

Sur les sous-modules instables des algèbres instables

Gérald Gaudens et Lionel Schwartz

May 10, 2002

Abstract

Cet article fait suite à une prépublication de Laurent Piriou et du second auteur [7]. Il contient des résultats reliés à la conjecture de finitude, plus précisément à la structure du treillis des sous-modules instables d'une algèbre instable réduite. Le premier résultat, dû au second auteur, montre que les sous-modules instables de l'algèbre de Dickson sont, soit l'algèbre toute entière, soit petits vis à vis de l'algèbre. Le second résultat, dû au premier auteur, montre que la série des socles d'une algèbre instable connexe réduite non-triviale est infinie, ceci avait été conjecturé par le second auteur dans [13]. Un outil important, dû au second auteur, est la construction et l'action de certaines opérations de Steenrod sur des classes appartenant à des algèbres instables.

1 Introduction

Soit \mathcal{F} la catégorie des foncteurs de la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie de tous les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels. Soit I_E l'objet de \mathcal{F} défini par la formule

$$W \mapsto \mathbb{F}_2^{\text{Hom}(W,E)} \quad ,$$

où le membre de droite est l'ensemble des fonctions (applications ensemblistes) de $\text{Hom}(W, E)$ dans \mathbb{F}_2 . Le foncteur I_E représente le foncteur $F \mapsto$

$F(E)^*$ de la catégorie \mathcal{F} vers la catégorie \mathcal{E} . Il y a une équivalence naturelle de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_E) \cong F(E)^* \quad .$$

Il en résulte que les foncteurs I_E sont des objets cogénérateurs injectifs de la catégorie \mathcal{F} . Le foncteur I_E est l'image par l'équivalence

$$f : \mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega \quad ,$$

construite dans [3], de la cohomologie modulo 2, H^*E , du 2-groupe abélien élémentaire E . Une motivation de cet article est un résultat G. Powell [11] qui porte sur la structure des sous-objets des foncteurs I_E . **Dans toute la suite on posera $d = \dim(E)$.**

Soit $D(d)$ l'algèbre de Dickson, c'est-à-dire l'algèbre des éléments invariants sous l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_2)$ dans l'algèbre polynomiale $H^*E \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]$. Le foncteur associé à l'algèbre de Dickson via l'équivalence $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$ associe à l'espace vectoriel W l'ensemble des fonctions $\mathrm{GL}(E)$ -invariantes de $\mathrm{Hom}(W, E)$ dans \mathbb{F}_2 , on le note D_d . Ce foncteur est en un certain sens [11] une brique élémentaire pour I_E .

Le premier résultat de cet article montre qu'un sous-foncteur de D_d est, soit D_d tout entier, soit petit en un sens *ad hoc* par rapport à D_d . Pour être plus précis, il faut rappeler les notations pour les objets simples de la catégorie \mathcal{F} . Ils sont indexés par les partitions μ qui sont 2-régulières pour les colonnes, c'est-à-dire telles que la partition conjuguée λ soit strictement décroissante, ou de manière équivalente, telles que $0 \leq \mu_i - \mu_{i+1} \leq 1$ pour tout i . Soit S_μ le foncteur simple associé à la partition μ . On renvoie à [4], [5], [7] section 2, pour des détails. Les objets simples qui apparaissent comme sous-quotients de I_E sont ceux qui correspondent aux partitions μ dont la partition conjuguée λ est de longueur au plus d , où d est la dimension de E . En fait les foncteurs simples correspondant à des partitions de longueur exactement d sont sous-quotients de I_E , mais pas de I_W avec W de dimension strictement inférieure à celle de E , [4], [2].

Théorème 1.1 *Soit D_d le foncteur de Dickson. Soit ϕ un morphisme non-trivial de $D_d \subset I_E$ dans I_W , avec $\dim(W) \geq d$. Supposons que $\phi = \sum_{i=1}^{i=T} \mu_i$, où les morphismes μ_i sont induits par des applications linéaires surjectives $W \rightarrow E$ dont les noyaux sont deux à deux distincts. Le noyau de ϕ ne contient pas comme sous-quotient de foncteurs simples S_μ , dont la partition conjuguée $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ soit telle que $\lambda_d \geq \log_2(T + 1)$.*

Cet énoncé peut s'appliquer à tous les sous-foncteurs de D_d . En effet, comme les foncteurs I_W sont des objets cogénérateurs injectifs pour la catégorie \mathcal{F} , tout sous-objet de D_d est intersection de noyaux d'applications de D_d dans I_W , W prenant des dimensions arbitraires. Les applications sont du type décrit dans 1.1, en autorisant des applications singulières. Un argument supplémentaire est donc nécessaire pour tenir compte de ces dernières. C'est la suite exacte suivante :

$$\{0\} \longrightarrow \omega_E D(d) \longrightarrow D(d) \xrightarrow{\oplus s^*} \bigoplus_{s \in \text{End}(E) - \text{GL}(E)} H^* E \quad .$$

Ici, ω_E est l'élément de Dickson supérieur, qui est le produit de toutes les classes non-nulles de degré 1 dans H^*E . Cette classe est annulée par s^* pour toute application singulière s . De plus, comme les applications s sont singulières leur image est contenue dans un facteur H^*V de H^*E avec $\dim(V) < \dim(E)$. Donc les facteurs simples qui apparaissent comme sous-quotient de $D(d)$ mais pas de $\omega_E D(d)$ sont associés à des partitions μ dont la partition associée est de longueur inférieure strictement à $d - 1$. On peut donc se ramener à ne considérer que des applications du type de celles décrites dans 1.1 sur $D(d)$ ou sur $\omega_E D(d)$ car les foncteurs simples qui ne sont pas pris en compte en travaillant sur $\omega_E D(d)$ sont tels que $\lambda_d = 0$. On obtient :

Corollaire 1.2 *Soit D_d le foncteur de Dickson, et F un sous-foncteur de D_d . Alors :*

