

Descente pour les n -champs

André Hirschowitz ¹ et Carlos Simpson ²

Abstract

We develop the theory of n -stacks (or more generally Segal n -stacks which are ∞ -stacks such that the morphisms are invertible above degree n). This is done by systematically using the theory of closed model categories (cmc). Our main results are: a definition of n -stacks in terms of limits, which should be perfectly general for stacks of any type of objects; several other characterizations of n -stacks in terms of “effectivity of descent data”; construction of the stack associated to an n -prestack; a strictification result saying that any “weak” n -stack is equivalent to a (strict) n -stack; and a descent result saying that the $(n + 1)$ -prestack of n -stacks (on a site) is an $(n + 1)$ -stack. As for other examples, we start from a “left Quillen presheaf” of cmc’s and introduce the associated Segal 1-prestack. For this situation, we prove a general descent result, giving sufficient conditions for this prestack to be a stack. This applies to the case of complexes, saying how complexes of sheaves of \mathcal{O} -modules can be glued together via quasi-isomorphisms. This was the problem that originally motivated us.

Résumé

On développe une théorie des n -champs (plus exactement celle des n -champs de Segal, qui sont des ∞ -champs où les morphismes sont inversibles en degré $\geq n$). Pour cela on utilise systématiquement la théorie des catégories de modèles fermées (cmf). Nos contributions principales sont: une définition de n -champ en termes de limites, qui est parfaitement généralisable à toutes sortes d’autres champs; plusieurs autres caractérisations des n -champs en termes d’“effectivité” des données de descente; la construction du champ associé à un n -préchamp; un résultat de strictification assurant que tout n -champ “faible” est équivalent à un n -champ (strict); et un résultat de descente affirmant que le $(n + 1)$ -préchamp des n -champs (sur un site) est un $(n + 1)$ -champ. Pour d’autres exemples, nous partons d’un préfaisceau de cmf “de Quillen à gauche” et introduisons le 1-préchamp de Segal associé. Dans ce cadre, nous prouvons un résultat de descente général donnant des conditions suffisantes pour que ce préchamp soit un champ. Ceci s’applique au cas des complexes, et dit comment on peut recoller des complexes de \mathcal{O} -modules à l’aide de quasi-isomorphismes. C’est ce problème qui était la motivation initiale du présent travail.

¹Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

²CNRS, Laboratoire Emile Picard, Université Toulouse 3, 31062 Toulouse cedex, France

Sommaire

1. Introduction—p. 4

Motivation, description des résultats.

2. Les n -catégories de Segal—p. 16

Définition des n -catégories de Segal, troncation, intérieur. La méthode générale pour obtenir une structure de cmf, et son application aux n -catégories de Segal. Les classes d'homotopie de morphismes.

3. Les n -préchamps de Segal—p. 36

La structure de cmf pour les n -préchamps de Segal (notions d'équivalence faible, de cofibration, de fibration), comparaison avec la topologie grossière, compatibilité avec la troncation, propriété. Données de descente.

4. Les functorialités p^* , p_* , $p_!$ —p. 50

Relation entre n -préchamps de Segal sur \mathcal{X} et \mathcal{Z} pour un foncteur $p : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, critères de préservation des objets fibrants.

5. La structure de type Bousfield-Kan d'après Hirschhorn—p. 54

La structure HBKQ de cmf pour les n -préchamps de Segal, où les cofibrations sont obtenues par libre addition de cellules; application à la notion de donnée de descente.

6. Le point de vue de la localisation—p. 61

Les cmf de n -préchamps de Segal pour la topologie \mathcal{G} peuvent être obtenues à partir des cmf pour la topologie grossière par inversion de flèches correspondant aux cribles de \mathcal{G} .

7. Catégories de Segal et catégories simpliciales—p. 66

Relation entre les 1-catégories de Segal et les catégories simpliciales; produits et coproduits homotopiques et l'argument de Gabriel-Zisman.

8. Localisation de Dwyer-Kan—p. 71

La localisation de Dwyer-Kan fournit beaucoup d'exemples de catégories simpliciales, et permet en outre de montrer que toute 1-catégorie de Segal est équivalente à une catégorie simpliciale.

