemble ordonné filtrant, et on a un isomorphisme canonique dans la catégorie des catégories

$$\varinjlim_{\mathcal{W}\in\mathbb{W}} \mathcal{W}^{-1}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_0^{-1}\mathcal{E} \ .$$

On en déduit qu'une flèche f de $\mathcal{E}$ induit un isomorphisme dans $\mathcal{W}_0^{-1}\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe un $\mathcal{E}$-localisateur accessible $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_0$ tel que f induise un isomorphisme dans $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{E}$, ce qui nous ramène au cas accessible, et permet de conclure.

Lemme 3.12. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur.*

(a) On considère un diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_0"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 & B_0 \arrow[l, "\beta_1"] \arrow[r, "\beta_2"'] & B_2 \end{tikzcd} ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des équivalences faibles. Alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \to B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est une équivalence faible.

(b) On se donne un ensemble bien ordonné λ, deux foncteurs $X, Y : \lambda \to \mathcal{E}$, et un morphisme de foncteurs $\phi : X \to Y$. On suppose en outre que pour tout élément μ de λ, les flèches naturelles $\varinjlim_{\nu<\mu} X(\nu) \to X(\mu)$ et $\varinjlim_{\nu<\mu} Y(\nu) \to Y(\mu)$ sont des monomorphismes, $\phi(\mu) : X(\mu) \to Y(\mu)$ étant une équivalence faible. Alors $\varinjlim \phi : \varinjlim X \to \varinjlim Y$ est une équivalence faible.

(c) Toute somme d'équivalences faibles est une équivalence faible.

Démonstration. Lorsque $\mathcal{W}$ est accessible, il s'agit d'un résultat général dans les catégories de modèle fermées (voir [9, corollaire 5.1.6 et lemme 5.2.6]). Le cas non-nécessairement accessible s'en déduit car les énoncés ne portent que sur des petits ensembles de flèches.

Proposition 3.13. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux topos, $F, G : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ deux foncteurs qui commutent aux petites limites inductives et qui respectent les monomorphismes. On considère un morphisme de foncteurs $\alpha : F \to G$. Alors le plus petit $\mathcal{F}$-localisateur $\mathcal{W}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, le morphisme $\alpha_X : FX \to GX$ soit une équivalence faible, est accessible. Plus exactement, il existe un petit ensemble O d'objets X de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{W}$ soit le $\mathcal{F}$-localisateur engendré par l'ensemble $\{\alpha_X \mid X \in O\}$.*

Démonstration. On note $\mathcal{W}$ ce $\mathcal{F}$-localisateur. Soit $\mathcal{M}$ un modèle cellulaire de $\mathcal{E}$. On pose $S = \{\alpha_T \mid \exists\ X \to Y \in \mathcal{M},\ T \in \{X, Y\}\}$. Il est évident que $\mathcal{W}(S) \subset \mathcal{W}$. La proposition résulte alors de l'argument du petit objet appliqué à $\mathcal{M}$, qui permet de dire que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la flèche $\varnothing \to X$ est un rétracte d'un composé transfini d'images directes de sommes d'éléments de $\mathcal{M}$, ce à partir de quoi on peut utiliser le lemme précédent pour montrer que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}(S)$.

Corollaire 3.14. *Soit $\mathcal{E}$ un topos.*

(a) Si S est un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$, on note $\mathsf{cart}(S)$ l'ensemble des flèches de la forme

$$s \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z \quad , \quad s \in S \ , \ Z \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{E} \ .$$

Alors le plus petit $\mathcal{E}$-localisateur contenant $\mathsf{cart}(S)$ est stable par produits finis. Si en outre S est un petit ensemble, il est aussi accessible.

(b) Si $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont deux $\mathcal{E}$-localisateurs stables par produits finis, alors le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par ceux-ci est stable par produits finis.

(c) Le A-localisateur minimal est stable par produits finis.

Démonstration. Si X est un faisceau sur $\mathcal{E}$, on note

$$\pi_X : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \quad , \quad Y \longmapsto Y \times X \ .$$

On remarque que le foncteur π_X commute aux petites limites inductives, et qu'il respecte les monomorphismes, ainsi que les fibrations triviales. Par conséquent, pour tout $\mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}$, $\pi_X^{-1}\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur.

Montrons l'assertion (a). Soit S un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$. Alors pour tout faisceau Z sur $\mathcal{E}$, on a l'inclusion $\pi_Z \mathsf{cart}(S) \subset \mathsf{cart}(S)$, ce qui implique que $\pi_Z^{-1}\mathcal{W}(\mathsf{cart}(S))$ est un $\mathcal{E}$-localisateur contenant $\mathcal{W}(\mathsf{cart}(S))$, et prouve la première partie de (a). Dans le cas où S est un petit ensemble, chaque élément $s : X \to Y$ définit un morphisme de foncteurs évident

$$\pi_s : \pi_X \to \pi_Y$$

qui vérifie les conditions de la proposition ci-dessus, laquelle montre que $\mathcal{W}(\mathsf{cart}(S))$ est accessible.

L'assertion (b) résulte de (a), une fois remarqué que si $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont deux $\mathcal{E}$-localisateurs stables par produits finis, le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par ceux-ci est le plus petit contenant $\mathsf{cart}(\mathcal{W} \cup \mathcal{W}')$.

L'assertion (c) est une spécialisation de (a) dans le cas où $S = \varnothing$.

Remarque 3.15. Le corollaire ci-dessus montre que le $\mathcal{E}$-localisateur minimal définit une théorie homotopique inhabituelle. Par exemple, si X est un ensemble simplicial tel que X_0 soit un ensemble ayant au moins deux éléments distincts, alors le $\widehat{\mathbf{\Delta}}\,/X$-localisateur induit par les équivalences faibles simpliciales usuelles n'est pas stable par produits finis, et donc est strictement distinct du minimal.

Proposition 3.16. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux topos, $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un foncteur, et $\mathcal{W}$ un $\mathcal{F}$-localisateur accessible. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(a) Le foncteur ϕ commute aux petites limites inductives.