- *soit le foncteur F est D_d tout entier;*
- *soit il existe une constante K telle que F ne contient pas comme sous-quotient de foncteur simple S_μ , dont la partition conjuguée $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ soit telle que $\lambda_d > K$.*

Il résulte du travail de G. Powell que ce résultat peut s'étendre. En effet, le foncteur I_E est somme directe finie de sous-objets indécomposables. Chaque facteur injectif indécomposable admet une filtration par des sous-objets du type de D_d , auxquels le théorème peut s'étendre [11]. Le corollaire 1.2 avait été formulé (sans démonstration) en appendice dans la version préliminaire de [10]. G. Powell l'y a reformulé, étendu et démontré au moyen d'autres techniques. La formulation finale donnée dans cet article est récente. Ce problème peut être posé, de manière équivalente, dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, c'est en fait dans ce cadre que nous

allons travailler. On a rappelé plus haut que la catégorie des modules instables quotientée par la sous-catégorie des modules nilpotents est équivalente à la catégorie de foncteurs analytiques, c'est-à-dire limite directe de foncteurs polynomiaux ([3], part 1). Le problème se traduit alors comme suit :

Proposition 1.3 *Soit ϕ une application non nulle de modules instables de $D(d)$ dans H^*W , avec $\dim(W) \geq d$. Supposons que $\phi = \sum_{i=1}^{i=T} \mu_i$, où les μ_i sont des applications d'algèbres deux à deux distinctes et injectives. Soit $x \in D(d) \setminus \{0\}$ qui admet pour unique vecteur de poids maximal la partition μ , de partition conjuguée $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Si $\lambda_d > \log_2(T + 1)$, alors l'élément $\phi(x)$ est non-nul.*

On dit ici que x admet pour unique vecteur de poids maximal la partition μ si le module instable réduit \mathcal{A}_2x , \mathcal{A}_2 désignant l'algèbre de Steenrod modulo 22, a pour unique quotient simple dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ l'objet simple S_μ [7]. Les précisions qui nous seront utiles sont rappelés plus loin. L'idée est qu'un élément vérifiant les hypothèses du corollaire "détecte" dans le foncteur correspondant un facteur simple S_μ . Un corollaire équivalent à 1.2 a évidemment lieu dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Passons maintenant au second résultat. La série de Loewy de l'objet M de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$ est définie itérativement de la manière suivante :

- $\text{Soc}_0M = \{0\}$;
- Soc_1M est le plus grand objet semi-simple de M (somme directe d'objets simples), Soc_1M est le socle de M , qu'on note aussi $\text{Soc}M$;
- pour $n \geq 0$, $\text{Soc}_{n+1}M$ est l'image réciproque par la projection $M \rightarrow M/\text{Soc}_nM$ de $\text{Soc}_1(M/\text{Soc}_nM)$.

On obtient ainsi une filtration de M :

$$\{0\} = \text{Soc}_0M \subset \text{Soc}_1M \subset \dots \subset \text{Soc}_nM \dots \subset M$$

La série de Loewy d'un objet de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ est convergente, M est limite directe des Soc_nM . Lorsqu'un module instable K admet une structure d'algèbre instable, sa série de Loewy est soumise à des restrictions :

Théorème 1.4 *Soit K une algèbre instable. On a l'alternative suivante:*

- Soit K est localement nilpotente (le sous-module de K constitué par les éléments de degré strictement positif est dans $\mathcal{N}il$);
- Soit la série de Loewy (dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$) de K ne stabilise pas.

Une algèbre instable réduite non-triviale est donc un module instable réduit de longueur infinie.

La démonstration de tout ce qui précède dépend du résultat qui suit, pour lequel on commence par rappeler et introduire des notations.

Notations : Pour tout entier n de décomposition 2-adique $2^{a_1} + \dots + 2^{a_h}$, on note $\alpha(n) = h$ la longueur de sa décomposition 2-adique, $\Gamma(n)$ pour $\min_{i, i \neq j} (a_i, |a_i - a_j|)$, et $C(n)$ pour $\min_i (a_i)$. On a $C(n) \geq \Gamma(n)$.

Proposition 1.5 Soient δ, ℓ, n, k des entiers non nuls. Supposons que :

- $\alpha(n) \geq \alpha(\ell)$
- $\Gamma(n) > \log_2(\delta)$
- $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$.

Alors il existe une opération de Steenrod $\theta(\delta, n, \ell, k)$, telle que pour toute algèbre instable K et pour tout élément de degré δ dans K :

$$\theta(\delta, n, \ell, k)(x^n) = x^{2^{k\ell}} .$$

L'opération $\theta(\delta, n, \ell, k)$ est donc universelle.

Dans la section 2 on démontrera 1.5. Dans les sections 3 et 4 on donne des résultats intermédiaires concernant 1.1, 1.2 et 1.3. Les sections 5 et 6 achèvent les démonstrations de 1.1 à 1.3. La section 7 on démontre 1.4.

2 Démonstration de la proposition 1.5

Cette section donne la démonstration de 1.5. Cette proposition permettra, dans la section 5 la transition entre la section 4 et les énoncés 3.1 et 3.2. Elle sera aussi utilisée dans la dernière section. Pour démontrer le proposition 1.5, il suffit de construire l'opération $\theta(\delta, n, \ell, k)$ dans le cas où x est ι_δ , l'élément non nul de degré δ de l'algèbre instable libre en un générateur de

degré δ . Cette algèbre est isomorphe à $H^*(K(\mathbb{Z}/2, \delta), \mathbb{Z}/2)$, la cohomologie d'un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/2, \delta)$.

Le sous-module instable engendré par ι_δ est $F(\delta)$, le module instable librement engendré en degré δ . Rappelons que l'algèbre de Steenrod \mathcal{A}_2 est une algèbre de Hopf, et que son dual \mathcal{A}_2^* est une algèbre polynômiale en des générateurs ξ_i de degré $2^i - 1$ [9].