9. Première définition de champ—p. 85

Définition de n -champ de Segal comme n -préchamp de Segal A dont les $A(X)$ sont des n -catégories de Segal et pour lequel le morphisme $A \rightarrow A'$ vers le remplacement \mathcal{G} -fibrant est une équivalence objet-par-objet. Notion de champ associé, compatibilités.

10. Critères pour qu'un préchamp soit un champ—p. 92

A est un n -champ de Segal si et seulement si les $A_1/(x, y)$ sont des $n - 1$ -champs de Segal sur \mathcal{X}/X pour tout $x, y \in A_0(X)$, et si les données de descente pour un crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ sont effectives. On a plusieurs versions de ce critère.

11. Catégories de modèles internes—p. 106

On définit la notion de catégorie de modèles interne et on l'utilise pour définir le $n + 1$ -préchamp $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ des n -champs de Segal au-dessus de \mathcal{X} , ainsi que sa $n + 1$ -catégorie de Segal $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ de sections globales. Comparaison avec la localisée de Dwyer-Kan.

12. La famille universelle—p. 123

On définit un morphisme $nSeCHAMP(\mathcal{X}) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$, on montre qu'il est pleinement fidèle (et on énonce le résultat 12.1 qui identifie son image essentielle). Ceci nous conduit à une nouvelle version de la notion de champ.

13. Le champ associé à un préchamp—p. 134

On définit le foncteur “champ associé à un préchamp” de $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{gro})$ vers $nSeCHAMP(\mathcal{X}^g)$, qui est adjoint au foncteur d'inclusion dans l'autre sens.

14. Limites—p. 142

Calcul des limites à l'aide des structures de cmf; définition des champs en termes de limites.

15. Un peu plus sur la condition de descente—p. 145

On refait les critères de §10 en termes de limites, et on explicite le calcul de ces limites dans le cas d'un crible défini par une famille couvrante, en termes de limites prises au-dessus de Δ .

16. La construction de Grothendieck—p. 151

On construit la “ n -catégorie fibrée” associée à un n -préchamp au-dessus d'une catégorie, opération notée comme une intégrale suivant Thomason. On compare les sections du n -préchamp et celles de la n -catégorie fibrée associée.

17. Préfaisceaux de Quillen—p. 169

On introduit la notion de préfaisceau de Quillen à gauche, une sorte de préfaisceau de cmf où les foncteurs de restriction sont des foncteurs de Quillen à gauche. On donne diverses structures de cmf pour les sections de l'intégrale d'un préfaisceau de Quillen.

18. Strictification—p. 182

On strictifie les sections faibles des 1-préchamps de Segal qui proviennent de préfaisceaux de Quillen par localisation de Dwyer-Kan. Ceci permet de strictifier des familles faibles de n -catégories de Segal, en n -préchamps de Segal. Fin de la preuve de 12.1.

19. La descente pour les préfaisceaux de Quillen à gauche—p. 206

Pour un préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{M} on donne un critère pour que le 1-préchamp de Segal associé $L(\mathbf{M})$ soit un champ.

20. Exemple: la descente pour les n -champs—p. 219

On utilise le critère du §19 pour prouver que $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ est un $n + 1$ -champ de Segal. Ceci généralise le théorème classique de recollement des faisceaux. On donne aussi une preuve directe.

21. Exemple: la descente pour les complexes—p. 228

On utilise le critère du §19 pour prouver que $L(Cpx_{\mathcal{O}}, qis)$ est un 1-champ de Segal, pour un site annelé raisonnable $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$. On énonce un résultat de géométricité pour le champ de modules des complexes parfaits.

