LE LOCALISATEUR FONDAMENTAL MINIMAL

DENIS-CHARLES CISINSKI

Résumé. Dans *Pursuing stacks* [8], Grothendieck dégage la notion de localisateur fondamental : ce sont des classes d'équivalences faibles de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories ayant de bonnes propriétés de descente. Par exemple les équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ (induites par le foncteur nerf) forment un localisateur fondamental, et à toute théorie cohomologique sur $\mathcal{C}at$ (en un sens adéquat) est canoniquement associé un localisateur fondamental. On démontre que les équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ forment le plus petit localisateur fondamental, comme cela a été conjecturé par Grothendieck.

Table des matières

Introduction

Cet article forme le deuxième volet d'une série de trois. Dans le premier [3] (logiquement indépendant de celui-ci), la notion de dérivateur a été introduite, et il a été démontré que toute catégorie de modèles au sens de Quillen définit un tel objet. Les présentes notes sont elles consacrées à différentes caractérisations algébrico-combinatoires de la théorie de l'homotopie des petites catégories. Le dernier [4] utilise ces descriptions pour caractériser la théorie de l'homotopie des CW-complexes par une propriété universelle (en termes de dérivateurs), ce qui permet de répondre à quelques questions posées par Hovey dans [10].

Le fait que la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories modèle tous les types d'homotopie est bien connu depuis plusieurs décennies (cf. [11, 15]). Un des intérêts de ce modèle se retrouve dans le formalisme de descente tel qu'il est énoncé dans les théorèmes A et B de Quillen [14], directement lié à l'intuition que nous fournit

Date: 13 septembre 2002.

la cohomologie des (pré)faisceaux. Dans *Pursuing stacks* [8], ce sont ces propriétés formelles qui retiennent l'attention de Grothendieck, lorsqu'il cherche à dégager des conditions suffisantes pour qu'une catégorie modèle les types d'homotopie. Il en a dégagé la notion de *localisateur fondamental* par un petit ensemble simple d'axiomes : ce sont des parties $\mathcal{W} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$ telles que la catégorie localisée $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ se comporte formellement comme la catégorie homotopique classique Hot des CW-complexes à homotopie près. Toute théorie cohomologique définie sur la catégorie des petites catégories donne lieu un localisateur fondamental (par exemple la cohomologie à coefficients en A-modules pour un anneau A, ou bien à coefficients localement constants, à coefficients localement constants profinis, *etc*). En particulier, les équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ (*i.e.* les foncteurs induisant une équivalence d'homotopie entre les espaces classifiants correspondants) forment un localisateur fondamental, noté ici $\mathcal{W}_\infty$. La catégorie localisée $\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$ est donc dans ce cas équivalente à celle des CW-complexes à homotopie près. Le but principal de cet article est de prouver l'énoncé ci-dessous (2.2.11).

Conjecture (Grothendieck)**.** *Le localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$ est le localisateur fondamental minimal. Autrement dit, $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental, et tout localisateur fondamental contient $\mathcal{W}_\infty$.*

Outre une description algébrico-combinatoire élémentaire de la théorie de l'homotopie classique, ce résultat est une interprétation consistante de l'intuition suivante : tout objet de Hot est localement asphérique dans le sens où il est une colimite homotopique d'un diagramme formé d'espaces ayant le type d'homotopie du point, et la théorie homotopique des CW-complexes est universelle pour cette propriété (ce qui est à rapprocher de "l'hypothèse inspiratrice", laquelle affirme que la sous-catégorie pleine des endofoncteurs de Hot formée des autoéquivalences est équivalente à la catégorie finale [8, 28, p. 30]). Le papier [4] se place dans un cadre permettant de donner un sens précis à cette affirmation, puis de la démontrer, illustrant de la sorte la force de cette conjecture. D'un point de vue plus technique, cela signifie aussi que (modulo des questions ensemblistes) pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, la catégorie localisée $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ est une localisation de Bousfield à gauche de Hot (par exemple au sens de [9]).

Voici un plan grossier de ce texte. Ces notes s'ouvrent sur les propriétés formelles résultant des axiomes de Grothendieck, en vue de la démonstration de la conjecture, les méthodes invoquées étant directement tirées de [8]. Une autre partie des ingrédients de démonstration comporte des outils simpliciaux classiques, rappelés au paragraphe 2.1 (où on démontre au passage que $\mathcal{W}_\infty$ est bien un localisateur fondamental (2.1.13)). Nous avons par ailleurs dégagé une autre caractérisation de $\mathcal{W}_\infty$, non pas en termes de minimalité, mais en tant que localisateur fondamental satisfaisant à l'énoncé du théorème B de Quillen (2.3.6).

Le présent travail a été exposé au printemps 2001, dans le cadre du groupe de travail *Algèbre et topologie homotopiques*, à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Je me dois enfin de remercier Georges Maltsiniotis, pour ses encouragements, et pour m'avoir initié au "yoga de la *Poursuite*".

1. L'axiomatique de Grothendieck

1.1. **Localisateurs fondamentaux.** La théorie des localisateurs fondamentaux telle qu'elle est exposée ici est entièrement due à Grothendieck [8]. Un exposé plus complet en est donné dans [12].

1.1.1. Soient $\mathcal{M}$ une catégorie et $\mathcal{W} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{M}$ un ensemble de flèches de $\mathcal{M}$. On appellera $\mathcal{W}$-*équivalences*, ou bien, si cela n'est pas ambigu, *équivalence faibles*, les éléments de $\mathcal{W}$.

On dit que $\mathcal{W}$ est *faiblement saturée* si les axiomes suivants sont vérifiés.

FS1 Les identités sont dans $\mathcal{W}$.

FS2 Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont des équivalences faibles, il en est de même de la troisième.

FS3 Si $i : X \longrightarrow Y$ et $r : Y \longrightarrow X$ sont deux flèches de $\mathcal{M}$ telles que $ri = 1_X$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors r est une équivalence faible.

1.1.2. On désigne par $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, et on note e la catégorie finale (*i.e.* la catégorie ayant un unique objet et comme seul morphisme l'identité).

Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Si b est un objet de B, on note A/b la catégorie dont les objets sont les couples (a, f), a étant un objet de A et $f\ : u(a) \longrightarrow b$ un morphisme de B, et dont les flèches $\alpha\ : (a, f) \longrightarrow (a', f')$ sont les morphismes $\alpha\ : a \longrightarrow a'$ de A satisfaisant l'équation $f'u(\alpha) = f$. On définit un foncteur d'oubli évident

$$A/b \longrightarrow A \quad , \qquad (a, f) \longmapsto a \ ,$$

et un foncteur

$$u/b\ : A/b \longrightarrow B/b \quad , \qquad (a, f) \longmapsto (u(a), f) \ .$$

On vérifie enfin aussitôt que le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est cartésien dans $\mathcal{C}at$. Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, pour tout objet c de C, on obtient ainsi canoniquement un morphisme au-dessus de C/c

$$u/c\ : A/c \longrightarrow B/c \quad , \qquad (a, f) \longmapsto (u(a), f) \ .$$

Pour une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$ fixée, on introduit la terminologie suivante. Une petite catégorie A est *asphérique* si le morphisme canonique $A \longrightarrow e$ est une équivalence faible. Un foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ est *asphérique* si pour tout objet b

de B, la catégorie A/b est asphérique. Un C-morphisme $u : A \longrightarrow B$, c'est-à-dire un morphisme de $\mathcal{C}at/C$ de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est *asphérique au-dessus de* C si c'est une équivalence faible localement au-dessus de C, *i.e.* si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c \ : A/c \longrightarrow B/c$ est une équivalence faible.

Définition 1.1.3 (Grothendieck)**.** Un *localisateur fondamental* est une partie $\mathcal{W} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$ satisfaisant les axiomes suivants.

LF1 La partie $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

LF2 Toute petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

LF3 Tout morphisme asphérique au-dessus d'une petite catégorie est une équivalence faible.

Remarque 1.1.4. L'axiome LF3 est une version relative de l'énoncé de [14, théorème A] : si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur asphérique, il est *a fortiori* asphérique au-dessus de B, et par conséquent est une équivalence faible.

On fixe une fois pour toute (dans cette section) un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Proposition 1.1.5. *Les équivalences faibles sont stables par petites sommes.*

Démonstration. Soient I un petit ensemble, et $u_i \ : A_i \longrightarrow B_i$, $i \in I$, une famille d'équivalences faibles indexées par I. On obtient le triangle commutatif canonique suivant dans $\mathcal{C}at$ (I étant vu comme une catégorie discrète).