L'opération $Q_a(\delta)$ est définie comme l'élément dual du monôme ξ_a^δ dans la base duale de la base monômiale de \mathcal{A}_2^* . En particulier $Q_s(2^t)$ est l'opération P_s^t [8]. Les opérations $Q_a(\delta)$ vérifient:

- $|Q_a(\delta)| = \delta(2^a - 1)$,
- $Q_a(n)(\iota_\delta^{2^b})$ est non nul si et seulement si $n = k2^b$ avec $k = 0, \dots, \delta$ et $Q_a(\delta 2^b)(\iota_\delta^{2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+b}}$, pour tout entier b .
- $\Delta(Q_a(n)) = \sum_{i+j=n} Q_a(i) \otimes Q_a(j)$

Pour démontrer la seconde propriété, on utilise la coaction de Milnor ([9], [2,section 1]) qu'on note λ selon l'usage :

$$\lambda : M \longrightarrow M \hat{\otimes} \mathcal{A}_2^*$$

le produit tensoriel étant complété. Si u est la classe de degré 1 dans $H^*B\mathbb{Z}/2$, on a pour tout entier $m \geq 0$:

$$\lambda(u^{2^m}) = \sum_{i \geq 0} u^{2^{i+m}} \otimes \xi_i^{2^m} \quad .$$

Le lemme qui suit permet de calculer λ sur un produit tensoriel :

Lemme 2.1 *On a :*

$$\lambda(x \otimes y) = (\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \mu)(\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(\lambda(x) \otimes \lambda(y))$$

τ désignant l'échange des second et troisième facteurs, et μ le produit de l'algèbre duale de l'algèbre de Steenrod.

L'unique morphisme de modules instables de $F(\delta)$ sur $H^*(B\mathbb{Z}/2^{\oplus \delta})$ qui envoie ι_δ sur le produit x_1, \dots, x_δ est injectif. L'image par ce morphisme de $\iota_\delta^{2^m}$ est $(x_1 \dots x_\delta)^{2^m} = x_1^{2^m} \dots x_\delta^{2^m}$. La deuxième propriété découle alors du calcul de la coaction de Milnor sur u^{2^m} dans $H^*B\mathbb{Z}/2$ et du lemme précédent :

$$\lambda((x_1 \dots x_\delta)^{2^m}) = \sum_{i_1, \dots, i_\delta} x_1^{2^{i_1+m}} \dots x_\delta^{2^{i_\delta+m}} \otimes \xi_{i_1}^{2^m} \dots \xi_{i_\delta}^{2^m}$$

On voit qu'un terme de la forme $\xi_{i_1}^{2^m} \dots \xi_{i_\delta}^{2^m}$ ne peut être égal à ξ_a^j que si $i_j \in \{0, a\}$, ce qui impose $j = k2^m$, où k est le cardinal de l'ensemble des indices i_j égaux à a . Ceci prouve la seconde propriété. La troisième propriété se déduit sans difficulté du fait que le coproduit de l'algèbre de Steenrod est dual du produit dans l'algèbre duale, qui est polynômiale :

$$\langle \Delta(Q_a(n)), \xi^I \otimes \xi^J \rangle = \langle Q_a(n), \xi^{I+J} \rangle$$

où I et J sont des multi-indices.

Par définition de $Q_a(\delta)$, cette quantité est non nulle si et seulement si $\xi^{I+J} = \xi_a^\delta$, i.e si et seulement si $\xi^I \otimes \xi^J = \xi^i \otimes \xi^j$ avec $i + j = \delta$. Des considérations précédentes, on dégage facilement le lemme suivant, qui guidera la suite des calculs.

Lemme 2.2 *Les opérations $Q_n(j)$ obéissent aux règles de calcul suivantes : Pour tous entiers a et n , et pour tout entier b tel que $2^b > \delta 2^a$, on a*

$$Q_n(\delta 2^a)(\iota_\delta^{2^a+2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+n}+2^b} \quad ,$$

et en particulier, pour $n = b - a$,

$$Q_{b-a}(\delta 2^a)(\iota_\delta^{2^a+2^b}) = \iota_\delta^{2^{a+b}+1} \quad .$$

Soient n et ℓ deux entiers de décompositions 2-adiques respectives $n = 2^{\alpha_1} + \dots + 2^{\alpha_h}$ et $\ell = 2^{\alpha_1} + \dots + 2^{\alpha_s}$, avec $h \geq s$. On suppose que les exposants a_i et α_i sont rangés en ordre croissant.

Plaçons nous d'abord dans le cas particulier où $\alpha(n) = h = \alpha(\ell)$. On pose alors :

$$\theta(\delta, n, \ell, k) = \prod_{i=h, \dots, 1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i}) \quad .$$

Dans cette formule on commence, à gauche, par $Q_{k+\alpha_h-a_h}(\delta 2^{a_h})$. La condition sur l'entier k dans 1.5 implique que toutes les quantités $k + \alpha_i - a_i$ sont positives et non-nulles. Les règles de calcul énoncées plus haut montrent que $Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})$ agit uniquement sur le facteur $\iota_\delta^{2^{a_1}}$ de ι_δ^n . Plus précisément, le calcul de $Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})$ sur ι_δ^n s'effectue comme suit :

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(\iota_\delta^n) = Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(\iota_\delta^{2^{a_1}+\dots+2^{a_h}}) \quad ,$$

donc

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(l_\delta^n) = \sum_{i+j=\delta 2^{a_1}} Q_{k+\alpha_1-a_1}(i)(l_\delta^{2^{a_1}}) Q_{k+\alpha_1-a_1}(j)(l_\delta^{2^{a_2}+\dots+2^{a_h}}) .$$