(b) Le foncteur ϕ respecte les monomorphismes, et pour toute paire d'inclusions $J \to L$, $K \to L$, la flèche canonique $\phi(J \cap K) \to \phi(J) \cap \phi(K)$ est un isomorphisme.

(c) Il existe un cylindre fonctoriel $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ dans $\mathcal{E}$, tel que pour tout objet X de $\mathcal{E}$, le morphisme $\phi(X \otimes I) \to \phi(X)$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence faible.

Alors $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible.

Démonstration. On remarque qu'une fois les conditions (a) et (b) vérifiées, $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur si et seulement si la condition (c) est vérifiée (en utilisant le lemme 3.3). Le seul aspect non-trivial à démontrer est donc le fait que $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est accessible. Il existe un cardinal infini α tel que pour tout cardinal $\beta_0 \geq \alpha$, tout objet de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{F}$ soit la réunion β_0-filtrante de ses sous-objets β_0-accessibles, et $\phi Acc_{\beta_0}(\mathcal{E}) \subset Acc_{\beta_0{}^\alpha}(\mathcal{F})$ (par les propositions 1.18 et 1.20), et tel que la proposition 2.31 soit vérifiée relativement à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{W}$, *i.e.* tel que si on pose $\beta = 2^{\beta_0}$, pour toute $\mathcal{W}$-cofibration triviale $i : C \to D$, pour tout sous-objet β-accessible J de D, il existe un sous-objet β-accessible K de D, qui contient J, et tel que l'inclusion $K \cap C \to K$ soit une $\mathcal{W}$-équivalence faible.

On va montrer que l'énoncé de la proposition 2.31 est vérifié pour $\phi^{-1}\mathcal{W}$ et pour α assez grand. On choisit donc un cardinal $\beta_0 \geq \alpha$, et on pose $\beta = 2^{\beta_0}$.

Soit $K \to L$ un élément de $\mathsf{Cof} \cap \phi^{-1}\mathcal{W}$, et soit J un sous-objet β-accessible de L. On va construire une suite de sous-objets β-accessibles de L, J_n, $n \geq 0$, et une suite de sous-objets β-accessibles de ϕL, J'_n, $n \geq 0$, telles que pour tout $n \geq 0$, on ait des inclusions

$$J_n \subset J_{n+1}\ , \quad J'_n \subset J'_{n+1}\ , \quad \phi J_n \subset J'_n\ , \quad J'_n \subset \phi J_{n+1}\ ,$$

les morphismes $\phi(K) \cap J'_n \to J'_n$ étant des équivalences faibles.

On pose $J_0 = J$. Pour $n \geq 1$, si on a construit J_{n-1}, comme J_{n-1} est β-accessible, il en est de même de ϕJ_{n-1} (par la proposition 1.20), et par suite ϕJ_{n-1} est contenu dans un sous-objet β-accessible J'_{n-1} de ϕL, tel que $\phi(K) \cap J'_{n-1} \to J'_{n-1}$ soit une cofibration triviale (par la propositon 2.31). D'autre part, L est la réunion β-filtrante de ses sous-objets β-accessibles (par la proposition 1.18), et donc comme J'_{n-1} est β-accessible, vu que le foncteur commute aux petites limites inductives, et qu'il respecte les monomorphismes, J'_{n-1} est contenu dans un sous-objet β-accessible de ϕL, de la forme $\phi J''_n$, où J''_n est un sous-objet β-accessible de L. On pose $J_n = J_{n-1} \cup J''_n$.

Une fois cette construction faite, on définit $J' = \varinjlim_n J_n$. On obtient des isomorphismes $\phi J' \simeq \varinjlim_n J'_n$ et $\phi(J' \cap K) \simeq \varinjlim_n J'_n \cap \phi(K)$, et par le lemme 3.12, on a une équivalence faible dans $\mathcal{F}$, $\varinjlim_n J'_n \cap \phi(K) \to \varinjlim_n J'_n$. On en déduit que $J' \cap K \to J'$ est une $\phi^{-1}\mathcal{W}$-équivalence faible.

Le lemme 1.27 permet à présent de montrer que $Acc_\beta(\mathcal{E}) \cap \mathsf{Cof} \cap \phi^{-1}\mathcal{W}$ engendre $\phi^{-1}\mathcal{W}$.

Corollaire 3.17. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et I une petite catégorie. On suppose donné un $\mathcal{E}$-localisateur accessible $\mathcal{W}$.*

On définit $\mathcal{W}^I \subset \mathsf{Fl}(\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}))$ comme l'ensemble des flèches $X \to Y$ telles que pour tout objet i de I, le morphisme de $\mathcal{E}$, $X(i) \to Y(i)$, soit une équivalence faible.

Alors $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}^I$.

Démonstration. On commence par considérer le cas particulier où I est une catégorie discrète. On a alors $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}) = \prod_I \mathcal{E}$. Si $\mathcal{N}$ est un petit ensemble de cofibrations triviales de $\mathcal{E}$ tel que $l(r(\mathcal{N})) = \mathcal{W}$ (ce qui existe en vertu du théorème 3.9), alors $\mathcal{W}^I \cap \mathsf{Cof} = \prod_{i\in I}(\mathcal{W} \cap \mathsf{Cof}) = \prod_{i \in I} l(r(\mathcal{N})) = l(r(\prod_{i\in I}\mathcal{N}))$, ce qui montre que $\mathcal{W}^I$ est accessible, car il est de la forme $\mathcal{W}(\prod_{i\in I}\mathcal{N})$. Dans le cas général, on considère l'ensemble $\mathsf{Ob}\, I$ comme une catégorie discrète, et on a un foncteur canonique $u : \mathsf{Ob}\, I \to I$, ce qui induit un foncteur $u^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Ob}\, I, \mathcal{E})$. Or u^* vérifie les hypothèses de la proposition 3.16, ce qui qui montre que le $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{E})$-localisateur $\mathcal{W}^I = (u^*)^{-1}(\mathcal{W}^{\mathsf{Ob}\, I})$ est accessible, et permet d'appliquer le théorème 3.9.