1. Introduction

La descente: des modules aux complexes

Pour donner une idée du contenu du présent travail, on peut l’aborder, en première approximation, comme une contribution à la théorie des complexes de faisceaux de modules. Pour le mettre en perspective, nous commençons par résumer la théorie des faisceaux de modules localement libres (de rang fixé r):

Il existe un champ BG , muni d’un module universel U et d’un fibré universel dont U est le module des sections. Ce champ “classifie” les modules localement libres de rang r sur les schémas en ce sens que le champ de modules $Fib_{X,r}$ de tels modules sur un schéma X s’identifie au champ des morphismes de X vers BG . Le champ BG est algébrique et si X est projectif, il en est de même pour $Fib_{X,r}$. Le champ BG est un ouvert dans (au moins) deux champs plus généraux Coh et $Qcoh$ qui classifient respectivement les faisceaux cohérents et quasi-cohérents (on n’entre pas ici dans les détails concernant en particulier la topologie choisie). Le fait que $Qcoh$ soit un champ signifie plus concrètement que les données de descente pour un module quasi-cohérent (ou pour un morphisme entre deux modules quasi-cohérents) sont effectives. On peut observer que Coh n’est pas algébrique, ce qui est un peu contrariant.

On se propose de généraliser cette théorie au cas des complexes. Le point crucial est qu’on veut parler de recollement de complexes à l’aide non pas d’isomorphismes mais de *quasi-isomorphismes* (compatibles en un sens adéquat), de sorte que ce travail relève dans une large mesure de la théorie de l’homotopie.

Les champs dont on vient de parler sont des champs de catégories et lorsqu’on se préoccupe d’étendre ce qui précède au cas des complexes, il faut tôt ou tard organiser ces complexes en catégories munies de structures adéquates.

La solution qui vient d’abord à l’esprit consiste à considérer des *catégories dérivées*. On peut en effet former par exemple le préchamp D_{Qcoh} qui à un schéma affine $Spec A$ associe la catégorie dérivée $D_{Qcoh}(A)$ de celle des A -modules quasi-cohérents. Demander si ce préchamp est un champ est la façon savante de demander si on peut recoller des complexes à l’aide de quasi-isomorphismes “compatibles” (i.e. vérifiant une condition de cocycle par ailleurs assez technique). Cette question a été très tôt reconnue comme impertinente, les objets de ces catégories dérivées étant “de nature essentiellement non-recollables”³ ([12] Exposé 0, p.11).

³Pour le lecteur qui ne serait pas convaincu que cette voie des catégories dérivées est sans issue, signalons que le sous-préchamp (plein) $Parf^{\{0,1\}}$ de D_{Qcoh} des complexes parfaits à support cohomologique dans $[0, 1]$ est bien un champ, mais qu’il n’est pas localement algébrique (au sens d’Artin): en fait, comme on le verra plus loin, le “bon” objet est un 2-champ localement algébrique (au sens de [93]).

Les homotopies supérieures

Pour formuler les problèmes de recollement des complexes définis à quasi-isomorphisme près, il faut considérer des homotopies supérieures, ce qui complique singulièrement le tableau. En topologie ordinaire, le prototype d'un tel problème consiste par exemple à recoller sur $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ des données du genre suivant: pour $1 \leq i \leq 4$, C_i est un complexe sur U_i ; pour $1 \leq i \leq j \leq 4$, f_{ij} est une équivalence d'homotopie entre les restrictions C_{ij} et C_{ji} de C_i et C_j à $U_{ij} := U_i \cap U_j$; pour $1 \leq i \leq j \leq k \leq 4$, h_{ijk} est une équivalence d'homotopie entre les restrictions de $f_{jk} \circ f_{ij}$ et f_{ik} à $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$; et les h_{ijk} doivent encore vérifier une condition de compatibilité sur $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$, condition dont la formulation même n'est pas immédiate. On conçoit facilement comment, pour des recouvrements plus complexes (en topologie étale par exemple), la combinatoire de ce genre de données de descente peut devenir inextricable. La définition que nous donnons des données de descente dépasse (ou évite) les considérations combinatoires.

Dans la situation précédente les f_{ij} sont des flèches entre complexes, les h_{ijk} doivent être considérées comme des 2-flèches, et les données sur $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$ seront des 3-flèches. Concrètement, h_{ijk} par exemple est un morphisme d'objet gradué de degré -1 entre C_i et C_k sur U_{ijk} , établissant une homotopie entre $f_{jk} \circ f_{ij}$ et f_{ik} . De même, l'information cruciale dans une 3-flèche est un morphisme d'objet gradué de degré -2 établissant une homotopie entre morphismes de degré -1 , etc. On a donc bien besoin d'une notion d' ∞ -catégorie comme préconisée par Grothendieck [49], avec des n -flèches pour tout n et les lois de composition adéquates.