Dans la somme, le second membre du produit est non nul seulement quand $j = 0$. En effet il s'écrit :

$$\sum_{i_2+\dots+i_h=j} \prod_{t=2,\dots,h} Q_{k+\alpha_1-a_1}(i_t)(l_\delta^{2^{a_t}}) ,$$

et on a toujours $i_t \leq j \leq \delta 2^{a_1}$. Et par ailleurs $\delta 2^{a_1} < 2^{a_t}$, pour $t \neq 1$, car $\log_2(\delta) < \Gamma(n)$. On obtient donc :

$$Q_{k+\alpha_1-a_1}(\delta 2^{a_1})(l_\delta^n) = l_\delta^{2^{a_2}+\dots+2^{a_h}+2^{k+\alpha_1}} .$$

On applique alors l'opération $Q_{k+\alpha_2-a_2}(\delta 2^{a_2})$. Pour effectuer le calcul comme précédemment on doit avoir $\delta 2^{a_2} < 2^{a_t}$ pour $t > 2$, et $\delta 2^{a_2} < 2^{k+\alpha_1}$. La seconde condition est assurée par $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$ (le facteur 2 est superflu dans ce cas). On poursuit ainsi itérativement le calcul.

Dans le cas général, on a $s < h$, et on peut choisir pour $\theta(\delta, n, \ell, k)$ l'opération:

$$\theta(\delta, n, \ell, k) = Q_{k+\alpha_s-a_h-h+s}(\delta 2^{a_h+h-s}) \times \theta' \times \prod_{i=s-1,\dots,1} Q_{k+\alpha_i-a_i}(\delta 2^{a_i}) .$$

avec

$$\theta' = \prod_{i=h-s-1,\dots,0} Q_{a_h+i-a_{s+i}}(\delta 2^{a_{s+i}}) .$$

Le calcul est analogue à celui mené ci-dessus sauf que, dans la partie du calcul correspondant à θ' et l'inégalité $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$.

3 Résultats intermédiaires

Cette section énonce des résultats intermédiaires en vue de 1.1 à 1.3.

Soit m une application linéaire surjective d'un espace vectoriel W sur l'espace vectoriel E . L'application induite $m^* : H^*E \rightarrow H^*W$ est un monomorphisme, il l'est en particulier par restriction sur $D(d)$. Il résulte de l'injectivité de H^*W dans la catégorie \mathcal{K} [6] que toute application d'algèbre instable μ de $D(d)$ dans H^*W est restriction d'un morphisme d'algèbres instables de H^*E dans H^*W . De plus, si μ est un monomorphisme, il en est de

même pour tous les prolongements de μ à H^*E . Une application de modules instables $\phi : D(d) \rightarrow H^*W$ se prolonge, par injectivité de H^*W dans la catégorie \mathcal{U} , en une application de modules instables $\phi : H^*E \rightarrow H^*W$. Le théorème d'Adams-Gunawardena-Miller, Lannes-Zarati [1], [6] affirme que ϕ est somme de morphismes d'algèbres de $D(d)$ dans H^*W . De façon imagée les énoncés qui suivent disent le noyau d'un morphisme de modules instables de H^*E dans H^*W - qui est générique en un sens adéquat - ne peut pas contenir d'éléments trop compliqués des invariants de Dickson de H^*E .

Théorème 3.1 *Soit ϕ une application non-nulle de modules instables de $D(d)$ dans H^*W , avec $\dim(W) \geq \dim(E)$. Supposons que $\phi = \sum_{i=1}^{i=T} \mu_i$, où les applications μ_i sont des applications d'algèbres injectives deux à deux distinctes de $D(d)$ dans H^*W . Soient x et p deux éléments non nuls de $D(d)$. Alors pour tout entier n tel que $\alpha(n) \geq \log_2(T+1)$ et $\Gamma(n) > \log_2(|p|)$, l'élément $\phi(x^n p)$ est non nul.*

On peut prendre $x = \omega_E$, $\Gamma(n)$ a été défini dans l'introduction. Voici une variante du résultat précédent où l'on s'affranchit du fait que x soit un invariant de Dickson :

Proposition 3.2 *Soit ϕ une application non-nulle de modules instables de H^*E dans H^*W , avec $\dim(W) \geq \dim(E)$. Supposons que $\phi = \sum_{i=1}^{i=T} \mu_i$, où les applications μ_i sont des applications d'algèbres injectives deux à deux distinctes de $D(d)$ dans H^*W . Soit p un élément non nul de H^*E , alors pour tout entier n tel que $\alpha(n) \geq \log_2(T+1)$ et $\Gamma(n)$ est assez grand, $\phi((x_1 \dots x_d)^n p)$ est non nul.*

4 L'indépendance linéaire des caractères

Les deux résultats préliminaires suivants reposent sur l'indépendance linéaire des caractères. On y conserve les hypothèses faites dans les énoncés de la section 3 sur les applications μ_i .

Lemme 4.1 *Soit $x \in D(d) \setminus \{0\}$, sous les hypothèses faites ci-dessus sur les μ_i les éléments $\mu_i(x)$ sont deux à deux distincts. Le résultat a lieu également pour $x = x_1 \dots x_d$.*

Soit $x \in D(d) \setminus \{0\}$, supposons que $\mu_i(x) = \mu_j(x)$ pour $i \neq j$. Les images $\mu_i(E^*)$ et $\mu_j(E^*)$ sont distinctes par hypothèse. On peut donc trouver une application $\ell^* : H^*W \rightarrow H^*E$ telle que $\ell^* \circ \mu_i$ est l'identité, et $\ell^* \circ \mu_j$ n'est pas injective. On obtient alors $x = \ell^* \circ \mu_j(x)$. Mais $\ell^* \circ \mu_j$ est induite par une application linéaire non-inversible $\lambda : E \rightarrow E$. On a donc $x = \lambda^*(x)$, et pour tous les automorphismes α et β de E on a aussi $x = \alpha^* \circ \lambda^* \circ \beta^*(x)$. Soient, pour $i = 1, \dots, h$, des automorphismes α_i et β_i , et soit $\lambda_i = \beta_i \circ \lambda \circ \alpha_i$. On a :

$$x = \lambda_1^* \circ \lambda_2^* \circ \dots \circ \lambda_h^*(x) \quad .$$

Mais comme λ n'est pas injective, on peut choisir, dès que $h \geq d$, les automorphismes α_i et β_i de telle manière que $\lambda_h \circ \dots \circ \lambda_1$ soit nulle. On obtient alors $x = 0$ ce qui est exclu par hypothèse. La démonstration dans le cas $x = x_1 \dots x_d$ est laissée au lecteur.