Corollaire 3.18. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Toute intersection d'une petite famille de $\mathcal{E}$-localisateurs accessibles est accessible.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{W}_i)_{i\in I}$ une petite famille de $\mathcal{E}$-localisateurs accessibles. On considère l'ensemble I comme une catégorie discrète, et on peut voir la famille $(\mathcal{W}_i)_{i\in I}$ comme un $\prod_I \mathcal{E}$-localisateur $\mathcal{W}_0$, lequel est accessible par un raisonnement analogue à celui développé pour démontrer le corollaire précédent. D'autre part, le foncteur canonique $\delta : \mathcal{E} \to \prod_I \mathcal{E}$ vérifie les conditions de la proposition 3.16, et on a l'égalité $\delta^{-1}\mathcal{W}_0 = \cap_i \mathcal{W}_i$.

4. Propreté

Définition 4.1. Soient $\mathcal{E}$ un topos, $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur, et $p : E \to B$ un morphisme de $\mathcal{E}$. On note $C(p)$ l'ensemble des flèches $f : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ telles que pour tout $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, B)$, une fois formés les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{tikzcd} X \times_B E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \times_B E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

la flèche g soit un élément de $\mathcal{W}$.

Si F est un ensemble de flèches de $\mathcal{E}$, alors on note $C(F)$ l'ensemble $\cap_{p\in F} C(p)$.

Proposition 4.2. *On considère $\mathcal{E}$, $\mathcal{W}$, et p comme dans la définition ci-dessus, et on rappelle que* Cof *désigne la classe des monomorphismes de $\mathcal{E}$.*

(a) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes de $\mathcal{E}$. Si f et g (resp. f et gf) sont des éléments de $C(p)$, alors il en est de même de gf (resp. de g).

(b) L'ensemble $C(p) \cap \mathsf{Cof}$ est stable par rétractes, par images directes, et par compositions transfinies. En outre, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[d, "f_2"'] & A_0 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_0"'] & A_1 \arrow[d, "f_1"] \\ B_2 & B_0 \arrow[l, "b_2"] \arrow[r, "b_1"'] & B_1 \end{tikzcd} \quad ,$$

tel que a_1 et b_1 soient des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 des éléments de $C(p)$, alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \to B \amalg_{B_0} B_2$ est un élément de $C(p)$.

(c) Si $C(p)$ contient $\mathcal{W} \cap \mathsf{Cof}$, alors $C(p)$ contient $\mathcal{W}$.

Démonstration. Commençons par montrer le point (a). Soit $Z \to B$ un morphisme de $\mathcal{E}$. Alors le morphisme $X \times_B E \to Y \times_B E$ est une équivalence faible. De même, le morphisme $Y \times_B E \to Z \times_B E$ (resp. $X \times_B E \to Y \times_B E \to Z \times_B E$) est une équivalence faible, et donc, le morphisme $X \times_B E \to Y \times_B E \to Z \times_B E$ (resp. $Y \times_B E \to Z \times_B E$) est une équivalence faible.

Pour montrer (b), on commence par la remarque suivante : on définit un foncteur $\phi : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}$ par $(X \to B) \mapsto X \times_B E$. Ce foncteur commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes. On en déduit que $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ est un $\mathcal{E}/B$-localisateur, car les fibrations triviales sont stables par images réciproques. Le point (b) résulte de cette constatation, car $C(p)$ peut à présent être vu comme l'ensemble des flèches $X \to Y$ de $\mathcal{E}$ telles que pour toute flèche $Y \to B$, $X \to Y \to B$ soit une $\phi^{-1}(\mathcal{W})$-équivalence faible.

Pour se persuader du point (c), il suffit de voir que comme les fibrations triviales de $\mathcal{E}$ sont stables par images réciproques, $C(p)$ contient toutes les fibrations triviales, et ainsi, cela résulte du corollaire 1.30 et du point (a).

Définition 4.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée. Une flèche $X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est une *équivalence faible propre à droite* si pour toute fibration $Z \to Y$, le morphisme image réciproque $Z \times_Y X \to Z$ est une équivalence faible.

On dit qu'une catégorie de modèles fermée est *propre à droite* si toutes ses équivalences faibles sont des équivalences faibles propres à droite.

Dualement, on dit qu'une catégorie de modèles fermée $\mathcal{C}$ est *propre à gauche* si $\mathcal{C}^\circ$ est propre à droite.

Remarque 4.4. Toute équivalence faible propre à droite est une équivalence faible, car toute identité est une fibration.

Pour tout topos $\mathcal{E}$ et tout $\mathcal{E}$-localisateur accessible, la structure de catégorie de modèles fermée obtenue sur $\mathcal{E}$ est propre à gauche (cela résulte de 3.12 (a)).

Définition 4.5. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un $\mathcal{E}$-localisateur *propre* est un $\mathcal{E}$-localisateur accessible $\mathcal{W}$, tel que la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$, soit propre à droite.