Catégories simpliciales ou de Segal

En fait, une forme rudimentaire d' ∞ -catégorie adaptée à nos complexes est connue depuis trente ans, c'est la notion de catégorie simpliciale. Introduite en théorie d'homotopie par Kan et Quillen (voir [83]), cette notion a été reprise par Dwyer et Kan [31] [32] [33]: en particulier, à toute catégorie M munie d'une sous-catégorie W , ces auteurs associent une catégorie simpliciale "localisée" $L(M, W)$. Celle-ci capture bien l'information homotopique concernant le couple (M, W) dans la mesure où si M est une catégorie de modèles fermée (cmf) simpliciale au sens de Quillen, et W sa sous-catégorie des équivalences, alors $L(M, W)$ est équivalente à la catégorie simpliciale des objets cofibrants et fibrants de M . Ceci montre par exemple que la structure simpliciale sur une cmf est unique à équivalence près, et même ne dépend (toujours à équivalence près) que de la sous-catégorie des équivalences.

Plus particulièrement, dans la situation des complexes si Ch désigne la catégorie des complexes et qis la sous-catégorie des équivalences faibles, alors la catégorie simpliciale $L(Ch, qis)$ représente adéquatement la théorie homotopiquement des complexes. ⁴

⁴Ceci veut dire que si A et B sont des complexes alors l'ensemble simplicial de morphismes dans L entre A et B est équivalente à l'ensemble obtenu par application de la construction de Dold-Puppe au

Pour des raisons techniques, nous utilisons systématiquement la notion un peu plus générale de catégorie de Segal: une catégorie de Segal est une catégorie simpliciale “large”, en ce sens qu’on n’impose pas que la composition soit strictement associative. Toute catégorie simpliciale est une catégorie de Segal et, inversement, on montre que toute catégorie de Segal est équivalente à une catégorie simpliciale (§7).

Les problèmes posés

Ainsi les complexes de faisceaux de modules s’organisent (par exemple sur le site étale) en préfaisceaux de catégories de Segal. Entre autres, on peut définir \mathcal{D}^+ par $\mathcal{D}^+(Spec A) = L(Ch^+(A), qis)$, où $Ch^+(A)$ est la catégorie des complexes de A -modules bornés à gauche et qis sa sous-catégorie des quasi-isomorphismes. On peut maintenant exprimer de la façon suivante les problèmes auxquels le présent travail est consacré:

- identifier les problèmes de descente pertinents concernant de tels préfaisceaux;
- formuler ces problèmes dans le cadre d’une théorie des champs (généralisés; dans cette introduction on dira ∞ -champs) adaptée aux catégories de Segal; dans cette théorie, il faudra bien entendu que les champs soient les préchamps dans lesquels les données de descente se recollent;
- identifier une classe de tels préfaisceaux, contenant nos préfaisceaux de complexes, et dans lesquels ces problèmes de descente admettent une solution.

Au nombre des problèmes de descente qu’on veut traiter doivent figurer les problèmes “concrets” de recollement concernant les complexes, dont nous donnons maintenant des exemples. Signalons toutefois que nous n’abordons pas directement ces problèmes dans le présent travail—notre but étant dans un premier temps de mettre en place le cadre dans lequel de telles questions doivent naturellement être considérées—et nous ne les formulons donc qu’en guise de motivation.