Lemme 4.2 *Soient $x, p \in D(d) \setminus \{0\}$. Parmi T entiers successifs il existe au moins une valeur ℓ avec $0 < \ell \leq T$ et telle que $\phi(x^\ell p)$ n'est pas nul. Le résultat a lieu également si $x = x_1 \dots x_d$.*

On considère :

$$\phi(x^n p) = \sum_{i=1}^{i=T} \mu_i(x^n p) = \sum_{i=1, \dots, T} \mu_i(x)^n \mu_i(p) \quad ,$$

posons $a_i = \mu_i(x)$, $b_i = \mu_i(p)$. On va montrer que la somme

$$\sum_{i=1}^{i=T} b_i a_i^n$$

ne peut être nulle pour toute valeur de n . L'hypothèse d'injectivité des applications μ_i implique que les éléments a_i ne sont pas nuls, et d'après le lemme précédent ils sont deux à deux distincts. Si cette somme est nulle pour toute valeur de n le critère d'indépendance linéaire de caractères implique que tous les coefficients b_i sont nuls, or ils ne le sont pas car les applications μ_i sont injectives. Plus précisément, supposons que la somme

$$\sum_{i=1}^{i=T} b_i a_i^n$$

soit nulle pour T valeurs successives de l'entier n . Le déterminant du système linéaire obtenu est un déterminant de Van der Monde en les a_i , il est non-nul comme les a_i sont deux à deux distincts. L'argument montre que pour T valeurs successives de n on ne peut avoir $\phi(x^n p) = 0$. Soit ℓ tel que $\phi(x^\ell p) \neq 0$. Cette valeur ℓ peut être choisie telle que $0 < \ell \leq T$ et par conséquent telle que $\alpha(\ell) \leq \log_2(T + 1)$.

5 Démonstration de 3.1 et de 2.2

Commençons par 3.1. Soit δ le degré de x . On suppose donné un entier n satisfaisant aux hypothèses de 2.1, *i.e* tel que $\alpha(n) \geq \log_2(T + 1)$. D'après la proposition 1.5, pour tout entier k tel que $k > 2\log_2(n) + \log_2(\delta)$, et tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq T$, et donc que $\alpha(\ell) \leq \alpha(n)$, il existe une opération de Steenrod θ telle que $\theta(x^n) = x^{2^k \ell}$. D'après le lemme 4.2, k étant fixé, il existe une valeur $1 \leq \ell \leq T$ telle que $\phi(x^{2^k \ell} p) \neq 0$. On va montrer que pour l'opération θ construite en section 2 on a $\theta(x^n p) = x^{2^k \ell} p$, et donc que $\phi(x^n p) \neq 0$, car on a supposé que $\phi(x^{2^k \ell} p) \neq 0$. Les opérations en facteur dans θ sont de la forme $Q_t(\delta 2^b)$ avec $b \geq C(n)$. On a :

$$Q_t(\delta 2^b)(x^n p) = \sum_{i+j=\delta 2^b} Q_t(i)(x^n) Q_t(j)(p) \quad .$$

Le terme $Q_t(j)(p)$ est nul dès que l'excès (au sens de la base de Milnor) de $Q_t(j)$, soit j , est strictement supérieur à $|p|$. La somme ci-dessus se réduit donc à :

$$Q_t(\delta 2^b)(x^n p) = \sum_{j \leq |p|} Q_t(\delta 2^b - j)(x^n) Q_t(j)(p) \quad .$$

Le terme $Q_t(\delta 2^b - j)(x^n)$ est nul dès que la plus grande puissance de 2, soit $2^{C(n)}$ avec la notation introduite dans l'introduction, qui divise n ne divise pas $\delta 2^b - j$. En effet les opérations de Milnor non nulles sur x^n sont nécessairement duales de monômes de la forme $m 2^{C(n)}$. Or on a par hypothèse $j \leq |p| < 2^{C(n)} \leq 2^b$, et le résultat suit. On remarquera que la condition $p \in D(d)$ n'a pas été utilisée.

On passe maintenant à la démonstration de 3.2, qui utilise la remarque précédente. Soit Q_i l'opération de Milnor [8]. On a la formule suivante :

$$\prod_{i=1}^{i=d-1} Q_i(x_1 \dots x_d) = \omega_E \quad .$$

Cette formule se démontre en observant que les deux classes ont le même degré. Puis on montre que le terme de gauche est divisible par toutes les formes linéaires de degré 1. En effet, le terme de gauche est invariant par les permutations des variables et par les transvections, donc il l'est par tout le groupe linéaire. Pour démontrer qu'il est invariant par les transvections on utilise le fait que les Q_i sont des dérivations, et que par conséquent le produit $\prod_{i=1}^{i=d-1} Q_i$ est nul sur tout môme de degré d en les variables x_i divisible au moins par un carré. Plus généralement on a :