Lemme 4.6. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, $(\mathcal{I}, S)$ une donnée homotopique sur $\mathcal{E}$. On considère une fibration naïve $p : X \to Y$, et un rétracte par déformation fort $i : Z \to Y$. Alors l'inclusion image réciproque $j : Z \times_Y X \to X$ est un rétracte par déformation fort.*

Démonstration. On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Comme i est un rétracte par déformation fort, par définition, il existe deux flèches $r : Y \to Z$ et $h : Y \otimes I \to Y$ telles que $ri = 1_Z$, $h\partial^0_Y = 1_Y$, $h\partial^1_Y = ir$, et $h(i \otimes 1_I) = \sigma_Y(i \otimes 1_I)$. On a les égalités $h(p \otimes 1_I)\partial^0_X = h\partial^0_Y p = 1_Y p = p$, $h(p \otimes 1_I)(j \otimes 1_I) = h(i \otimes 1_I)(q \otimes 1_I) = \sigma_Y(i \otimes 1_I)(q \otimes 1_I) = iq\sigma_{Z\times_Y X} = pj\sigma_{Z\times_Y X}$, et $j\sigma_{Z\times_Y X}\partial^0_{Z\times_Y X} = j$, ce qui permet de définir un morphisme $u : (Z \times_Y X) \otimes I \cup X \otimes \{0\} \to X$, en posant $u = (j\sigma_{Z\times_Y X}, 1_X)$, tel que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (Z \times_Y X) \otimes I \cup X \otimes \{0\} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ X \otimes I \arrow[r, "h(p\otimes 1_I)"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Or ce dernier admet un relèvement $k : X \otimes I \to X$, puisque p est une fibration naïve, la flèche verticale de gauche dans ce diagramme étant une extension anodine. On a alors les égalités $k(j \otimes 1_I) = j\sigma_{Z\times_Y X} = \sigma_X(j \otimes 1_I)$ et $k\partial^0_X = 1_X$. D'autre part, on a les égalités $pk\partial^1_X = h(p \otimes 1_I)\partial^1_X = h\partial^1_Y p = irp$. On a donc une unique flèche $s : X \to Z \times_Y X$ telle que $js = k\partial^1_X$, et $qs = rp$. En outre, on a $sj = 1_{Z\times_Y X}$, car $jsj =$

$k\partial^1_X j = k(j \otimes 1_I)\partial^1_{Z\times_Y X} = j\sigma_{Z\times_Y X}\partial^1_{Z\times_Y X} = j$, et $qsj = rpj = riq = q$. On a ainsi montré que j est un rétracte par déformation fort.

Lemme 4.7. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et S un petit ensemble de monomorphismes de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{W}$ le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par S. On a une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\mathcal{E}$. On note F_S l'ensemble des fibrations de but fibrant pour cette structure. Alors $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{E}$-localisateur propre si et seulement si $S \subset C(F_S)$.*

Démonstration. Il est évident que c'est une condition nécessaire.

Supposons que $S \subset C(F_S)$. On choisit la donnée homotopique $(\mathcal{L}, S)$ et un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ comme pour la démonstration de la proposition 3.9, ce qui définit une notion d'extensions anodines. On va procéder en plusieurs étapes.

(i) *Toute extension anodine est dans $C(F_S)$.*

On rappelle que le cylindre fonctoriel est donné par $X \mapsto X \times L$, où L est l'objet de Lawvere, et on a deux inclusion $\lambda^e : * \to L$ pour $e = 0, 1$ (voir 2.5). Les morphismes λ^e sont des rétractes par déformation forts au sens de la $\mathcal{L}$-homotopie (cela résulte du lemme 2.30, ou encore se vérifie directement en utilisant les propriétés de relèvement adéquates), et donc pour tout objet X de $\mathcal{E}$, les morphismes $\lambda^e_X := 1_X \times \lambda^e : X \to X \times L$ sont des rétractes par déformation forts. Le lemme 4.6 montre que les flèches λ^e_X sont des équivalences faibles propres à droite, et donc des éléments de $C(F_S)$. On en déduit que pour toute flèche $i : X \to Y$ élément de $C(F_S)$, $i \times 1_L : X \times L \to Y \times L$ est un élément de $C(F_S)$. En effet, on a $i, \lambda^e_Y \in C(F_S)$, et donc $\lambda^e_Y i \in C(F_S)$ par la proposition 4.2, et comme $\lambda^e_Y i = (i \times 1_L)\lambda^e_X$, λ^e_X étant dans $C(F_S)$, la proposition 4.2 montre encore que $i \times 1_L$ est dans $C(F_S)$. Il est aussi immédiat que $C(F_S)$ est stable par sommes. On en déduit (toujours en utilisant la proposition 4.2) que $\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M}) \subset C(F_S)$, où $\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M})$ est le petit ensemble d'extensions anodines construit au paragraphe 2, car $S \subset C(F_S)$ par hypothèse. Comme l'argument du petit objet montre que toute extension anodine est un rétracte d'un composé transfini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M})$, la proposition 4.2 permet de conclure.

(ii) *Toute cofibration triviale est une équivalence faible propre à droite.*

Soit $i : X \to Y$ une cofibration triviale. On considère une cofibration triviale $j : Y \to Z$ de but fibrant. Alors ji est aussi une cofibration triviale de but fibrant, et donc ji et j sont des extensions anodines par le corollaire 2.27. Si $p : E \to Y$ est une fibration, on factorise jp en $jp = qk$, où $k : E \to E_0$ est une cofibration triviale, et où $q : E_0 \to Z$

est une fibration. On forme alors le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "l"] \arrow[d, "r"'] & E_0 \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Z \end{tikzcd} \quad ,$$

et on note $u = (p, k) : E \to E_1$ la flèche canonique. Comme $q \in F_S$, et $j \in C(F_S)$, la flèche l est une cofibration triviale, et comme k est une cofibration triviale, on en déduit que u est une cofibration triviale. Par conséquent, p est un rétracte de r, car $p = ru$, ce qui permet d'appliquer le lemme du rétracte. Par fonctorialité, la flèche $X \times_Y E \to E$ est un rétracte de $X \times_Y E_1 \to E_1$, et donc il suffit de montrer que cette dernière est une équivalence faible. Or ji et j sont des extensions anodines, et donc en vertu de (i), ji et j sont des éléments de $C(F_S)$. En outre, on a des carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X \times_Y E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, "l"] \arrow[d, "r"] & E_0 \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \arrow[r, "j"'] & Z \end{tikzcd} \quad ,$$

ce qui montre que la flèche composée $X \times_Y E_1 \to E_1 \to E_0$ est une équivalence faible, ainsi que l, et permet de conclure.

Le lemme résulte donc de (ii) et du point (c) de la proposition 4.2.