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \,\in\, I} A_i \arrow[rr, "\coprod_{i \,\in\, I} u_i"] \arrow[dr] & & \coprod_{i \,\in\, I} B_i \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Les identifications $(\coprod_{i \,\in\, I} A_i)/i \simeq A_i$ permettent de constater que le foncteur $\coprod_{i \,\in\, I} u_i$ est asphérique au-dessus de I, ce qui prouve la proposition. $\square$

Lemme 1.1.6. *Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors pour toute petite catégorie B, la projection $A \times B \longrightarrow B$ est asphérique.*

Démonstration. Pour tout objet b de B, la catégorie B/b admet $(b, 1_b)$ comme objet final, et on a un isomorphisme canonique $(A \times B)/b \simeq A \times B/b$. Or on vérifie aussitôt que $A \times B/b$ admet un objet final et donc est asphérique. $\square$

Proposition 1.1.7. *Les équivalences faibles sont stables par produits finis.*

Démonstration. Soient $u \ : A \longrightarrow B$ une équivalence faible et C une petite catégorie. Pour montrer que le foncteur $u \times 1_C$ est une équivalence faible (ce qui implique l'énoncé car les équivalences faibles sont en particulier stables par composition), il suffit de montrer que c'est un morphisme asphérique au-dessus de C (*via* les projections canoniques sur C). Or pour tout objet c de C, le morphisme

$(u\times 1_C)/c$ s'identifie au foncteur produit $u\times 1_{C/c}$. On a donc le carré commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} A\times C/c \arrow[r, "u\times 1_{C/c}"] \arrow[d] & B\times C/c \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

Or la catégorie C/c admet $(c, 1_c)$ comme objet final, et donc en vertu du lemme ci-dessus, les flèches verticales sont des équivalences faibles. L'assertion résulte à présent directement de l'axiome FS2. $\square$

1.1.8. Soient A et B sont deux petites catégories, et deux foncteurs u et v de A vers B. On dit que u est *homotope à* v s'il existe un morphisme de foncteurs de u vers v, ou de manière équivalente s'il existe un foncteur $h\ : A\times\Delta_1 \longrightarrow B$ (Δ_1 désignant la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0<1\}$) tel que $h|_{A\times\{0\}}\simeq u$ et $h|_{A\times\{1\}}\simeq v$. En utilisant la proposition ci-dessus et le fait que la catégorie Δ_1 admet 1 comme objet final, l'énoncé suivant devient un exercice facile.

Proposition 1.1.9. *Tout foncteur homotope à une équivalence faible est une équivalence faible.*

Corollaire 1.1.10. *Tout foncteur admettant un adjoint à gauche ou à droite est une équivalence faible. En particulier, toute équivalence de catégories est une équivalence faible.*

Corollaire 1.1.11. *Toute petite catégorie admettant un objet initial est asphérique.*

1.1.12. L'énoncé 1.1.7 peut être considéré comme un cas particulier d'une situation plus générale faisant intervenir la notion de catégorie (co-)fibrée. On dira qu'un foncteur $X \longrightarrow Y$ est une *fibration* (resp. une *cofibration*) s'il fait de X une catégorie fibrée (resp. cofibrée) sur Y. Nous renvoyons le lecteur par exemple à [7, exposé VI] pour ces notions. Les seules propriétés que nous utiliserons sont les suivantes :

- Un foncteur $p\ : X \longrightarrow Y$ est une cofibration si et seulement si le foncteur $p^\circ : X^\circ \longrightarrow Y^\circ$ est une fibration (X° désignant la catégorie opposée à X).
- Les cofibrations sont stables par composition et par images réciproques.
- Si $p : X \longrightarrow Y$ est une cofibration, alors pour tout objet y de Y, le foncteur canonique (X_y désignant la fibre de p au-dessus de y)

  $$X_y \longrightarrow X/y \quad , \qquad x \longmapsto (x, 1_y)$$

  admet un adjoint à gauche.

Proposition 1.1.13. *Soient S une petite catégorie et $u : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme. On suppose que X et Y sont des catégories cofibrées sur S et que pour tout objet s de S, le foncteur induit entre les fibres $X_s \longrightarrow Y_s$ est une équivalence faible. Alors le morphisme u est asphérique au-dessus de S (et donc en particulier une équivalence faible).*

Démonstration. Pour chaque objet s de S on a le carré commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & Y_s \arrow[d] \\ X/s \arrow[r] & Y/s \end{tikzcd}$$

Or les flèches verticales admettent toutes deux des adjoints à gauche et sont donc des équivalences faibles (1.1.10). On en déduit immédiatement l'assertion. □

1.2. **Intégration des catégories.**

1.2.1. Soit I une petite catégorie, et soit

$$F \ : I \longrightarrow \mathcal{C}at$$

un foncteur. Si i est un objet de I, on notera $F(i)$ ou encore F_i la *fibre de* F *en* i, *i.e.* l'évaluation de F en i. On lui associe une catégorie cofibrée $\int F$ au-dessus de I, appelée la *construction de Grothendieck associée à* F, ou encore de manière plus concise, l'*intégrale de* F, comme suit. La catégorie $\int F$ a pour objets les couples (i, a), où i est un objet de I, et a un objet de $F(i)$. Une flèche

$$(i, a) \longrightarrow (i', a')$$

est un couple (k, f), où $k : i \longrightarrow i'$ est une flèche de I, et $f : F(k)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $F(i')$. Si

$$(k, f) : (i, a) \longrightarrow (i', a') \quad \text{et} \quad (k', f') : (i', a') \longrightarrow (i'', a'')$$

sont deux flèches de $\int F$, le morphisme composé

$$(k', f') \circ (k, f) : (i, a) \longrightarrow (i'', a'')$$

est défini par la formule

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, f' \circ F(k')(f))$$

$$F(k'k)(a) = F(k')F(k)(a) \xrightarrow{F(k')(f)} F(k')(a') \xrightarrow{f'} a'' \ .$$

Enfin, si (i, a) est un objet de $\int F$, l'identité de (i, a) est définie par la formule $1_{(i,a)} = (1_i, 1_a)$. Le foncteur structural

$$\theta_F \ : \textstyle\int F \longrightarrow I$$

(lequel est donc une cofibration) est simplement la projection $(i, a) \longmapsto i$. Si $\alpha \ : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de foncteurs, on obtient un I-foncteur (cocartésien)

$$\textstyle\int \alpha \ : \int F \longrightarrow \int F'$$

défini par $\int \alpha(i, a) = (i, \alpha_i(a))$. On obtient de la sorte un foncteur défini sur la catégorie des foncteurs de I à valeurs dans $\mathcal{C}at$ vers la catégorie des I-catégories

$$(\textstyle\int, \theta) : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/I \ .$$

En oubliant le morphisme structural vers I, on a ainsi un foncteur

$$\textstyle\int \ : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at \ .$$

Soit $u\ : J \longrightarrow I$ un foncteur entre petites catégories. Ce dernier induit un foncteur image inverse

$$u^*\ : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \quad , \qquad F \longmapsto F \circ u\ .$$

On vérifie aussitôt que pour tout foncteur F de I vers $\mathcal{C}at$, on a un carré cartésien canonique

$$\begin{tikzcd} \int u^*F \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{u^*F}"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ J \arrow[r, "u"'] & I \end{tikzcd}$$

dans lequel le foncteur $\int u^*F \longrightarrow \int F$ est défini par la formule $(j, a) \longmapsto (u(j), a)$. En particulier, pour tout objet i de I et tout foncteur F de I vers $\mathcal{C}at$, on a un carré cartésien canonique

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ e \arrow[r, "i"'] & I \end{tikzcd} \quad .$$

Exemple 1.2.2. Si A et B sont deux petites catégories, et si B désigne aussi le foncteur constant sur A de valeur B, alors $\int B = A \times B$.

1.2.3. Soit I une petite catégorie. On note $\mathcal{W}^I$ l'ensemble des *équivalences faibles étagées* sur I, *i.e.* des morphismes $F \longrightarrow G$ de $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ tels que pour tout objet i de I, le foncteur $F_i \longrightarrow G_i$ soient des équivalences faibles.

Proposition 1.2.4. *Pour toute petite catégorie I, le foncteur d'intégration*

$$\int\ : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at$$

envoie les équivalences faibles étagées sur des équivalences faibles.

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1.13 et du fait que pour tout foncteur F de I vers $\mathcal{C}at$, les fibres de $\int F$ au-dessus de I s'identifient canoniquement aux fibres de F. □

1.2.5. Soit $u\ : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On lui associe Un foncteur

$$\Sigma(u)\ : B^\circ \times A \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad (b, a) \longmapsto \mathsf{Hom}_B(b, u(a))\ ,$$

les ensembles $\mathsf{Hom}_B(b, u(a))$ étant vus comme des catégories discrètes. On obtient ainsi une catégorie cofibrée $S(u) = \int \Sigma(u)$ sur $B^\circ \times A$. Plus explicitement, la catégorie $S(u)$ a pour objets les triplets (a, b, f), où a est un objet de A, b un objet de B, et $f\ : b \longrightarrow u(a)$ une flèche de B, et pour flèches $(a, b, f) \longrightarrow (a', b', f')$ les couples (g, h), où $g : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A, et $h : b' \longrightarrow b$ une flèche de B, tels que le carré suivant commute dans B.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] & u(a) \arrow[d, "u(g)"] \\ b' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & u(a') \end{tikzcd}$$

En composant la cofibration canonique $\theta_{\Sigma(u)}$ avec chacune des projections (ces dernières étant des cofibrations), on obtient deux cofibrations canoniques

$$B^\circ \xleftarrow{s_u} S(u) \xrightarrow{t_u} A$$

telles que $\theta_{\Sigma(u)} = (s_u, t_u)$. Cette construction est bien entendu fonctorielle en u, en un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser s'il en est besoin. Une première utilisation de cette construction vient immédiatement.