- Soit k un corps, X un k -schéma régulier, et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . On sait que \mathcal{F} admet localement des résolutions projectives finies. Peut-on recoller ces résolutions en un objet global?

complexe tronqué $\tau^{\leq 0}\mathrm{Hom}(A, B)$. On peut noter qu’une catégorie simpliciale L donne lieu (suivant l’idée de Grothendieck [49]) à une ∞ -catégorie $\Pi_\infty \circ L$ par application de la construction “ ∞ -groupeoïde de Poincaré” Π_∞ à chacune des ensembles simpliciales $Hom_L(x, y)$. Dans cette ∞ -catégorie pour les complexes, l’ ∞ -catégorie des morphismes entre deux complexes est équivalente à $\gamma\mathrm{Hom}(A, B)$, où γ est la construction bien connue qui à un complexe de groupes abéliens F^\cdot associe l’ ∞ -catégorie stricte $\gamma(F^\cdot)$ dont les objets sont les $x \in F^0$ avec $d(x) = 0$, les morphismes entre x, y sont les $f \in F^{-1}$ avec $d(f) = y - x$, les 2-morphismes entre f et g sont les $u \in F^{-2}$ avec $d(u) = g - f$ ainsi de suite.

- Dans [12] 0.4.4, pour un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de schémas, on construit localement dans X un complexe cotangent bien défini à quasi-isomorphisme près. Peut-on recoller ces constructions locales? ⁵
- Toujours dans [12] (e.g. 0.4.2), on pose le problème (ultérieurement résolu par Deligne et Illusie, voir [62] I.4.2) de la définition des puissances extérieures d'un complexe parfait, que nous reformulons à notre convenance: sachant qu'on peut définir, sur les complexes bornés de modules libres de type fini, un foncteur puissance symétrique Λ^i qui transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, et sachant que les complexes parfaits sont ceux qui sont localement quasi-isomorphes à des complexes bornés de faisceaux libres de type fini, comment définir la puissance symétrique d'un complexe parfait?
- Dans les travaux de O'Brian, Toledo et Tong [77], [78], [104], [105], [106] consacrés à une autre question issue de SGA 6, celle des *formules de Riemann-Roch*, on trouve des calculs de Čech qui sont certainement un exemple de situation de descente pour les complexes. Un meilleur cadre général pour ces calculs pourrait contribuer à notre compréhension des formules de Riemann-Roch.
- Il y a certainement d'autres applications potentielles que celles qui concernent les complexes, voir par exemple le travail de Hinich [57] qui traite un problème de descente pour des 1-groupoïdes en relation avec un problème de descente correspondant pour des préfaisceaux d'algèbres de Lie différentielles gradués.

Les ∞ -champs

Avant de présenter notre vision des données de descente, il nous faut expliquer notre théorie des ∞ -champs. On a compris plus haut qu'il nous faut—au minimum—une théorie des champs de catégories simpliciales (ou de Segal), comme on a une théorie des champs d'ensembles (les faisceaux) et une théorie des champs de catégories (les champs “classiques”). Et dans une théorie des champs de catégories simpliciales, le champ des morphismes entre deux objets (i.e. sections sur un ouvert) devra être un champ d'ensembles simpliciaux. On voudrait donc bien d'une théorie des Γ -champs, où Γ pourrait être indifféremment la catégorie des ensembles ou celle des catégories, ou celle des catégories simpliciales, ou encore celle des ensembles simpliciaux. Un Γ -préchamp sur un site \mathcal{X} est alors un préfaisceau sur \mathcal{X} à valeurs dans Γ (on prend des préfaisceaux stricts pour simplifier, et parce qu'on espère qu'au bout du compte ça revient au même). Et l'idée (naïve)

⁵Dans loc. cit. on considère qu' “il n'est pas possible de procéder par simple recollement” et on s'en tire autrement.

pour exprimer qu'un Γ -préchamp F est un Γ -champ consisterait à demander que pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible \mathcal{B} couvrant X , $F(X)$ soit la limite (dans Γ) de la restriction de F à la catégorie \mathcal{B} . Si Γ est la catégorie des ensembles on retrouve évidemment la notion de faisceau, mais si Γ est la catégorie des catégories, ça ne va plus. Pour rectifier le tir et retomber dans ce cas sur les champs usuels, il suffit de munir Γ de sa structure de 2-catégorie et de demander que $F(X)$ soit la 2-limite (dans Γ) de la restriction de F à \mathcal{B} . Pour généraliser cette situation, on va donc considérer que Γ est une ∞ -catégorie ⁶ dans laquelle on sait spécifier les limites homotopiques (il n'est pas nécessaire qu'elles existent). On peut alors, suivant une suggestion formulée par le second auteur dans [95] 6.4, dire qu'un Γ -champ est un Γ -préchamp F tel que pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible \mathcal{B} couvrant X , $F(X)$ soit la limite (dans Γ) de la restriction de F à la catégorie \mathcal{B} .