Le résultat qui suit est une légère amélioration du précédent, et sa démonstration s'inspire d'un cas particulier traité dans un appendice de [10], lequel apparaît en corollaire peu après (4.11).

Théorème 4.8. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et S un petit ensemble de flèches de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{W}(S)$ le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par S. Alors $\mathcal{W}(S)$ est propre si et seulement si pour tout élément $f : X \to Y$ de S, pour toute fibration de but fibrant $p : E \to B$, et pour toute flèche $u : Y \to B$, le morphisme $g : X \times_B E \to Y \times_B E$, image réciproque de f par p, est une équivalence faible.*

Démonstration. Il est encore une fois évident que c'est une condition nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, on va montrer qu'on peut toujours se ramener au cas où S est constitué uniquement de monomorphismes de $\mathcal{E}$, ce qui permettra de conclure en vertu du lemme ci-dessus.

Soit $f : X \to Y$ un élément de S. On choisit une factorisation de f en $f = pi$ où $i : X \to Z$ est un monomorphisme, et où $p : Z \to Y$ est une fibration triviale. On se donne enfin une fibration de but fibrant $q : E \to B$, et on veut montrer que $i \in C(q)$. On se donc donne une flèche $u : Z \to B$. En vertu de la proposition 2.16, p est le dual d'un rétracte par déformation fort au sens du cylindre de Lawvere $\mathcal{L}$ (cf.

2.5). En particulier, il existe une section s de p, et une $\mathcal{L}$-homotopie de 1_Z vers sp. Comme la relation d'homotopie est compatible à la composition, il existe un morphisme $h : Z \times L \to B$ tel que $h\lambda^0_Z = u$ et $h\lambda^1_Z = usp$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda^0_X"] \arrow[d, "i"'] & X \times L \arrow[d, "i\times 1_L"'] & X \arrow[l, "\lambda^1_X"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
Z \arrow[r, "\lambda^0_Z"'] \arrow[dr, "u"'] & Z \times L \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[l, "\lambda^1_Z"] \arrow[d, "p"] \\
& B & Y \arrow[l, "us"]
\end{tikzcd}.$$

Si $v : C \to B$ est une flèche de $\mathcal{E}$, on notera C_v le produit fibré de C et E au-dessus de B (cette notation n'étant certes pas destinée à la postérité). Il vient alors un diagramme commutatif, induit par le précédent,

$$\begin{tikzcd}
X_{ui} \arrow[r] \arrow[d] & (X \times L)_{h(i\times 1_L)} \arrow[d] & X_{usf} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Z_u \arrow[r] & (Z \times L)_h & Z_{usp} \arrow[l] \arrow[r] & Y_{us}
\end{tikzcd},$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont des équivalences faibles, car les flèches du type λ^e_X sont des rétractes par déformation forts, ce qui permet d'appliquer le lemme 4.6, et les fibrations triviales sont stables par images réciproques. Enfin, f est dans $C(q)$ par hypothèse, et donc induit une équivalence faible $X_{usf} \to Y_{us}$. On en déduit que i induit une équivalence faible $X_{usf} \to Z_{usp}$. Par conséquent, $X_{ui} \to Z_u$ est une équivalence faible, ce qui montre que $i \in C(q)$, et achève ainsi la démonstration.

Remarque 4.9. Une spécialisation immédiate du théorème ci-dessus est le cas $S = \varnothing$. Autrement-dit, la structure de catégorie de modèles fermée minimale sur $\mathcal{E}$ (voir le théorème 3.9) est propre.

Corollaire 4.10. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. On considère un petit ensemble I, et une famille $\mathcal{W}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{E}$-localisateurs propres. Alors le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par les $\mathcal{W}_i$ est propre.*

Démonstration. Pour chaque $i \in I$, on choisit un petit ensemble S_i de flèches de $\mathcal{E}$ qui engendre $\mathcal{W}_i$. On pose $S = \cup_i S_i$, et alors $\mathcal{W}(S)$ est le $\mathcal{E}$-localisateur engendré par les $\mathcal{W}_i$, et il est clair qu'il est accessible. Le fait que $\mathcal{W}(S)$ soit propre résulte du théorème ci-dessus et du fait que pour tout i, toute fibration au sens de $\mathcal{W}$ en est une au sens de $\mathcal{W}_i$.

Corollaire 4.11. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Si X_i, $i \in I$ est une petite famille d'objets de $\mathcal{E}$, alors le plus petit $\mathcal{E}$-localisateur contenant les projections $Z \times X_i \to Z$ pour tout i et pour tout Z est propre.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 3.13, du théorème 4.8, et du fait que pour tout morphisme $Y \to Z$ de $\mathcal{E}$, et pout tout $i \in I$, le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} X_i \times Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X_i \times Z \arrow[r] & Z \end{tikzcd} .$$

Remarque 4.12. Soit $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On note $\mathcal{W}_{\mathrm{H}\mathbf{Q}}$ la classe des flèches induisant un isomorphisme dans les groupes d'homologie singulière (à coefficients rationnels). Il résulte de Bousfield [2] que $\mathcal{W}_{\mathrm{H}\mathbf{Q}}$ est un $\widehat{\mathbf{\Delta}}$-localisateur accessible, et on peut montrer que ce dernier n'est pas propre (en raison d'obstructions au niveau du groupe fondamental).

5. Localisateurs d'Illusie

Notations 5.1. Si $\mathcal{E}$ est un topos, et si $\mathcal{W}$ est une partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}$, pour chaque petite catégorie A, on notera $\mathcal{E}^A$ la catégorie des foncteurs de A vers $\mathcal{E}$, et $\mathcal{W}^A$ la partie de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{E}^A$ formée des flèches $X \to Y$ telles que pour tout objet a de A, le morphisme $X(a) \to Y(a)$ soit un élément de $\mathcal{W}$.

5.2. On note $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes, *i.e.* la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés, dont les objets sont les ensembles $\Delta_n = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, munis de l'ordre naturel. Pour $n \geq 0$, on note $\partial\Delta_n \in \mathsf{Ob}\,\widehat{\mathbf{\Delta}}$ le bord de Δ_n, *i.e.* le sous-préfaisceau de Δ_n obtenu comme la réunion des faces de Δ_n (voir [4]).