Proposition 1.2.6. *Pour qu'un foncteur $u\ : A \longrightarrow B$ entre petites catégories soit une équivalence faible, il faut et il suffit que le foncteur $u^\circ\ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ entre les catégories opposées en soit une.*

Démonstration. Supposons que u soit une équivalence faible. Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{C}at$.

$$\begin{tikzcd} A^\circ \arrow[d, "u^\circ"'] & S(1_A) \arrow[l, "s_{1_A}"'] \arrow[r, "t_{1_A}"] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B^\circ & S(1_B) \arrow[l, "s_{1_B}"] \arrow[r, "t_{1_B}"'] & B \end{tikzcd}$$

Le foncteur t_{1_A} est une cofibration, et pour tout objet a de A, la fibre de t_u au-dessus de a est $S(1_A)_a \simeq (A/a)^\circ$. En particulier, elle admet un objet initial et donc est asphérique (1.1.11). En vertu de la proposition 1.1.13, le foncteur t_{1_A} est donc une équivalence faible. De même, le foncteur s_{1_A} est une cofibration, et pour tout objet a de A°, la fibre $S(1_A)_a$ s'identifie à la catégorie A/a, laquelle admet un objet final et donc est asphérique. Une nouvelle application de la proposition 1.1.13 implique donc que s_{1_A} est une équivalence faible. Ces constatations permettent de conclure facilement. $\square$

1.2.7. La proposition ci-dessus permet de dualiser les énoncés concernant l'asphéricité. Plus précisément, si $u\ : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, et si b est un objet de B, on note $b\backslash A = (A^\circ/b)^\circ$ la catégorie des objets de A sous b.

Si C est une petite catégorie, et $u\ : A \longrightarrow B$ un C-morphisme, on dira que u est *coasphérique au-dessus de C* si pour tout objet c de C, le foncteur induit

$$c\backslash u\ : c\backslash A \longrightarrow c\backslash B$$

est une équivalence faible (dans le cas où $C = B$ et où le morphisme structural de B vers B est l'identité, on dira alors simplement que u est *coasphérique*). La proposition précédente et l'axiome LF3 impliquent aussitôt que tout foncteur coasphérique au-dessus de C est une équivalence faible.

L'autre conséquence immédiate concerne les propriétés homotopiques des fibrations : si S est une petite catégorie, tout S-morphisme entre catégories fibrées sur S induisant des équivalences faibles entre les fibres au-dessus de chaque objet de S est une équivalence faible (il s'agit de l'énoncé dual de la proposition 1.1.13).

1.3. **Préfaisceaux intégrés.**

1.3.1. Soit A une petite catégorie. Si F est préfaisceau en petites catégories sur A, on lui associe une catégorie fibrée ∇F sur A en posant

$$\nabla F = \left(\textstyle\int F^{\circ}\right)^{\circ} ,$$

la fibration structurale $\zeta_F \ : \nabla F \longrightarrow A$ étant le foncteur $(\theta_{F^{\circ}})^{\circ}$ (cf. 1.2.1).

Considérons à présent deux petites catégories A et B, ainsi qu'un foncteur F défini sur $A^{\circ} \times B$ à valeur dans $\mathcal{C}at$. En (co-)intégrant terme à terme, on obtient deux foncteurs

$$\textstyle\int F \ : A^{\circ} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad \text{et} \quad \nabla F \ : B \longrightarrow \mathcal{C}at \ .$$

Si A et B désignent aussi les foncteurs constants correspondants, on obtient de la sorte deux morphismes de foncteurs

$$\theta_F \ : \textstyle\int F \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \zeta_F \ : \nabla F \longrightarrow A \ .$$

On vérifie aussitôt que l'isomorphisme d'échange $A \times B \simeq B \times A$ induit un isomorphisme canonique au-dessus de $A \times B$ entre $\nabla \int F$ et $\int \nabla F$.

(1.3.1.1)
$$\begin{tikzcd} \nabla \int F \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\nabla\theta_F"'] & & \int \nabla F \arrow[dl, "\int \zeta_F"] \\ & A \times B & \end{tikzcd}$$

1.3.2. Soit A une petite catégorie. Pour chaque préfaisceau X sur A, on note A/X la catégorie dont les objets sont les couples (a, x), où a est un objet de A, et $x \ : a \longrightarrow X$ une section de X au-dessus de a (*i.e.* en vertu du lemme de Yoneda, un élément de l'ensemble X_a), et dont les flèches $(a, x) \longrightarrow (a', x')$ sont les flèches $f \ : a \longrightarrow a'$ de A telles que $x'f = x$. De manière plus concise, on peut voir X comme un préfaisceau en catégories discrètes, et A/X comme la catégorie fibrée associée *i.e.*

$$A/X = \left(\textstyle\int X^{\circ}\right)^{\circ} = \left(\textstyle\int X\right)^{\circ}$$

(la seconde identification étant due au fait que si E est une catégorie discrète, $E^{\circ} = E$). On obtient de la sorte un foncteur de la catégorie des préfaisceaux (d'ensembles) sur A vers celle des petites catégories

$$i_A \ : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad X \longmapsto A/X \ .$$

1.3.3. Soit Δ la catégorie des simplexes, *i.e.* dont les objets sont les ensembles

$$\varDelta_n = \{0, \ldots, n\} \quad , \qquad n \geq 0 \ ,$$

munis de l'ordre naturel, et dont les flèches sont les applications croissantes. On rappelle qu'un ensemble simplicial est un préfaisceau sur Δ. L'inclusion pleine canonique $i\ :\Delta\longrightarrow \mathcal{C}at$ induit un foncteur pleinement fidèle et admettant un adjoint à gauche, le foncteur nerf

$$\mathrm{N}\ :\mathcal{C}at\longrightarrow\widehat{\Delta}$$

qui associe à chaque petite catégorie C l'ensemble simplicial $\mathrm{N}\,C$, défini par

$$\varDelta_n\longmapsto(\mathrm{N}\,C)_n=\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\varDelta_n,C)\ .$$

1.3.4. Soit A une petite catégorie. On notera parfois par abus Δ/A au lieu de $\Delta/\,\mathrm{N}\,A$. On définit un foncteur (naturel en A)

$$\alpha_A\ :\Delta/A=\Delta/\,\mathrm{N}\,A\longrightarrow A$$

par $\alpha_A(\varDelta_n,u\ :\varDelta_n\longrightarrow A)=u(n)$ sur les objets, et associant à chaque flèche $f\ :(\varDelta_m,u)\longrightarrow(\varDelta_n,v)$ le morphisme $\alpha_A(f)=v(f(m)\leq n):u(m)\longrightarrow v(n)$.

Lemme 1.3.5. *Pour toute petite catégorie A, le foncteur composé*

$$\widehat{A}\xrightarrow{i_A}\mathcal{C}at\xrightarrow{\mathrm{N}}\widehat{\Delta}$$

commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés.

Démonstration. Le foncteur α_A défini ci-dessus induit un foncteur image inverse

$$\alpha_A^*\ :\widehat{A}\longrightarrow\widehat{\Delta/\,\mathrm{N}\,A}\simeq\widehat{\Delta}/\,\mathrm{N}\,A\ .$$

Il est immédiat que ce dernier commute aux petites limites inductives et projectives. Le foncteur d'oubli $\mathcal{U}$ de $\widehat{\Delta}/\,\mathrm{N}\,A$ vers $\widehat{\Delta}$ commutant aux petites limites inductives et aux produits fibrés, il en est donc de même du foncteur composé

$$\widehat{A}\xrightarrow{\alpha_A^*}\widehat{\Delta}/\,\mathrm{N}\,A\xrightarrow{\mathcal{U}}\widehat{\Delta}\ .$$

Or on vérifie que le foncteur $\mathrm{N}\,i_A$ est canoniquement isomorphe au foncteur composé $\mathcal{U}\alpha_A^*$ (exercice laissé au lecteur). □

Lemme 1.3.6. *Le foncteur $i_A\ :\widehat{A}\longrightarrow\mathcal{C}at$ commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés. En outre, il admet pour adjoint à droite le foncteur*

$$i_A^*\ :\mathcal{C}at\longrightarrow\widehat{A}$$

qui à toute petite catégorie C associe le préfaisceau $a\longmapsto\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a,C)$.