Les 0-champs de Segal

Dans le cas où Γ est l' ∞ -catégorie (techniquement: la 1-catégorie de Segal) des ensembles simpliciaux, nous confrontons avec succès ce point de vue avec la théorie existante des préfaisceaux simpliciaux, développée par K. Brown [19], Illusie [62], Joyal dans une lettre à Grothendieck [65], Jardine [63], et Thomason [100]. ⁷ Dans ce cas on dispose de la notion de limite homotopique introduite par Bousfield et Kan [15] et nos Γ -champs, que nous appelons 0-champs de Segal, constituent une classe de préfaisceaux simpliciaux déjà considérée par Jardine (les préfaisceaux flasques par rapport à tout objet du site [63]) et, dans le cadre très voisin des préfaisceaux de spectres, par Thomason [100]. A tout préfaisceau simplicial (ou 0-préchamp de Segal), on sait associer naturellement un 0-champ de Segal ayant les mêmes faisceaux (et non préfaisceaux) d'homotopie.

Les n -champs de Segal

Il est donc naturel d'étendre cette démarche au cas des catégories simpliciales ou de Segal. Pour cela, il nous faut munir la classe Γ des catégories de Segal d'une structure d' ∞ -catégorie (techniquement, c'est une 2-catégorie de Segal) où l'on puisse définir la notion de limite (homotopique). Pour prendre de la marge, on définit carrément les n -catégories de Segal (§2): leur construction suit de près celle des n -catégories de Tamsamani [98]. Les 0-catégories de Segal sont les ensembles simpliciaux, et les $(n + 1)$ -catégories de Segal sont des objets simpliciaux dans la catégorie des n -catégories de Segal vérifiant les conditions (de Segal) qui expriment que la composition, à défaut d'être bien définie

⁶On ne prend pas la peine ici de donner une définition d' ∞ -catégorie: on considère simplement que les n -catégories de Tamsamani [98] ainsi que leurs variantes introduites ci-dessous, les n -catégories de Segal, sont des ∞ -catégories.

⁷On a même la ∞ -catégorie (catégorie simpliciale ici) des foncteurs faibles de \mathcal{X}° vers Γ grâce au travail de Cordier et Porter [24].

et associative, est définie et associative à homotopie près. L’avantage des n -catégories de Segal sur les ensembles simpliciaux réside dans le fait qu’on peut y trouver des i -morphisms non-inversibles, du moins pour $i \leq n$. Grâce à la notion de cmf *interne* (§11), on montre qu’à des considérations de nature ensembliste près, les n -catégories de Segal s’organisent en une $(n+1)$ -catégorie de Segal $nSeCAT$ (§11), où l’on sait définir les limites homotopiques (§14). On peut donc introduire les (Γ) -champs de n -catégories de Segal, que nous appelons n -champs de Segal. Techniquement, on commence par donner une définition à la Jardine des n -champs de Segal (§9) et ce n’est qu’au §14 qu’on retrouve la belle définition mentionnée plus haut. Le problème de la descente des complexes prend alors la forme suivante: le 1-préchamp de Segal des complexes est-il un 1-champ de Segal?