Soit $\mathcal{E}$ un topos. On note $\mathbf{s}\mathcal{E}$ la catégorie des objets simpliciaux de $\mathcal{E}$, *i.e.* $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$. On définit

$$\mathsf{hom} : \widehat{\mathbf{\Delta}}^{\circ} \times \mathbf{s}\mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

comme étant l'unique foncteur qui commute aux petites limites projectives argument par argument, tel que pour tout objet simplicial X de $\mathcal{E}$, et tout entier $n \geq 0$, $\mathsf{hom}(\Delta_n, X) = X_n$.

Définition 5.3. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Un morphisme $X \to Y$ de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est un *hyper-recouvrement* si pour tout $n \geq 0$, le morphisme

$$X_n \to Y_n \times_{\mathsf{hom}(\partial\Delta_n, Y)} \mathsf{hom}(\partial\Delta_n, X)$$

est un épimorphisme de $\mathcal{E}$.

On note $HR(\mathcal{E})$ la classe des hyper-recouvrements de $\mathbf{s}\mathcal{E}$.

Remarque 5.4. On vérifie facilement que $HR(\mathcal{E})$ est stable par compositions et par images réciproques.

Si $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est un morphisme de topos, et si $\phi^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ désigne le foncteur image inverse associé, on remarque que pour tout ensemble simplicial fini K et tout objet X de $\mathbf{s}\mathcal{F}$, on a un isomorphisme canonique $\mathsf{hom}(K,\phi^*X) \simeq \phi^*\,\mathsf{hom}(K,X)$, car ϕ^* est exact à gauche. Comme ϕ^* commute aux petites limites inductives, il respecte en outre les épimorphismes. On en déduit que $\phi^*HR(\mathcal{F}) \subset HR(\mathcal{E})$. D'autre part, pour toute petite catégorie I, on a $HR(\mathcal{E}^I) = HR(\mathcal{E})^I$. On en déduit que $HR(\mathcal{E})$ est stable par limites inductives filtrantes, car si I est une petite catégorie filtrante, le foncteur limite inductive $\mathcal{E}^I \to \mathcal{E}$ est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^I$ (ce qui est une manière alambiquée de dire que les limites inductives filtrantes sont exactes dans $\mathcal{E}$). Le lecteur est invité à consulter [6, exposé V] ou [11] pour plus de détails.

Définition 5.5. Soit $\mathcal{E}$ un topos. Le *s$\mathcal{E}$-localisateur d'Illusie*, noté $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$, est le s$\mathcal{E}$-localisateur engendré par $HR(\mathcal{E})$ et par les projections $X \times \Delta_1 \to X$, $X \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{s}\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{W}_{\mathcal{E}}$ seront appelés les *équivalences faibles d'Illusie.*

Proposition 5.6. *Soient* $(\mathcal{M},\mathcal{W},\mathsf{Fib},\mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèles fermée engendrée par un couple* (I,J)*, et un foncteur* $G:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ *admettant un adjoint à droite* $D:\mathcal{M}'\to\mathcal{M}$*. On suppose les conditions suivantes vérifiées.*

(i) La catégorie $\mathcal{M}'$ admet des petites limites projectives et inductives.

(ii) Les ensembles GI et GJ permettent l'argument du petit objet.

(iii) $D(l(r(GJ))) \subset \mathcal{W}$.

On pose $\mathcal{W}' = D^{-1}\mathcal{W}$, $\mathsf{Fib}' = D^{-1}\,\mathsf{Fib}$, *et* $\mathsf{Cof}' = l(\mathsf{Fib}'\cap\mathcal{W}')$*. Alors le quadruplet* $(\mathcal{M}',\mathcal{W}',\mathsf{Fib}',\mathsf{Cof}')$ *est une catégorie de modèles fermée engendrée par le couple* (GI,GJ)*.*

Démonstration. Voir [3, théorème 3.3].

Corollaire 5.7. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur accessible, et I une petite catégorie. Alors $\mathcal{E}^I$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les flèches $X \to Y$ telles que pour tout objet i de I, le morphisme $X(i) \to Y(i)$ soit une équivalence faible (resp. une fibration) de $\mathcal{E}$ au sens de $\mathcal{W}$.*

Démonstration. Lorsque I est une catégorie discrète, cela résulte du corollaire 3.17. Dans le cas général, on considère l'ensemble $\mathsf{Ob}\,I$ comme une catégorie discrète, et on note $u:\mathsf{Ob}\,I \to I$ le foncteur d'inclusion. Il induit un foncteur image inverse $u^*:\mathcal{E}^I \to \mathcal{E}^{\mathsf{Ob}\,I} = \prod_I \mathcal{E}$, lequel admet un adjoint à gauche $u_!:\prod_I \mathcal{E} \to \mathcal{E}^I$. On vérifie facilement que ce couple de foncteur adjoints $(u_!,\ u^*)$ vérifie les conditions de la proposition ci-dessus, et qu'on obtient de la sorte la structure de catégorie de modèles fermée escomptée.

Remarque 5.8. Soient $\mathcal{E}$ un topos, $\mathcal{W}$ un $\mathcal{E}$-localisateur accessible, et I une petite catégorie. On choisit une résolution cofibrante fonctorielle

$Q_I \to 1_{\mathcal{E}^I}$ dans $\mathcal{E}^I$ au sens de la structure de catégorie de modèles fermée ci-dessus. On remarque que comme le foncteur diagonal $\delta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^I$ respecte les fibrations, son adjoint à gauche, le foncteur limite inductive $\varinjlim : \mathcal{E}^I \to \mathcal{E}$, respecte les cofibrations triviales. En vertu du lemme de Ken Brown [9, lemme 1.1.12], ce dernier respecte donc les équivalences faibles entre objets cofibrants, et on en conclut que le foncteur $\varinjlim Q_I : \mathcal{E}^I \to \mathcal{E}$ respecte les équivalences faibles. On a d'autre part un morphisme de foncteurs $\varinjlim Q_I \to \varinjlim$, et il est facile de vérifier que celui-ci est une équivalence faible si et seulement si le foncteur $\varinjlim$ respecte les équivalences faibles. Si c'est le cas, comme la notion de cofibration dans $\mathcal{E}^I$ est indépendante du $\mathcal{E}$-localisateur choisi, on en déduit que tout $\mathcal{E}$-localisateur contenant $\mathcal{W}$ est aussi stable par limites inductives de type I.