Lemme 5.1 *Soit n un entier tel que $\Gamma(n) > d$. Alors il existe une opération τ telle que :*

$$\tau((x_1 \dots x_d)^n) = \omega_E^n \quad .$$

Soit $n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_h}$, l'écriture 2-adique de l'entier n . On utilise l'opération :

$$\prod_{i=1}^{i=h} \left(\prod_{j=1}^{j=d-1} Q_j(2^{a_h-i+1}) \right) \quad .$$

Notons $\theta_i = \prod_{j=1}^{j=d-1} Q_j(2^{a_h-i+1})$. En utilisant la condition $\Gamma(n) > d$, et la formule $Q_n(2^m)(x^{2^m}) = (Q_n(1)(x))^{2^m}$, on obtient que :

$$\theta_1(x^n) = \omega_E^{2^{a_1}} x^{n-2^{a_1}} \quad ,$$

puis que :

$$\theta_2 \theta_1(x^n) = \omega_E^{2^{a_1} + 2^{a_2}} x^{n-2^{a_1}-2^{a_2}} \quad ,$$

et ainsi de suite. Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. Enfin on montre que, pourvu que $\Gamma(n) > d$ et que $|p| < 2^{C(n)}$, on a :

$$\tau((x_1 \dots x_d)^n p) = \omega_E^n p \quad ,$$

donc que :

$$\phi(\tau((x_1 \dots x_d)^n p)) = \phi(\omega_E^n p) \neq 0 \quad ,$$

et finalement que :

$$\phi((x_1 \dots x_d)^n p) \neq 0 \quad .$$

Pour conclure cette section on fait une remarque nécessaire à la suite, où le poids (on renvoie à [7]) d'un élément x est noté $w(x)$. On conserve les hypothèses précédentes sur p .

Lemme 5.2 *Supposons que $w(p) = \alpha(|p|)$. Alors*

$$w(\phi((x_1 \dots x_d)^n p)) = w((x_1 \dots x_d)^n p) \quad .$$

Le degré ℓ de $\omega_E^n p$ vérifie $\alpha(\ell) = w(\omega_E^n p)$. En effet, comme $\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| \geq \Gamma(n) > d$ on a $\alpha(|\omega_E^n|) = w(\omega_E^n)$. Par hypothèse $w(p) = \alpha(|p|)$, et $|p| < 2^{C(n)}$, l'égalité suit [7]. Le poids de $\phi((x_1 \dots x_d)^n p)$ est supérieur ou égal à celui de $\theta(\phi((x_1 \dots x_d)^n p)) = \phi(\omega_E^n p)$, lui même supérieur ou égal à $\alpha(|\phi(\omega_E^n p)|) = \alpha(n(2^d - 1) + |p|) = \alpha(n)d + w(p) = hd + w(p)$. Le résultat suit car cette quantité majore $w((x_1 \dots x_d)^n p)$ donc $\phi(w((x_1 \dots x_d)^n p))$.

6 Démonstration de la proposition 1.3

On reprend les notations et les hypothèses de 1.3, on va montrer que dans le module engendré par x il y a des classes, précisément celles correspondant aux F -générateurs semi-standards dans la terminologie de [7], auxquelles on peut appliquer le théorème 3.1. Ceci donne le résultat.

Soit $x \in D(d) \setminus \{0\}$ de poids n , admettant la partition μ pour seul vecteur de poids maximal, μ étant une partition 2-régulière pour les colonnes de l'entier n dont la partition conjuguée λ est de longueur d . Soit S_μ l'objet simple associé à μ .

On va montrer que x ne peut être dans le noyau de ϕ si $\lambda_d \geq \log_2(T + 1)$. Rappelons deux résultats sur les F -générateurs semi-standards. Un F -générateur semi-standard de S_μ est un élément de la forme :

$$w_\mu(\gamma) := \otimes_{i=1}^{i=d} \wedge_{1 \leq j \leq \lambda_i} u^{2^{\gamma(j)}} \quad ,$$

où les $\gamma(j)$ sont deux à deux distincts. Notons t pour λ_1 , et h pour λ_d , $t \geq h$. On peut supposer que x s'identifie dans le quotient simple du module qu'il engendre au F -générateur semi-standard, associé à une suite $\gamma = (\gamma(1), \dots, \gamma(t))$ que l'on supposera décroissante. Par un argument combinatoire facile cette classe s'écrit nécessairement d'après le corollaire 3.12 de [7] sous la forme suivante :

$$(x_1 \dots x_d)^{2^{\gamma(1)} + \dots + 2^{\gamma(h)}} z + y \quad ,$$

où y est un élément dont le poids est strictement inférieur à celui de x , soit inférieur à $n - 1$. La démonstration du théorème est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 6.1 *Sous des hypothèses convenables sur la suite des $\gamma(i)$ il existe une opération θ telle que $\theta(x) = (\omega_E)^{2^{\gamma(1)} + \dots + 2^{\gamma(h)}} z \neq 0$, et $\alpha(|\theta(x)|) = n$.*

En reprenant la démonstration du lemme 5.1, on obtient une opération τ telle que

$$\tau(x) = (\omega_E)^{2^{\gamma(1)} + \dots + 2^{\gamma(h)}} z + \tau(y) \quad .$$

Les conditions sur les constantes $\gamma(i)$ qui garantissent l'existence de τ sont les suivantes. Il faut que la constante $\Gamma(\ell)$ associée à l'entier $\ell = \sum_{i=1, \dots, h} 2^{\gamma(i)}$ soit telle que $\Gamma(\ell) > d$, et que $\sum_{i=h+1}^t \mu_i 2^{\gamma(i)} < 2^{\gamma(h)}$, ce qui correspond à la condition $|p| < 2^{C(\ell)}$.

Rappelons quelques propriétés supplémentaires du poids ([2], [13, Part 2], [7]). Un module instable réduit est dit de poids $w(M)$ inférieur ou égal à ω s'il est nul dans les degrés d tels que $\alpha(d) > \omega$. Un élément d'un module instable réduit est dit de poids inférieur ou égal à ω si le module qu'il engendre est de poids inférieur ou égal à ω , on a toujours $\alpha(|x|) \leq \omega(x) \leq |x|$ et $w(xy) \leq w(x) + w(y)$, pour tout x et y dans une algèbre instable. En particulier, $w(x^n) \leq nw(x)$.