Données de descente généralisées

Cette formulation n’est pas totalement satisfaisante, dans la mesure où l’on ne voit pas suffisamment bien comment elle recouvre les exemples concrets mentionnés plus haut. Heureusement, nous savons introduire une notion de donnée de descente (et aussi, bien sûr, de donnée de descente effective) à valeurs dans un n -préchamp de Segal, qui joue le rôle qu’on attend d’elle. En fait, on explique ici ce qu’on appelle *donnée de descente généralisée* (dddg) et on commence par le cas plus familier des préfaisceaux simpliciaux: une dddg à valeurs dans le préfaisceau simplicial A sur le site \mathcal{X} est un morphisme de préfaisceaux simpliciaux $\delta : D \rightarrow A$ où D est *contractile* en ce sens que le 0-champ de Segal associé à D est équivalent à l’objet final $*_{\mathcal{X}}$. (Un tel D est essentiellement la même chose qu’un *hyper-recouvrement* au sens de Verdier [4].) Une telle donnée δ est dite *effective* si elle est équivalente à une donnée $\delta' : D \rightarrow A$ qui se factorise à travers $*_{\mathcal{X}}$. Ces définitions s’étendent sans changement au cas où A est un n -préchamp de Segal, les préfaisceaux simpliciaux pouvant aussi être vus comme des n -préchamps de Segal (§2).

Il convient d’observer que la question de l’effectivité des dddg dans un n -préchamp de Segal A ne concerne que l’*intérieur* A^{int} de A : l’intérieur d’une n -catégorie de Segal S est l’ensemble simplicial obtenu à partir de S grosso modo en ne conservant que les morphismes (de tous ordres) qui sont inversibles à homotopie près, et cette construction s’étend évidemment aux n -préchamps de Segal.

La définition précédente rend bien compte des exemples “concrets” mentionnés plus haut. Ainsi, pour le premier exemple, on peut prendre le préfaisceau simplicial (contractile) D tel que $D(U)$ soit l’ensemble ⁸ simplicial des résolutions projectives finies de la restriction de \mathcal{F} à U : les 1-simplexes sont les quasi-isomorphismes entre résolutions (compatibles à l’augmentation). . . .

⁸Ici comme ailleurs dans ce travail, on ne prête pas trop d’attention aux questions liées à la différence entre ensemble et classe.

Caractérisation des n -champs de Segal par la descente

Pour expliquer en quoi nos notions de champs sont à leur tour adaptées à ces notions de données de descente, il nous faut introduire quelques notations. Si A est une n -catégorie de Segal, les (1-)morphisms de A s'organisent en une nouvelle $(n - 1)$ -catégorie de Segal qu'on note $Fl(A)$. Si x et y sont deux objets de A , on note $Fl(A)(x, y)$ la sous- $(n - 1)$ -catégorie de Segal de $Fl(A)$ des morphismes de source x et but y . Plus généralement, si x et y sont deux objets de $Fl^{i-1}(A)$, on note $Fl^i(A)(x, y)$ la sous- $(n - i)$ -catégorie de Segal de $Fl^i(A)$ des morphismes de source x et but y .⁹ Ces notations s'étendent au cas où A est un n -préchamp de Segal sur un site \mathcal{X} : $Fl^i(A)$ est alors un nouveau $(n - i)$ -préchamp de Segal sur \mathcal{X} , et si x et y sont des sections de $Fl^{i-1}(A)$ sur un objet U de \mathcal{X} , $Fl^i(A)(x, y)$ est un $(n - i)$ -préchamp de Segal sur le site \mathcal{X}/U . Avec ces notations, on montre le résultat suivant:

Théorème 1.1 *Soit A est un n -préchamp de Segal sur le site \mathcal{X} . On suppose que les valeurs de A sont des n -catégories de Segal (cette condition est vide pour $n = 0$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) A est un n -champ de Segal;
- (ii) (a) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout $x, y \in A_0(X)$ le n -préchamp de Segal $Fl(A)(x, y)$ sur \mathcal{X}/X est un n -champ de Segal; et
(b) les données de descente pour A sont effectives.
- (iii) (a') pour tout $i \geq 1$, pour tout $X \in \mathcal{X}$ et pour tous $x, y \in Fl^{i-1}(A)(X)$ les données de descente à valeurs dans le $(n - i)$ -préchamp $Fl^i(A)(x, y)$ sont effectives; et
(b) les données de descente à valeurs dans A sont effectives.

Ce théorème formalise l'idée (qui ressort entre autres de Giraud [43] et Laumon-Moret Bailly [68]) qu'un champ est un préchamp où les données de descente sont effectives, et comme l'effectivité des données de descente ne concernent que l'intérieur, il caractérise nos n -champs de Segal en des termes propres à la théorie des préfaisceaux simpliciaux.