Démonstration. Cela résulte aussitôt du lemme précédent et du fait que le foncteur nerf est pleinement fidèle. □

1.3.7. Soient I une petite catégorie et F un foncteur défini sur I à valeur dans $\mathcal{C}at$. Pour chaque objet i de I, on désigne par

$$\varepsilon_i\ :F_i\longrightarrow\varinjlim F$$

le morphisme canonique. Cela permet de définir le morphisme naturel en F

$$K_F\ :\textstyle\int F\longrightarrow\varinjlim F$$

par $K_F(i,a)=\varepsilon_i(a)$.

Lemme 1.3.8. *Soient A et I deux petites catégories, et F un foncteur défini sur I à valeurs dans $\widehat{A}$. Le morphisme*

$$K_{i_A F} \ : \textstyle\int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A \varinjlim F$$

est une fibration. En outre, c'est une équivalence faible si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

(a) I est l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 2\}$, et la flèche $F_0 \longrightarrow F_1$ est un monomorphisme ;

(b) I est un ensemble bien ordonné, et pour tous $i < i'$ dans I, la flèche $F_i \longrightarrow F_{i'}$ est un monomorphisme.

Démonstration. Pour montrer la première assertion, quitte à remplacer A par $A/\varinjlim F$, on peut supposer que $\varinjlim F$ est le préfaisceau final sur A. D'autre part, on peut considérer les préfaisceaux d'ensembles sur A comme des préfaisceaux en catégories discrètes. Or avec cette convention, $\int i_A F$ s'identifie à $\int \nabla F \simeq \nabla \int F$, et le foncteur $K_{i_A F}$ à la fibration structurale $\nabla \int F \longrightarrow A$.

Pour montrer la seconde assertion, il suffit de montrer le cas particulier où $A = e$ est la catégorie ponctuelle, *i.e.* où F est un foncteur en catégories discrètes (cela résulte de (1.3.1.1) et de l'assertion duale de la proposition 1.2.4 qui assure que le foncteur ∇ envoie les équivalences faibles étagées sur des équivalences faibles). En outre, en vertu de l'énoncé dual de la proposition 1.1.13, il suffit de montrer que les fibres du foncteur K_F sont asphériques.

Dans le cas (a), si x est un élément de $\varinjlim F$, on distingue deux situations. Si x n'est pas dans l'image de $F_0 \longrightarrow \varinjlim F$, alors $(\int F)_x$ est l'intégrale du diagramme

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \varnothing \\ e & \end{tikzcd} \qquad \text{ou du diagramme} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & e \\ \varnothing & \end{tikzcd}$$

et donc est la catégorie ponctuelle (en particulier asphérique). Si x est dans l'image de $F_0 \longrightarrow \varinjlim F$, alors l'application $(F_0)_x \longrightarrow (F_1)_x$ est bijective (puisque $F_0 \longrightarrow F_1$ est une injection), et $(F_2)_x$ est la catégorie ponctuelle. La fibre $(\int F)_x$ est isomorphe à la catégorie C, intégrale du diagramme

$$\begin{tikzcd} (F_0)_x \arrow[r] \arrow[d] & e \\ (F_1)_x & \end{tikzcd} \quad .$$

Or si C' désigne l'intégrale du diagramme $(F_0)_x \longrightarrow e$ (indexé par Δ_1), on a une inclusion pleine évidente $C' \longrightarrow C$, laquelle admet un adjoint à gauche (on identifie $(F_0)_x$ et $(F_1)_x$)

$$r \ : C \longrightarrow C' \quad , \qquad (a,i) \longmapsto r(a,i) = \begin{cases} (a,i) & \text{si } i = 0,2, \\ (a,0) & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

En vertu de 1.1.10, il suffit prsent de montrer que C' est asphrique. On vérifie aussitôt que la catégorie C' admet un objet final (c'est en fait le cône de $(F_0)_x$, *i.e.* la catégorie $(F_0)_x$ à laquelle on a ajouté formellement un objet final), ce qui implique que aussitt l'assertion.

Dans le cas (b), si x est un élément de $\varinjlim F$, comme les morphismes $F_i \longrightarrow \varinjlim F$ sont des injections, on a pour tout $i \in I$, $(F_i)_x = \varnothing$ ou bien $(F_i)_x = e$. On pose

$$I_x = \{i \in I \mid (F_i)_x \neq \varnothing\}$$

I_x est un sous-ensemble ordonné non vide de I, et comme I est bien ordonné, il admet un élément initial. En vertu du corollaire 1.1.11, la catégorie I_x est donc asphérique. Or la catégorie $(\int F)_x$ s'identifie canoniquement à l'intégrale du foncteur constant sur I_x de valeur la catégorie ponctuelle, c'est-à-dire à I_x, ce qui achève la démonstration. $\square$

1.3.9. Si A est une petite catégorie, on dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A est une *équivalence faible* si son image dans $\mathcal{C}at$ par le foncteur i_A est une équivalence faible. Un morphisme de préfaisceaux sur A est une *cofibration triviale* si c'est à la fois une équivalence faible et un monomorphisme.

Théorème 1.3.10 (Grothendieck)**.** *Soit A une petite catégorie. Les cofibrations triviales de $\widehat{A}$ sont stables par images directes et par compositions transfinies. Autrement dit, si $Z \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ est un diagramme de $\widehat{A}$ et si g est une cofibration triviale, alors le morphisme canonique $Z \longrightarrow Z \amalg_X Y$ est une cofibration triviale, et si I est un ensemble bien ordonné, $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur tel que pour tous $i < j$ dans I, le morphisme $F_i \longrightarrow F_j$ soit une cofibration triviale, alors le morphisme $F_0 \longrightarrow \varinjlim F$ est une cofibration triviale (0 désignant l'élément initial de I).*

Démonstration. Si I est une petite catégorie telle que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ vérifiant une certaine propriété P, le morphisme canonique $\int i_A F \longrightarrow i_A \varinjlim F$ soit une équivalence faible, alors il résulte de la proposition 1.2.4 que les équivalences faibles de $\widehat{A}$ sont stables par limites inductives de foncteurs vérifiant ladite propriété P et indexées par I. Il résulte donc du lemme 1.3.8 que pour tout diagramme commutatif de $\widehat{A}$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_0"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 & Y_0 \arrow[l, "\beta_1"] \arrow[r, "\beta_2"'] & Y_2
\end{tikzcd} ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des équivalences faibles, la flèche canonique $X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$ est une équivalence faible. On en déduit aussitôt que les cofibrations triviales sont stables par images directes. On procède de manière analogue pour le cas des compositions transfinies. $\square$

2. Caractérisations de la classe des ∞-équivalences

2.1. Le localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$.

2.1.1. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, on note $\delta_n^i \ : \mathit{\Delta}_{n-1} \to \mathit{\Delta}_n$ l'unique injection croissante qui ne prend pas la valeur i. Pour $n \geq 0$, on définit un sous-préfaisceau $\partial\,\mathit{\Delta}_n$ de $\mathit{\Delta}_n$:

$$\partial\,\mathit{\Delta}_n = \bigcup_{0\ \leq i \leq n} \operatorname{Im} \delta_n^i \ , \quad n \geq 1 \ , \quad \text{et} \quad \partial\,\mathit{\Delta}_0 = \varnothing \ .$$

On note $i_n \ : \partial\,\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$ l'inclusion, et on définit $I = \{i_n \mid n \geq 0\}$.

Pour $n \geq 0$ et $e = 0, 1$, on a un carré cartésien d'ensembles simpliciaux, dont toutes les flèches sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \partial\,\mathit{\Delta}_n \arrow[r, "1_{\partial\,\mathit{\Delta}_n} \times \delta_1^{1-e}"] \arrow[d, "i_n"'] & \partial\,\mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1 \arrow[d, "i_n \times 1_{\mathit{\Delta}_1}"] \\ \mathit{\Delta}_n \arrow[r, "1_{\mathit{\Delta}_n} \times \delta_1^{1-e}"'] & \mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1 \end{tikzcd} .$$

On écrit $\mathit{\Delta}_n \times \{e\} \cup \partial\,\mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1 = \mathit{\Delta}_n \amalg_{\partial\,\mathit{\Delta}_n} \partial\,\mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1$, et on note

$$j_{n,e} \ : \mathit{\Delta}_n \times \{e\} \cup \partial\,\mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1 \longrightarrow \mathit{\Delta}_n \times \mathit{\Delta}_1$$

la flèche induite par le carré commutatif ci-dessus. Les flèches $j_{n,e}$ sont des monomorphismes, et on définit $J = \{j_{n,e} \mid n \geq 0,\ e = 0, 1\}$.

On renvoie à [13, chapitre I, paragraphe 5] pour les propriétés de relèvement à droite ou à gauche. On rappelle qu'une fibration de Kan est un morphisme d'ensembles simpliciaux qui vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à J. On note $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ la classe des morphismes de $\widehat{\Delta}$ de la forme $f = pi$, où i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement aux fibrations de Kan, et p la propriété de relèvement à droite relativement à I.