Proposition 5.9. *Soit $\mathcal{E}$ un topos. Alors il existe un cardinal α tel que pour tout ensemble ordonné α-filtrant I, tout $\mathcal{E}$-localisateur soit stable par par limites inductives de type I.*

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ le $\mathcal{E}$-localisateur minimal. On considère la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{E}$ associée à $\mathcal{W}$ par le théorème 3.9, et on note $l : 1_{\mathcal{E}} \to L$ une résolution fibrante fonctorielle, construite avec l'argument du petit objet. On fixe une fois pour toutes un modèle cellulaire $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$. On choisit enfin un cardinal α vérifiant les conditions suivantes :

(a) le foncteur L est α-accessible ;

(b) pour tout élément $A \to B$ de $\mathcal{M}$, les objets A et B sont α-accessibles.

Considérons un ensemble ordonné α-fitrant I, et la structure de catégorie de modèles fermée associée sur $\mathcal{E}^I$ par la proposition 5.7. On vérifie facilement grâce à la condition (b) que le foncteur $\varinjlim : \mathcal{E}^I \to \mathcal{E}$ respecte les fibrations triviales, et donc en vertu du lemme de Ken Brown, qu'il respecte les équivalences faibles entre objets fibrants. La condition (a) implique alors que le foncteur $\varinjlim$ respecte les équivalences faibles, ce qui achève la démonstration en vertu de la remarque ci-dessus.

Lemme 5.10. *Soient $\mathcal{E}$ un topos, et α un cardinal assez grand. Alors pour tout épimorphisme $p : X \to Y$ de $\mathcal{E}$, de but α-accessible, il existe un sous-objet α-accessible X' de X, tel que la restriction de p à X' induise un épimorphisme $X' \to Y$.*

Démonstration. Si α est assez grand, on peut supposer que tout objet de $\mathcal{E}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles. Soit $p : X \to Y$ un épimorphisme de but α-accessible. Notons I l'ensemble des sous-objets α-accessibles de X ordonné par l'inclusion, et $\psi : I \to \mathcal{E}$ le foncteur $X' \mapsto p(X')$. Comme p est un épimorphisme, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim \psi \simeq Y$. On vérifie aussitôt que comme I est α-filtrant, l'α-accessibilité de Y permet de conclure.

Lemme 5.11. *Soient $\mathcal{E}$ un topos et α un cardinal assez grand. On considère un hyper-recouvrement $p : X \to Y$ dans $\mathbf{s}\mathcal{E}$, un sous-objet α-accessible X'' de X, et on pose $Y' = p(X'')$. Alors il existe un sous-objet α-accessible X' de X, contenant X'', tel que $Y' = p(X')$, et tel que la restriction de p à X' induise un hyper-recouvrement $X' \to Y'$.*

Démonstration. Si α est assez grand, on peut supposer qu'un objet X de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est α-accessible si et seulement si pour tout $n \geq 0$, X_n est α-accessible dans $\mathcal{E}$. On peut aussi demander que si X est un objet simplicial quelconque de $\mathcal{E}$, et si on s'est donné pour chaque $n \geq 0$ un sous-objet α-accessible T_n de X_n, alors le sous-objet de X engendré par les T_n est α-accessible (tout ceci se déduit de la proposition 1.18).

On va construire une suite de sous-objets α-accessibles de X,

$$X'' \subset Z^{(0)} \subset \ldots \subset Z^{(n-1)} \subset Z^{(n)} \subset \ldots \subset p^{-1}(Y') \ ,$$

telle que pour tout $n \geq 0$, et pour tout k, $0 \leq k \leq n$, la flèche

$$Z_k^{(n)} \to Y'_k \times_{\mathsf{hom}(\partial\Delta_k, Y')} \mathsf{hom}(\partial\Delta_k, Z^{(n)})$$

soit un épimorphisme.

Comme $HR(\mathcal{E})$ est stable par images réciproques (cf. 5.4) on peut supposer que $Y' = Y$. Comme p est un hyper-recouvrement, en particulier, le morphisme $X_0 \to Y_0$ est un épimorphisme, et donc en vertu du lemme 5.10, il existe un sous-objet α-accessible X'_0 de X_0, tel que $X'_0 \to Y_0$ soit un épimorphisme. On note $Z^{(0)}$ le sous-objet de X engendré par X'_0 et X''. Soit à présent $n > 0$, et supposons qu'on ait construit $Z^{(n-1)}$. On forme alors le carré cartésien suivant dans $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & X_n \arrow[d] \\ Y_n \times_{\mathsf{hom}(\partial\Delta_n, Y)} \mathsf{hom}(\partial\Delta_n, Z^{(n-1)}) \arrow[r] & Y_n \times_{\mathsf{hom}(\partial\Delta_n, Y)} \mathsf{hom}(\partial\Delta_n, X) \end{tikzcd}$$

La flèche q ci-dessus est un épimorphisme de but α-accessible (grâce à la proposition 1.19 et au fait que $\partial\Delta_n$ est une limite inductive finie de simplexes standard), et donc, par le lemme 5.10, il existe un sous-objet α-accessible T' de T tel que la restriction de q à T' soit un épimorphisme. On définit $Z^{(n)}$ comme le sous-objet de X engendré par $Z^{(n-1)}$ et par T'. Pour achever cette démonstration, il suffit à présent de poser $X' = \cup_{n\geq 0} Z^{(n)}$.