Lemme 6.2 ([2], [12], A.2 de [7]) *Soit M un module réduit, $x \in M$ de poids ω . Il existe un élément $z \in \mathcal{A}_2 x$ de poids p et tel que $\alpha(|z|) = \omega(x)$.*

On peut donc trouver une opération ν telle que $\alpha(|\nu(z)|) = \omega(x)$, en particulier $\nu(z)$ est non-nul. On peut la construire à partir d'opérations P_t^s avec $s = \gamma(i)$, $i > h$, $t = \gamma(i) + u$, $u = 0, \dots, \mu_i - 1$. Si

$$2^{\gamma(k)} > \sum_{i=k+1}^{i=t} \sum_{u=0}^{u=\mu_i-1} 2^{\gamma(i)+u} \quad ,$$

pour $h \leq k \leq t$, alors $|\nu| + |z| < 2^{\gamma(h)}$. Et :

$$\nu \circ \tau(x) = (\omega_E)^{2^{\gamma(1)} + \dots + 2^{\gamma(h)}} \nu(z) + \nu \circ \tau(y) \quad ,$$

soit $\theta = \nu \circ \tau$, par construction $\alpha(|\theta(x)|) = n$. L'élément $\nu \circ \tau(y)$ est nul, étant de poids au plus $n - 1$ dans un degré h tel que $\alpha(h) = n$. On peut alors appliquer à l'élément précédent le théorème 3.1, avec un choix judicieux des constantes $\gamma(i)$, et pourvu que $h = \lambda_d \geq \log_2(T + 1)$. Ceci donne 1.3.

7 La série de Loewy des algèbres instables

Contrairement à la catégorie \mathcal{U} , la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ possède, ainsi qu'il a été dit plus haut, nombre d'objets simples. Ceci conduit naturellement à considérer la série de Loewy des objets de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$. Par abus de langage on désignera par série de Loewy d'un module instable sa série de Loewy comme objet de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

Proposition 7.1 (12) *La série de Loewy d'un objet M de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ est convergente : M est limite directe des $\text{Soc}_n M$.*

Remarque 7.2 *On peut évidemment définir une suite croissante de sous-modules dans un module instable de la manière décrite plus haut en considérant les objets simples dans \mathcal{U} , c'est-à-dire les suspensions du module trivial \mathbb{F}_2 . Mais dans ce cas la filtration n'est pas convergente, la limite est le plus grand sous-module localement fini.*

Lorsqu'un module instable K admet une structure d'algèbre instable, sa série de Loewy est soumise à des restrictions fortes. On montre :

Théorème 7.3 *Soit K une algèbre instable. On a l'alternative suivante:*

- *Soit K est localement nilpotente (le sous-module de K constitué par les éléments de degré strictement positif est dans $\mathcal{N}il$);*
- *Soit la série de Loewy (dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$) de K ne stabilise pas.*

Par exemple, l'algèbre de Dickson a une série de Loewy infinie. La démonstration repose sur la proposition 1.5 qui permet de construire sur l'algèbre K , dans le cas où elle n'est pas localement nilpotente, une filtration qui mineure en un certain sens la série de Loewy de K . Plus précisément, on utilise le critère suivant, qui est une conséquence directe de la définition de la série de Loewy, et qui permet de minorer la longueur de la série de Loewy d'un module.

Lemme 7.4 *Soit M un objet de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Si M admet une filtration:*

$$\{0\} \subset M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n \subset M$$

telle que toutes les inclusions soient strictes, et toutes les extensions induites par les inclusions $M_i/\text{Soc}_i M_i \subset M_{i+1}/\text{Soc}_i M_{i+1}$ soient essentielles dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$, alors la série de Loewy de M est au moins de longueur $n + 1$.

Pour démontrer 7.3, il suffit de se donner une algèbre instable réduite K non concentrée en degré 0, et de montrer que sa série de Loewy dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ ne stabilise pas. Soit K une telle algèbre; il existe par hypothèse un élément x de K tel que x^{2^k} est non nul pour tout k et donc tel que x^ℓ est non nul pour tout ℓ . Rappelons que l'on a toujours $\alpha(|x|) \leq \omega(x) \leq |x|$ et $w(xy) \leq w(x) + w(y)$, pour tout x et y dans K . En particulier, $w(x^n) \leq nw(x)$.

Si M est un module instable qui n'est pas réduit, on définit son poids comme celui du quotient de M par son plus grand sous-module nilpotent. On fera ci-dessous l'hypothèse que tous les modules rencontrés sont réduits, on peut toujours se ramener à cette situation, à l'aide du foncteur de localisation r [13]. Les détails sont laissés au lecteur.

On peut supposer (6.2) que $\alpha(|x|) = w(x)$. Soit $\delta = |x|$ et soit $r = \log_2 \delta$. On définit:

$$n(k) = \sum_{i=0}^k 2^{i(r+1)} \quad .$$

On a $\alpha(\delta n(k)) = (k+1)\omega$ car $2^{r+1} > \delta$, il suit que :

$$w(x^{2^t n(k)}) = (k+1)\omega \quad .$$

Pour tout entier t , on a:

$$\alpha(2^t n(k)) = k \quad \text{et} \quad \Gamma(2^t n(k)) = \min\{t, r+1\} \quad .$$

Dès que $h > 2\log_2(n(k+1)) + \log_2(\delta)$ et $t \geq r+1$, le quadruplet $(\delta, 2^t n(k+1), n(k), h)$ satisfait aux hypothèses de la proposition 1.5, et on a :

$$\theta(\delta, 2^t n(k+1), n(k), h)(x^{2^{r+1} n(k+1)}) = x^{n(k)2^h} \quad .$$

Pour tout entier k , on fixe un entier $\ell(k)$ tel que $\ell(k) > 2\log_2(n(k+1)) + \log_2(\delta)$, et afin d'alléger les notations, on note

$$\theta_{k,t} = \theta(\delta, 2^{t+r+1} n(k+1), n(k), \ell(k)) \quad \text{et} \quad y_p = x^{2^{r+1} n(p)} \quad .$$

Les relations précédentes s'écrivent :

$$\theta_{p+1,t}(y_{p+1}^{2^t}) = y_p^{2^{\ell(p)}} \quad .$$

On note aussi θ_k au lieu de $\theta_{k,0}$ et on a $\theta_{p+1}(y_{p+1}) = y_p^{2^{\ell(p)}}$.