Théorème 2.1.2 (Quillen)**.** *La catégorie $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, les fibrations sont les fibrations de Kan, et les cofibrations sont les monomorphismes.*

Démonstration. Voir [13, chapitre II, paragraphe 3, théorème 3]. □

2.1.3. On note Δ_+ (resp. Δ_-) la sous-catégorie de Δ formée des monomorphismes (resp. des épimorphismes) de Δ. Ceci définit une structure de Reedy sur Δ au sens de [10, définition 5.2.1], ce qui va nous permettre d'étudier l'algèbre homotopique des ensembles bisimpliciaux, *i.e.* des préfaisceaux sur la catégorie produit $\Delta \times \Delta$ (voir aussi [2]).

On se fixe un entier positif n, et on note $n^* \ : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ le foncteur d'évaluation en $\mathit{\Delta}_n$. On va définir deux foncteurs $L_n \ : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ et $M_n \ : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ comme suit. On considère $\mathit{\Delta}_n$ comme un objet de Δ_- (resp. de Δ_+), et on note $\partial_-\,\mathit{\Delta}_n$ (resp. $\partial_+\,\mathit{\Delta}_n$) la sous-catégorie pleine de $\mathit{\Delta}_n\backslash\Delta_-$ (resp. de $\Delta_+/\mathit{\Delta}_n$) définie par

$$\mathsf{Ob}(\partial_-\,\mathit{\Delta}_n) = \mathsf{Ob}(\mathit{\Delta}_n\backslash\Delta_-) - \{(\mathit{\Delta}_n, 1_{\mathit{\Delta}_n})\}$$

$$(\text{resp.} \quad \mathsf{Ob}(\partial_+\,\mathit{\Delta}_n) = \mathsf{Ob}(\Delta_+/\mathit{\Delta}_n) - \{(\mathit{\Delta}_n, 1_{\mathit{\Delta}_n})\}\ ).$$

On note $\lambda_n \ : \partial_-\,\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \Delta$ (resp. $\mu_n \ : \partial_+\,\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \Delta$) le foncteur composé

$$\partial_-\,\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \mathit{\Delta}_n\backslash\Delta_- \longrightarrow \Delta \quad (\text{resp.}\ \partial_+\,\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \Delta_+/\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \Delta\ ).$$

Enfin, si X est un ensemble simplicial, on pose

$$L_n X = \varinjlim \lambda_n^* X \quad \text{et} \quad M_n X = \varprojlim \mu_n^* X \ .$$

On remarque que ces foncteurs peuvent être décrits beaucoup plus simplement : $L_n X = n^* \mathsf{Sk}^{n-1} X = (\mathsf{Sk}^{n-1} X)_n$ (où $\mathsf{Sk}^{n-1} X$ désigne le $n-1$-ème squelette de X [6, chapitre II, paragraphe 3]), et $M_n X = \mathsf{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\partial\,\varDelta_n, X)$.

Les foncteurs $\partial_-\,\Delta_n \longrightarrow \varDelta_n\backslash\Delta$ et $\partial_+\,\Delta_n \longrightarrow \Delta/\varDelta_n$ induisent des morphismes de foncteurs $L_n \longrightarrow n^*$ et $n^* \longrightarrow M_n$. On vérifie que le premier est l'image par le foncteur n^* de l'inclusion canonique $\mathsf{Sk}^{n-1} \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ et que le second est induit par l'inclusion $\partial\,\varDelta_n \longrightarrow \varDelta_n$.

Lemme 2.1.4. *Soit $u : K \longrightarrow K'$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Pour chaque $n \geq 0$, on a un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} L_n K \arrow[r] \arrow[d, "L_n u"'] & K \arrow[d, "u"] \\ L_n K' \arrow[r] & K' \end{tikzcd}$$

qui induit une application $v_n \ : L_n K' \amalg_{L_n K} K \longrightarrow K'$. Pour que u soit un monomorphisme, il faut et il suffit que les applications v_n soient injectives pour tous $n \geq 0$.

Démonstration. Cela résulte facilement de [6, chapitre II, paragraphe 3.4]. □

Théorème 2.1.5. *La catégorie $\widehat{\Delta \times \Delta}$ des ensembles bisimpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équialences faibles sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que pour tout $m \geq 0$, la flèche $X_{m,\bullet} \longrightarrow Y_{m,\bullet}$ soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. Si on note pour $m \geq 0$, $M_m \ : \widehat{\Delta \times \Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur $X \longmapsto (\varDelta_n \longmapsto M_m X_{\bullet,n})$, et $m^* \ : \widehat{\Delta \times \Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur $X \longmapsto X_{m,\bullet}$, on a un morphisme canonique $m^* \longrightarrow M_m$ (induit par son analogue décrit au numéro* 2.1.3*). Les fibrations de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que pour tous $m \geq 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$X_{m,\bullet} \longrightarrow Y_{m,\bullet} \times_{M_m Y} M_m X$$

soit une fibration de Kan.

Démonstration. Cela résulte de [10, théorème 5.2.5], du lemme 2.1.4, et des descriptions des foncteurs L_m et M_m du numéro 2.1.3. □

2.1.6. On note $\delta \ : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$ le foncteur diagonal. Il induit un foncteur

$$\delta^* \ : \widehat{\Delta \times \Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad X \longmapsto (\varDelta_n \longmapsto X_{n,n}) \ ,$$

lequel admet un adjoint à droite

$$\delta_* \ : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta} \quad , \qquad X \longmapsto ((\varDelta_m, \varDelta_n) \longmapsto \mathsf{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\varDelta_m \times \varDelta_n, X)) \ .$$

Proposition 2.1.7. *Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme d'ensembles bisimpliciaux tel que pour tout $m \geq 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $X_{m,\bullet} \longrightarrow Y_{m,\bullet}$ soit une équivalence faible. Alors $\delta^* X \longrightarrow \delta^* Y$ est une équivalence faible.*

Démonstration. On veut montrer que le foncteur δ^* respecte les équivalences faibles au sens des théorèmes 2.1.2 et 2.1.5. Vu que tous les ensembles bisimpliciaux sont cofibrants pour ladite structure de catégorie de modèles fermée, le lemme de Ken Brown [10, lemme 1.1.12] montre qu'il suffit de vérifier que δ^* respecte les cofibrations triviales, ou encore, de manière équivalente, que δ_* respecte les fibrations. Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Pour $m \geq 0$, la flèche $(\delta_* X)_{m,\bullet} \longrightarrow (\delta_* Y)_{m,\bullet} \times_{M_m \delta_* Y} M_m \delta_* X$ s'identifie au morphisme suivant (2.1.3)

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\varDelta_m, X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\varDelta_m, Y) \times_{\underline{\mathsf{Hom}}(\partial\,\varDelta_m, Y)} \underline{\mathsf{Hom}}(\partial\,\varDelta_m, X)\ ,$$

$\underline{\mathsf{Hom}}$ désignant le Hom interne de $\widehat{\Delta}$. Par conséquent, si p est une fibration de Kan, $\delta_* p$ est une fibration (en vertu de [6, chapitre VI, paragraphe 4.3] et de la description des fibrations du théorème 2.1.5). □

2.1.8. Soit C une petite catégorie. On rappelle la construction du foncteur de Bousfield-Kan [1]

$$\amalg_* \ : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}\ .$$

On a un foncteur $\alpha_{C^\circ} : \Delta/C^\circ \longrightarrow C^\circ$ (1.3.4), ce qui induit un foncteur image inverse

$$\underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \xrightarrow{(\alpha_{C^\circ} \times 1_\Delta)^*} \widehat{\Delta/C^\circ \times \Delta}\ .$$

Si $p : \Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta$ désigne la première projection, on a un isomorphisme canonique de catégories $\widehat{\Delta/C^\circ \times \Delta} \simeq \widehat{\Delta \times \Delta}/p^* \mathrm{N}\, C^\circ$. Le foncteur $\amalg_*$ est obtenu comme de composé du foncteur $(\alpha_{C^\circ} \times 1_\Delta)^*$ et du foncteur d'oubli de la catégorie $\widehat{\Delta \times \Delta}/p^* \mathrm{N}\, C^\circ$ dans $\widehat{\Delta \times \Delta}$. Plus explicitement, si F est un foncteur défini sur C et à valeurs dans $\widehat{\Delta}$, pour $m \geq 0$, on a

$$(\amalg_* F)_{m,\bullet} = \coprod_{\varDelta_m \xrightarrow{u} C^\circ} F(u(m)) = \coprod_{c_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_0} F(c_m)\ .$$

En composant $\amalg_*$ avec le foncteur δ^* (2.1.6), on obtient le foncteur

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}} = \underset{C}{\underrightarrow{\mathrm{holim}}} = \delta^* \amalg_* \ : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta}\ .$$

Soit $q : \Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta$ la seconde projection. Si F est un foncteur sur C à valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux, les morphismes canoniques $F(c) \longrightarrow \underrightarrow{\lim} F$, $c \in \mathsf{Ob}\, C$, induisent pour chaque $m \geq 0$ un morphisme

$$(\amalg_* F)_{m,\bullet} \longrightarrow \underrightarrow{\lim} F = (q^* \underrightarrow{\lim} F)_{m,\bullet}\ ,$$

d'où un morphisme $\amalg_* F \longrightarrow q^* \underrightarrow{\lim} F$. On vérifie que cela détermine un morphisme de foncteurs $\amalg_* \longrightarrow q^* \underrightarrow{\lim}$, où $\underrightarrow{\lim} \ : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta}$ désigne le foncteur limite inductive. Comme $\delta^* q^* = (q\delta)^* = 1_{\widehat{\Delta}}$, on en déduit un morphisme de foncteurs $\underrightarrow{\mathrm{holim}} \longrightarrow \underrightarrow{\lim}$.