Théorème 5.12 (Joyal). *Pour tout topos $\mathcal{E}$, le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur d'Illusie est propre. Autrement-dit, la catégorie $\mathbf{s}\mathcal{E}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant propre, dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'Illusie et dont les cofibrations sont les monomorphismes de $\mathbf{s}\mathcal{E}$.*

Démonstration. Si α est un cardinal, on note $HR(\mathcal{E})_\alpha$ la classe des hyper-recouvrements de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ dont la source et le but sont α-accessibles.

Pour α assez grand, tout hyper-recouvrement est une limite inductive indexée par un ensemble ordonné α-filtrant d'éléments de $HR(\mathcal{E})_\alpha$ (cela résulte du lemme 5.11, du fait que tout hyper-recouvrement est un épimorphisme, et que pour α assez grand, tout objet de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est la réunion α-filtrante de ses sous-objets α-accessibles). Soient $\mathcal{W}_\alpha$ le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par $HR(\mathcal{E})_\alpha$, et $\mathcal{W}$ le $\mathbf{s}\mathcal{E}$-localisateur engendré par $HR(\mathcal{E})$. La proposition 5.9 et ce qui précède et impliquent que $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}$, pour α assez grand. Comme $HR(\mathcal{E})$ est stable par images réciproques (5.4), le théorème 4.8 montre que $\mathcal{W}$ est propre. Les corollaires 4.10 et 4.11 achèvent ainsi la démonstration.

Proposition 5.13. *Pour tout morphisme de topos $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, si $\phi^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ désigne le foncteur image inverse, on a $\phi^*\mathcal{W}_\mathcal{F} \subset \mathcal{W}_\mathcal{E}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la remarque 5.4.

Remarque 5.14. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos ponctuel (*i.e.* est équivalent à la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles), l'ensemble d'inclusions $\{\partial\Delta_n \to \Delta_n \mid n \geq 0\}$ est un modèle cellulaire de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ (voir [4, chap. III, 3.2]). On en déduit que dans ce cas, les hyper-recouvrements de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ sont simplement les fibrations triviales. On obtient une donnée homotopique élémentaire $\mathcal{I}$ sur $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ en considérant le cylindre défini par $X \mapsto X \times \Delta_1$, et on vérifie par des méthodes standard que les inclusions

$$\partial\Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{\varepsilon\} \to \Delta_n \times \Delta_1 \ , \ n \geq 0 \ , \ \varepsilon = 0, 1$$

engendrent les extensions anodines associées. La proposition 3.8 montre alors que la classe des équivalences faibles simpliciales, à savoir $\mathcal{W}_{\mathcal{E}ns}$, est exactement la classe des équivalences faibles construites dans [4].

Proposition 5.15. *Soit $\mathcal{E}$ un topos ayant assez de points. Alors un morphisme $X \to Y$ de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ est une équivalence faible d'Illusie si et seulement si pour tout point $p : \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, $p^*X \to p^*Y$ est une équivalence faible simpliciale.*

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ la classe des flèches $X \to Y$ de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ telles que pour tout point p de $\mathcal{E}$, $p^*X \to p^*Y$ soit une équivalence faible simpliciale. La proposition 5.13 implique que $\mathcal{W}_\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$. Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de vérifier que si $q : X \to Y$ est une fibration de but fibrant de $\mathbf{s}\mathcal{E}$ au sens de $\mathcal{W}_\mathcal{E}$, alors $q \in \mathcal{W} \Rightarrow q \in \mathcal{W}_\mathcal{E}$ (grâce à des factorisations adéquates). Or si q est une telle flèche de $\mathbf{s}\mathcal{E}$, le même type de considérations que dans la remarque 5.4 montrent que pour tout point p de $\mathcal{E}$, p^*q est une fibration naïve de but fibrant (au sens de la donnée homotopique élémentaire $\mathcal{I}$ définie dans la remarque ci-dessus), et donc est une fibration. Par conséquent, $q \in \mathcal{W}$ si et seulement si pour tout point p de $\mathcal{E}$, p^*q est une fibration triviale (*i.e.* un hyper-recouvrement, en vertu de la remarque ci-dessus). Comme $\mathcal{E}$ a assez de points par hypothèse, cela équivaut encore à demander que

q soit un hyper-recouvrement (grâce à la remarque 5.4). Cela montre l'autre inclusion, et donc que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathcal{E}}$.

Remarque 5.16. D'une manière générale, pour tout topos, la classe des équivalences faibles d'Illusie s'identifie à celle des équivalences faibles locales au sens de [11] (cela se déduit de [11, remarque 28]).

Références

[1] C. Berger. A cellular nerve for higher categories. Prépublication.

[2] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14 :133–150, 1975.

[3] S.E. Crans. Quillen closed model structures for sheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 101 :35–57, 1995.

[4] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik, Band 35. Springer-Verlag, 1967.

[5] A. Grothendieck. *Pursuing stacks*, 1983. Manuscrit.

[6] A. Grothendieck, M. Artin, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305. Springer-Verlag, 1972-1973. (SGA 4).

[7] P.S. Hirschhorn. *Localization of model categories.* En préparation.

[8] A. Hirschowitz, C. Simpson. Descente pour les n-champs. Prépublication.

[9] M. Hovey. *Model Categories.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63. American Mathematical Society, 1999.

[10] J. F. Jardine. Motivic symmetric spectra. *Doc. Math.*, 5 :445–552, 2000.

[11] J.F. Jardine. Boolean localization in practice. *Doc. Math.*, 1(13) :245–275, 1996.

[12] F. Lárusson. Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov's Oka principle. Prépublication.

[13] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext. Springer-Verlag, 1994.

[14] F. Morel. *Théorie homotopique des schémas.* Astérisque 256. Société Mathématique de France, 1999.

[15] F. Morel, V. Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-Homotopy Theory of Schemes. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, 90 :45–143, 1999.

[16] D. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lecture Notes in Mathematics 43. Springer-Verlag, 1967.