On considère alors le sous-module K_p de K engendré par $\{x^{n(i)}; 0 \leq i \leq p\}$.

On a clairement $K_p \subset K_{p+1}$.

On va montrer que la filtration $\{K_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ induit une filtration sur K dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 7.4. On commence par observer :

Lemme 7.5 *Le poids du module K_p est $(p + 1)\omega$. En particulier K_p est trivial dans le degré des éléments $x^{n(k)}$, $k > p$.*

Le point essentiel est le suivant.

Lemme 7.6 *Pour tout entier p , le sous-module $K_p/\text{Soc}_p K_p$ n'est pas facteur direct dans $K_{p+1}/\text{Soc}_p K_{p+1}$. De plus, pour tout entier t , $y_{p+1}^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+1}$.*

On va montrer ce lemme par récurrence sur p .

Pour $p = 0$, on doit regarder l'inclusion

$$K_0 = K_0/\text{Soc}_0 K_0 \subset K_1/\text{Soc}_0 K_1 = K_1 \quad .$$

Le poids du module K_0 est égal à ω (le poids de x) qui est strictement inférieur à $\alpha(|y_1|) = 2\omega$ et K_0 est donc trivial dans le degré 2ω . Comme par ailleurs on a :

$$\theta_1(y_1) = y_0^{2^{\ell(0)}}$$

l'inclusion ne peut être scindée dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. On aurait sinon une application ϕ telle que $\phi(\theta_1(y_1)) = \theta_1(\phi(y_1)) = 0$ et $\phi(\theta_1(y_1)) = y_0^{2^{\ell(0)}} \neq 0$.

Le fait que $y_1^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc} K_1$ résulte de ce que $\text{Soc} K_0$ est facteur direct dans $\text{Soc} K_1$. En effet, si $y_1^{2^t}$ est dans $\text{Soc} K_1$, alors $y_0^{2^{\ell(0)}}$ serait également dans $\text{Soc} K_0$ du fait de la relation $\theta_{1,t}(y_1^{2^t}) = y_0^{2^{\ell(0)}}$. Mais comme on vient de le voir, cette relation implique que $\text{Soc} K_0 \subset \text{Soc} K_1$ est non scindée, ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant la propriété vraie à l'ordre p .

On considère l'inclusion :

$$K_{p+1}/\text{Soc}_{p+1} K_{p+1} \subset K_{p+2}/\text{Soc}_{p+1} K_{p+2} \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, l'élément y_{p+1} n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+1}$, donc y_{p+2} n'est pas dans $\text{Soc}_{p+1} K_{p+2}$.

On a la relation :

$$\theta_{p+2}(y_{p+2}) = y_{p+1}^{2^{\ell(p+1)}} \quad .$$

Un raisonnement identique à celui tenu pour $p = 0$ montre que l'inclusion considérée est non scindée dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

D'autre part, les relations

$$\theta_{p+2,t}(y_{p+2}^{2^t}) = y_{p+1}^{2^{\ell(p+1)}}$$

montrent que $y_{p+2}^{2^t}$ ne se projette pas dans $\text{Soc}(K_{p+2}/\text{Soc}_{p+1}K_{p+2})$, en utilisant un argument identique à celui donné pour $p = 0$ une fois encore. Ceci est équivalent au fait que $y_{p+2}^{2^t}$ n'est pas dans $\text{Soc}_{p+2}K_{p+2}$. Ceci montre l'énoncé au rang $p + 1$, et donc, par récurrence, le lemme 7.5. On peut alors appliquer la proposition 7.4 qui montre que la série de Loewy de K est au moins de longueur p pour tout entier p , et donc la série de Loewy de K est infinie, ce qui achève la démonstration du théorème.

References

- [1] J.F. ADAMS, J.H. GUNAWARDENA, H.R. MILLER, *The Segal conjecture for elementary abelian p -groups*, Topology 24 (1985), 435-460.
- [2] V. FRANJOU, L. SCHWARTZ, *Reduced unstable \mathcal{A} -modules and the modular representation theory of the symmetric groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 23 (1990), 593-624.
- [3] H.-W. HENN, J. LANNES, L. SCHWARTZ, *The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. (1993), Vol 115, Number 5, 1053-1106.
- [4] N. KUHN *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra I*, Am. Journal of Math. 116 (1993), 327-360.
- [5] N. KUHN *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra II*, 327-360; K-Theory 8 (1994) 395-426.
- [6] J. LANNES, S. ZARATI, *Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation*, Math. Z. 194 (1987), 25-59.
- [7] L. PIRIOU, L. SCHWARTZ *La filtration par le degré de la cohomologie des 2-groupes abéliens élémentaires.*, Prépublications Paris 13 22-2000.
- [8] H. MARGOLIS, *The Steenrod algebra*, North Holland.
- [9] J. MILNOR, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math. 67 (1958), 150-171.
- [10] G. POWELL, *The Artinian conjecture for $I \otimes I$* , J. Pure Appl. Alg., 128 (1998), 291-310.

- [11] G. POWELL, *The structure of indecomposable injectives in generic representation theory*, Trans. AMS, 350 (1998), 4167-4193.
- [12] L. SCHWARTZ, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed pointset conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series 1994.
- [13] L. SCHWARTZ *Unstable modules over the Steenrod algebra, functors, and the cohomology of spaces*. Actes de l'Euroconférence "Modules of infinite length" Bielefeld, Septembre 1998. Trends in Mathematics, 2000 Birkhäuser Verlag.
- [14] N.E. STEENROD, D.B.A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies 50, Princeton Univ. Press, 1962.