Proposition 2.1.9 (Bousfield-Kan)**.** *Soit $F \longrightarrow G$ un morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta})$ tel que pour tout objet c de C, $F(c) \longrightarrow G(c)$ soit une équivalence faible. Alors $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, F \longrightarrow \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, G$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Pour chaque objet c de C, le morphisme

$$\coprod_{c_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_0} F(c_m) \longrightarrow \coprod_{c_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_0} G(c_m)$$

est une somme d'équivalences faibles et donc est une équivalence faible. L'assertion est par conséquent une application directe de la proposition 2.1.7. □

2.1.10. Soit C une petite catégorie. On désigne par

$$\Theta_C \ : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at)$$

le foncteur $(A \longrightarrow C) \longmapsto (c \longmapsto A/c)$. Le foncteur nerf induit un foncteur encore noté N

$$\mathrm{N} \ : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \ .$$

On en déduit un foncteur composé $\varinjlim\nolimits_{\mathrm{holim}} \mathrm{N}\,\Theta_C \ : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \widehat{\Delta}$

$$\mathcal{C}at/C \xrightarrow{\Theta_C} \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\mathrm{N}} \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\Delta}) \xrightarrow{\underrightarrow{\mathrm{holim}}} \widehat{\Delta} \ ,$$

et un morphisme de foncteurs $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\,\Theta_C \longrightarrow \varinjlim \mathrm{N}\,\Theta_C$. D'autre part, on a un morphisme de foncteurs $\varinjlim \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N} \varinjlim$, et les limites inductives étant universelles dans $\mathcal{C}at$, on vérifie facilement que si $U_C \ : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \mathcal{C}at$ est le foncteur d'oubli, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim \Theta_C \simeq U_C$. On en déduit un morphisme de foncteurs

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\,\Theta_C \longrightarrow \mathrm{N}\, U_C \ .$$

Lemme 2.1.11 (Quillen)**.** *Pour tout objet (A, α) de $\mathcal{C}at/C$ (A étant une petite catégorie et $\alpha \ : A \longrightarrow C$ un foncteur), le morphisme*

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\,\Theta_C(A, \alpha) \longrightarrow \mathrm{N}\, U_C(A, \alpha) = \mathrm{N}\, A$$

est une équivalence faible.

Démonstration. Le morphisme $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\,\Theta_C(A, \alpha) \longrightarrow \mathrm{N}\, A$ est l'image par le foncteur δ^* du morphisme $\amalg_* \mathrm{N}\,\Theta_C(A, \alpha) \longrightarrow q^* \mathrm{N}\, A$ défini pour $m \geq 0$ par les flèches

$$(\amalg_* \mathrm{N}\,\Theta_C(A, \alpha))_{m,\bullet} = \coprod_{c_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_0} \mathrm{N}\, A/c_m \longrightarrow \mathrm{N}\, A = (q^* \mathrm{N}\, A)_{m,\bullet}$$

induites par les foncteurs d'oubli $A/c \longrightarrow A$, $c \in \mathsf{Ob}\, C$ (voir 2.1.8). Or on vérifie que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $(\amalg_* \mathrm{N}\,\Theta_C(A, \alpha))_{\bullet,n} \longrightarrow (q^* \mathrm{N}\, A)_{\bullet,n}$ est une équivalence faible. Pour le voir, on remarque qu'il s'identife au morphisme

$$\coprod_{a_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n} \mathrm{N}(C^\circ/\alpha(a_n)) \longrightarrow \coprod_{a_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n} \Delta_0 \ ,$$

somme des flèches $\mathrm{N}(C^\circ/\alpha(a)) \longrightarrow \Delta_0$, $a \in \mathsf{Ob}\, A$. Les catégorie de la forme $C^\circ/\alpha(a)$ admettant toutes un objet final, leurs nerfs sont des ensembles simpliciaux contractiles. Le lemme résulte à présent de la proposition 2.1.7. □

2.1.12. On dit qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est une ∞-*équivalence* si son image dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur nerf est une équivalence faible. On note $\mathcal{W}_\infty = \mathrm{N}^{-1}\, \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$.

Théorème 2.1.13. *Les ∞-équivalences forment un localisateur fondamental.*

Démonstration. La vérification des axiomes LF1 et LF2 est un exercice facile laissé au lecteur. Nous allons démontrer l'axiome LF3. Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un foncteur au-dessus d'une petite catégorie C tel que pour tout objet c de C, le foncteur induit $A/c \longrightarrow B/c$ soit une ∞-équivalence. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\mathrm{N}\,\Theta_C(A,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\mathrm{N}\,\Theta_C(u)"'] & \mathrm{N}\,A \arrow[d, "\mathrm{N}\,u"] \\ \underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\mathrm{N}\,\Theta_C(B,\beta) \arrow[r] & \mathrm{N}\,B \end{tikzcd}$$

dont les deux flèches horizontales sont des équivalences faibles (2.1.11), et il résulte de la proposition 2.1.9 appliquée au morphisme $\mathrm{N}\,\Theta_C(u)$ que $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\mathrm{N}\,\Theta_C(u)$ est aussi une équivalence faible. On en déduit aussitôt que u est une ∞-équivalence. □

2.1.14. Si X est un ensemble simplicial, on lui associe le foncteur suivant.

$$\varphi_X \ : \Delta/X \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \qquad (\mathit{\Delta}_n, u : \mathit{\Delta}_n \longrightarrow X) \longmapsto \mathit{\Delta}_n$$

Il est bien connu que le morphisme $\underrightarrow{\lim}\,\varphi_X \longrightarrow X$ induit par les flèches $u : \mathit{\Delta}_n \longrightarrow X$ est un isomorphisme. D'autre part, les foncteurs $\alpha_{\mathit{\Delta}_n} : \Delta/\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$ (1.3.4) définissent un morphisme de foncteurs sur Δ, et donc on obtient un morphisme

$$\underrightarrow{\lim}\,\mathrm{N}\,i_\Delta \varphi_X \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\,\varphi_X \ .$$

En vertu de 1.3.5, cela définit un morphisme $\alpha_X \ : \mathrm{N}\,\Delta/X \longrightarrow X$. Explicitement, le morphisme α_X associe à un m-simplexe

$$\mathit{\Delta}_{n_0} \xrightarrow{u_1} \mathit{\Delta}_{n_1} \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_m} \mathit{\Delta}_{n_m} \xrightarrow{u} X$$

de $\mathrm{N}\,\Delta/X$ le m-simplexe $uv : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow X$ de X, où $v : \mathit{\Delta}_m \longrightarrow \mathit{\Delta}_{n_m}$ est l'application

$$k \longmapsto u_m \cdots u_{k+1}(n_k) \ .$$

On vérifie qu'on a ainsi défini un morphisme de foncteurs

$$\alpha \ : \mathrm{N}\,i_\Delta \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \ .$$

Lemme 2.1.15 (Quillen)**.** *Pour tout ensemble simplicial X, le morphisme α_X est une équivalence faible.*

Démonstration. On a un carré commutatif (2.1.8)

$$\begin{tikzcd} \underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\mathrm{N}\,i_\Delta \varphi_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}\,\Delta/X \arrow[d] \\ \underrightarrow{\mathrm{holim}}\,\varphi_X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

En vertu de 2.1.9 le morphisme

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\, i_\Delta \varphi_X \longrightarrow \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \varphi_X$$

est une équivalence faible (les morphismes $\mathrm{N}\,\Delta/\mathit{\Delta}_n \longrightarrow \mathit{\Delta}_n$ sont des équivalences faibles, puisque les catégories de la forme $\Delta/\mathit{\Delta}_n$ admettent un objet final et sont donc contractiles). On remarque qu'avec les notations de 2.1.10, on a l'identification

$$\mathrm{N}\, i_\Delta \varphi_X = \mathrm{N}\, \Theta_{\Delta/X}(\Delta/X, 1_{\Delta/X}) \ ,$$

et donc il résulte du lemme 2.1.11 que que le morphisme

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{N}\, i_\Delta \varphi_X \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\, \mathrm{N}\, i_\Delta \varphi_X \simeq \Delta/X$$

est une équivalence faible. Il suffit ainsi de montrer que le morphisme

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \varphi_X \longrightarrow X$$

est une équivalence faible. Or c'est l'image par le foncteur δ^* du morphisme d'ensembles bisimpliciaux

$$\amalg_* \varphi_X \longrightarrow q^* X \simeq q^* \underrightarrow{\lim}\, \varphi_X \ .$$

Or pour $n \geq 0$, la flèche $(\amalg_* \varphi_X)_{\bullet,n} \longrightarrow (q^* X)_{\bullet,n}$ est une équivalence faible. En effet, elle se décrit comme le morphisme

$$\coprod_{\mathit{\Delta}_n \xrightarrow{u} X} \mathrm{N}((\Delta/X)^\circ/(\mathit{\Delta}_n, u)) \longrightarrow \coprod_{\mathit{\Delta}_n \xrightarrow{u} X} \mathit{\Delta}_0 \ ,$$

somme des équivalences d'homotopie $\mathrm{N}((\Delta/X)^\circ/(\mathit{\Delta}_n, u)) \longrightarrow \mathit{\Delta}_0$. La proposition 2.1.7 achève ainsi la démonstration. □

Théorème 2.1.16 (Quillen)**.** *On a l'égalité $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = i_\Delta^{-1}\mathcal{W}_\infty$. En outre, le foncteur nerf* N *et le foncteur i_Δ induisent deux équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre*

$$\underline{\mathrm{N}}\ : \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \quad et \quad \underline{i}_\Delta\ : \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \ .$$

Démonstration. La première assertion résulte aussitôt du lemme précédent. Ce dernier donne par ailleurs un morphisme $i_\Delta \mathrm{N} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$ qui se révèle être une équivalence faible (grâce à la pleine fidélité du foncteur nerf). Le foncteur i_Δ induit ainsi un quasi-inverse de $\underline{\mathrm{N}}$. □

2.2. **Critère de minimalité.**

2.2.1. *On fixe pour le moment un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.*

Lemme 2.2.2. *Soit A une petite catégorie admettant un objet final ω. Alors la catégorie Δ/A est asphérique.*

Démonstration. On définit un foncteur $D\ : \Delta/A \longrightarrow \Delta/A$ par

$$D(\Delta_m, \alpha) = (\Delta_{m+1}, D\alpha) \ ,$$

où

$$D\alpha(k) = \begin{cases} \alpha(k) & \text{si } k \leq m \\ \omega & \text{si } k = m+1, \end{cases}$$

et si $f\ :(\Delta_m,\alpha)\longrightarrow(\Delta_n,\beta)$ est une flèche de Δ/A, on pose

$$Df(k)=\begin{cases} f(k) & \text{si } k\leq m\\ n+1 & \text{si } k=m+1.\end{cases}$$

On note $\Omega\ :\Delta/A\longrightarrow\Delta/A$ le foncteur constant de valeur (Δ_0,ω). Les inclusions $\Delta_m\longrightarrow\Delta_{m+1}$, $k\longmapsto k$, et $\Delta_0\longrightarrow\Delta_m$, $0\longmapsto m+1$ induisent des morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \Delta/A \arrow[r, bend left, "1_{\Delta/A}"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \Delta/A \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \Delta/A \arrow[r, bend left, "\Omega"] \arrow[r, bend right, "D"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \Delta/A \end{tikzcd}.$$

Ceci montre bien que Δ/A est une catégorie contractile. □

Proposition 2.2.3 (Grothendieck)**.** *Pour toute petite catégorie A, le foncteur $\alpha_A\ :\Delta/A\longrightarrow A$ est asphérique (et donc en particulier une équivalence faible).*

Démonstration. Soit a un objet de A. On vérifie que les catégories $\Delta/(A/a)$ et $(\Delta/A)/a$ sont canoniquement isomorphes. La catégorie A/a admettant un objet final, le lemme précédent permet de conclure. □

Corollaire 2.2.4. *On a l'égalité $\mathcal{W}=\mathrm{N}^{-1}\,i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$.*

Remarque 2.2.5. Si on note $\mathcal{W}_\Delta=i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$, les foncteurs N et i_Δ induisent des équivalences de catégories quasi-inverse l'une de l'autre entre $\mathcal{W}_\Delta^{-1}\widehat{\Delta}$ et $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$.

Lemme 2.2.6. *Pour tout ensemble simplicial X, les projections $X\times\mathit{\Delta}_n\longrightarrow X$, $n\geq 0$, sont dans $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$.*

Démonstration. Si $X=\mathit{\Delta}_m$ pour un entier $m\geq 0$, cela résulte aussitôt de 2.2.2. Dans le cas général, Si $(\mathit{\Delta}_m,\alpha)$ est un objet de Δ/X, alors $(\Delta/(X\times\mathit{\Delta}_n))/(\mathit{\Delta}_m,\alpha)$ est canoniquement isomorphe à $\Delta/\mathit{\Delta}_m\times\mathit{\Delta}_n$ et donc est asphérique. Cela montre que le foncteur $\Delta/(X\times\mathit{\Delta}_n)\longrightarrow\Delta/X$ est asphérique. □

Remarque 2.2.7. Le lemme ci-dessus implique que $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est stable par produits finis. En effet, si $X\longrightarrow Y\in i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ et si Z est un ensemble simplicial, pour tout n-simplexe $u\ :\mathit{\Delta}_n\longrightarrow Z$, on a les identifications

$$(\Delta/(X\times Z))/(\mathit{\Delta}_n,u)\simeq\Delta/(X\times\mathit{\Delta}_n)\quad\text{et}\quad(\Delta/(Y\times Z))/(\mathit{\Delta}_n,u)\simeq\Delta/(Y\times\mathit{\Delta}_n)\ ,$$

ce qui montre que le foncteur

$$\Delta/(X\times Z)\longrightarrow\Delta/(Y\times Z)$$

est asphérique au-dessus de Δ/Z. Cela montre bien que $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est stable par le foncteur $X\longmapsto X\times Z$.

Lemme 2.2.8. *Soit W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\,\widehat{\Delta}$, telle que pour tout ensemble simplicial X, la projection $X\times\mathit{\Delta}_1\longrightarrow X$ soit dans W. Alors toute fibration triviale de $\widehat{\Delta}$ au sens de la structure de catégorie de modèles fermée du théorème* 2.1.2 *est dans W.*

Démonstration. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration triviale. Comme $\varnothing \longrightarrow Y$ est une cofibration, p admet une section s. Pour montrer que p est dans W, il suffit donc de montrer que sp est dans W. Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \amalg X \arrow[rr, "(1_X, sp)"] \arrow[d, "(1_X \times \delta_1^0, 1_X \times \delta_1^0)"'] & & X \arrow[d, "p"] \\
X \times \Delta_1 \arrow[r, "pr_1"'] \arrow[urr, dotted, "h"] & X \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

admettant un relèvement $h : X \times \Delta_1 \longrightarrow X$, cela montre que sp et 1_X sont homotopes. Or on vérifie aussitôt que tout morphisme homotope à un élément de W est lui-même dans W, ce qui permet de conclure. □

Proposition 2.2.9. *On a l'inclusion* $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} \subset i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$.

Démonstration. Les projections du type $X \times \Delta_n \longrightarrow X$ étant dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$ (2.2.6), on en déduit qu'il en est de même des morphismes $1_X \times \delta_1^e : X \longrightarrow X \times \Delta_1$, $e = 0, 1$. Or pour $n \geq 0$ et $e = 0, 1$, on a le diagramme commutatif suivant dont toutes les flèches sont des monomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
\partial \Delta_n \times \{e\} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocartésien}"] & \Delta_n \times \{e\} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\sim"] & \\
\partial \Delta_n \times \Delta_1 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \partial \Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{e\} \arrow[dr, "j_{n,e}"] & \\
& & \Delta_n \times \Delta_1
\end{tikzcd}$$

Il résulte du théorème 1.3.10 que le morphisme $j_{n,e}$ est dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. Considérons à présent un élément f de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$. Par l'argument du petit objet appliqué à J (voir la preuve de [6, chapitre VI, proposition 5.5.1]), il admet une factorisation de la forme $f = pi$, où i est un composé transfini d'images directes de sommes d'éléments de J, et où p est une fibration de Kan. Comme i est dans $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, il en est de même de p, et donc p est une fibration triviale. Or ce qui précède, le lemme 1.1.5 et le théorème 1.3.10 montrent que i est dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$, et en vertu du lemme 2.2.8, le morphisme p est aussi dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. □

2.2.10. La notion de localisateur fondamental est stable par intersections. On définit le *localisateur fondamental minimal* comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux.

Théorème 2.2.11. *Les ∞-équivalences forment le localisateur fondamental minimal.*

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. En vertu de 2.2.9, on a l'inclusion $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} \subset i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$, et donc il résulte de 2.2.4 que $\mathcal{W}_{\infty} = \mathrm{N}^{-1}\,\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} \subset \mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}_{\infty}$ est un localisateur fondamental (2.1.13), cela achève la démonstration. □

2.3. **Critère local.**

2.3.1. Soit $W \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$. Un foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$ est W-localement constant si pour toute flèche $b \longrightarrow b'$ de B, le foncteur induit $A/b \longrightarrow A/b'$ est dans W.

Théorème 2.3.2 (Quillen)**.** *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant. Alors pour tout objet b de B, le carré suivant est homotopiquement cartésien dans $\widehat{\Delta}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\,A/b \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}\,u/b"'] & \mathrm{N}\,A \arrow[d, "\mathrm{N}\,u"] \\ \mathrm{N}\,B/b \arrow[r] & \mathrm{N}\,B \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il s'agit d'une interprétation directe de [14, théorème B] dans la catégorie des ensembles simpliciaux. □

Corollaire 2.3.3. *Une foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant est une ∞-équivalence si et seulement s'il est asphérique (au sens de $\mathcal{W}_\infty$).*

Démonstration. C'est une condition suffisante car $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental (2.1.13). Il résulte aussitôt du théorème précédent que c'est aussi une condition nécessaire. □

Proposition 2.3.4. *Si $A \longrightarrow B$ est une ∞-équivalence, alors l'application induite $\pi_0 A \longrightarrow \pi_0 B$ est bijective.*

Démonstration. Cela résulte de la propriété analogue pour les équivalences faibles de $\widehat{\Delta}$ et du fait que le foncteur nerf commute aux sommes. Une autre manière de la montrer consiste à considérer la classe $\mathcal{W}_0$ des flèches de $\mathcal{C}at$ induisant une bijection après application du foncteur π_0. On remarque que le foncteur $\pi_0 : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{E}ns$ commute aux petites limites inductives, car c'est un adjoint à gauche de l'inclusion canonique $\mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}at$. Cela permet de vérifier facilement que $\mathcal{W}_0$ est un localisateur fondamental (car comme les limites inductives sont universelles dans $\mathcal{C}at$, si $A \longrightarrow B$ est un foncteur, alors A est canoniquement isomorphe à la limite inductive des catégories A/b, $b \in \mathsf{Ob}\,B$). Le théorème 2.2.11 implique alors l'assertion. □

2.3.5. Le corollaire 2.3.3 et la proposition 2.3.4 caractérisent totalement le localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$:

Théorème 2.3.6. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental tel que toute $\mathcal{W}$-équivalence $A \longrightarrow B$ induise un bijection $\pi_0 A \longrightarrow \pi_0 B$, et tel que toute $\mathcal{W}$-équivalence $\mathcal{W}$-localement constante soit $\mathcal{W}$-asphérique. Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.*

Démonstration. En vertu du théorème 2.2.11, on sait déjà que $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$. La démonstration de l'inclusion inverse se fait en plusieurs étapes. On appellera aussi $\mathcal{W}$-équivalences les morphismes d'ensembles simpliciaux dont l'image par le foncteur i_Δ est dans $\mathcal{W}$. Un ensemble simplicial X sera dit $\mathcal{W}$-asphérique si $X \longrightarrow \Delta_0$ est une $\mathcal{W}$-équivalence. En vertu de 2.2.4, il suffit de montrer que route $\mathcal{W}$-équivalence en ce sens est une équivalence faible au sens de 2.1.2.

2.3.6.1. *Si $p : X \longrightarrow Y$ est une fibration de Kan, alors le foncteur $i_\Delta p$ est $\mathcal{W}$-localement constant.*

Pour toutes flèches $u : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ et $\Delta_n \longrightarrow Y$, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \Delta_m \times_Y X \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \Delta_n \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta_m \arrow[r, "u"'] & \Delta_n \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

la flèche v est dans $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ (propreté à droite de la structure de catégorie de modèles fermée 2.1.2, cf. [2]). Comme le foncteur i_Δ commute aux produits fibrés (1.3.6) et envoie $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ dans $\mathcal{W}$ (2.2.9), cela montre l'assertion.

2.3.6.2. *Une fibration de Kan est une $\mathcal{W}$-équivalence si et seulement si ses fibres sont $\mathcal{W}$-asphériques.*

Cela résulte de 2.3.6.1, de l'hypothèse qu'une $\mathcal{W}$-équivalence $\mathcal{W}$-localement constante est $\mathcal{W}$-asphérique, et du lemme 1.3.6.

2.3.6.3. *Un complexe de Kan $\mathcal{W}$-asphérique est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique.*

Soit X un complexe de Kan $\mathcal{W}$-asphérique. Comme $\pi_0 X$ est l'ensemble à un élément, X est en particuler non vide. Soit x un 0-simplexe de X. On va montrer que l'espace des lacets $\Omega(X, x)$ est aussi $\mathcal{W}$-asphérique. Les projections $X \times X \longrightarrow X$ sont encore des $\mathcal{W}$-équivalences (2.2.7), et comme X est un complexe de Kan, les morphismes $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \longrightarrow X$ induits par les faces δ_1^0 et δ_1^1 sont des fibrations triviales, et par suite, des $\mathcal{W}$-équivalences (2.2.9). Par saturation, on en déduit que la fibration de Kan

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\partial\,\Delta_1, X) \simeq X \times X$$

est une $\mathcal{W}$-équivalence. Or l'espace des lacets est obtenu par le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \Omega(X, x) \arrow[rr] \arrow[d] & & \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \arrow[d] \\ \Delta_0 \arrow[r, "\sim"] & \Delta_0 \times \Delta_0 \arrow[r, "x \times x"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Il résulte donc de 2.3.6.2 que $\Omega(X, x)$ est $\mathcal{W}$-asphérique. On en déduit par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\Omega^n(X, x)$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Comme $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_0$, cela implique que les groupes d'homotopie $\pi_n(X, x)$ sont tous triviaux, ce qui prouve l'assertion.

2.3.6.4. *Toute fibration de Kan qui est une $\mathcal{W}$-équivalence est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence.*

Soit $p : X \longrightarrow Y$ une telle fibration de Kan. Comme l'application $\pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y$ est bijective, il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, et tout 0-simplexe x de X, $\pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, y)$, $y = p(x)$, est un isomorphisme de groupes. Or si X_y désigne la fibre de p en y, c'est un complexe de Kan qui est, en vertu de 2.3.6.2, $\mathcal{W}$-asphérique. Il résulte donc de 2.3.6.3 que X_y est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique, et la longue suite exacte de Serre associée à p permet de conclure.

2.3.6.5. *Toute $\mathcal{W}$-équivalence est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence.*

Soit u une $\mathcal{W}$-équivalence. On factorise u en une cofibration triviale i suivie d'une fibration de Kan p. En vertu de 2.2.9, i est une $\mathcal{W}$-équivalence, et donc par saturation, il en est de même de p. Il résulte donc de 2.3.6.4 que p est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.3.7. On peut montrer qu'un localisateur fondamental vérifie la condition de connexité ci-dessus si et seulement s'il est non trivial dans le sens où il ne contient pas toutes les flèches entre catégories non vides (cf. [5, 7.2]).

Références

[1] A. K. Bousfield, D.M. Kan. *Homotopy limits, completions, and localization.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, 1972.

[2] A. K. Bousfield, E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets*, in Geometric Applications of Homotopy Theory II* (Proc. Conf. Evanston, Ill., 1977, M. G. Barrat and M. E. Mahowald eds.), pages 80–130. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 658. Springer-Verlag, 1978.

[3] D.-C. Cisinski. Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles. Prépublication. http ://www.math.jussieu.fr/~cisinski/.

[4] D.-C. Cisinski. Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées. En préparation.

[5] D.-C. Cisinski. *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2002.

[6] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik, Band 35. Springer-Verlag, 1967.

[7] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, 1971.

[8] A. Grothendieck. *Pursuing stacks.* Manuscrit, 1983.

[9] P. S. Hirschhorn. *Localization of model categories.* En préparation.

[10] M. Hovey. *Model Categories.* Math. surveys and monographs, Vol. 63. Amer. Math. Soc., 1999.

[11] L. Illusie. *Complexe cotangeant et déformation II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, 1972.

[12] G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck.* Prépublication. http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/.

[13] D. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, 1967.

[14] D. Quillen. Higher algebraic K-theory*, Higher K-theories I*, pages 85–147. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, 1973.

[15] R. Thomason. *Cat* as a closed model category. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXI-3 :305–324, 1980.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case 7012, 2 place Jussieu, 75 251 Paris cedex 05 France

E-mail address: `cisinski@math.jussieu.fr`