Données de descente et topologie grossière

Cependant, la définition même des données de descente (généralisées) qu'on a formulée plus haut faisait intervenir la notion de 0-champ de Segal et il est donc temps de donner notre définition des (vraies) données de descente à valeur dans un préfaisceau simplicial, puisqu'il reste vrai que ce cas suffit. Soit \mathcal{X} un site muni d'un crible \mathcal{B} couvrant et d'un préfaisceau simplicial A . Une donnée de descente sur \mathcal{B} à valeurs dans A est un diagramme δ de préfaisceaux simpliciaux:

$$*_\mathcal{B} \leftarrow D \rightarrow A$$

⁹On fait la convention que pour un i donné on remplace nos n -catégories de Segal par des n' -catégories de Segal équivalentes, avec $n' > i$.

où la flèche de gauche est ce que nous appelons une *équivalence objet-par-objet*, c'est-à-dire qu'elle induit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux sur chaque objet $U \in \mathcal{X}$ (ici, bien sûr, seuls les objets de \mathcal{B} sont vraiment concernés). Ceci implique que D est contractile et on est bien en présence d'une donnée de descente dans le sens généralisé donné plus haut. On peut observer que la donnée du diagramme δ équivaut à celle d'une donnée de descente (généralisée ou non, c'est pareil) à valeurs dans la restriction de A à la catégorie \mathcal{B} munie de la topologie grossière. Il s'agit là d'un exemple tout-à-fait typique de la façon dont la topologie grossière intervient systématiquement tout au long de notre travail. Un autre exemple typique est la façon dont nous décrivons en deux temps la structure de catégories de modèles pour nos préchamps, par localisation de Bousfield à partir de la structure correspondant à la topologie grossière (§6).

On dit qu'une donnée de descente est effective si elle est équivalente à une donnée de descente qui se factorise à travers $*_{\mathcal{X}}$. Et lorsque dans le théorème ci-dessus on dit que les données de descente à valeurs dans A sont effectives, on veut dire que pour tout objet X de \mathcal{X} et tout crible \mathcal{B} couvrant \mathcal{X}/X , toute donnée de descente sur \mathcal{B} à valeurs dans $A * |\mathcal{X}/X$ est effective.

Les deux temps de la descente et les constructions de Grothendieck

Le problème de l'effectivité des données de descente dans un n -préchamp de Segal A sur un site \mathcal{X} (admettant un objet final) se décompose naturellement en deux étapes. En effet, une donnée de descente δ comme plus haut s'insère dans un diagramme:

$$*_{\mathcal{X}} \leftarrow *_{\mathcal{B}} \leftarrow D \rightarrow A,$$

Puisqu'il s'agit de factoriser, à équivalence près, le morphisme donné $D \rightarrow A$ à travers $*_{\mathcal{X}}$, on peut d'abord chercher une telle factorisation à travers $*_{\mathcal{B}}$. Si donc on qualifie de strictes les données de descente avec $D = *_{\mathcal{B}}$, on peut formuler d'une part le problème de la strictification des données de descente, qui consiste à montrer que toute donnée de descente est équivalente à une donnée de descente stricte, et d'autre part celui de l'effectivité des données de descente strictes.

Techniquement, les choses se présentent un peu différemment. Pour montrer qu'un préchamp de Segal A sur \mathcal{X} est un champ de Segal, on utilise la définition par limite. On doit donc comparer $A(X)$ avec la limite homotopique mentionnée plus haut, disons $\Gamma(\mathcal{B}, A)$. Pour identifier cette limite, on suit le chemin tracé dans [51]: on construit une catégorie de Segal $\int_{\mathcal{B}} A$ au-dessus de \mathcal{B}° avec l'espoir d'identifier $\Gamma(\mathcal{B}, A)$ à une catégorie de sections de $\int_{\mathcal{B}} A \rightarrow \mathcal{B}^{\circ}$. En fait, on trouve (§16) que $\Gamma(\mathcal{B}, A)$ est équivalente à la catégorie de Segal des sections "équilibrées" (ou eq-sections) non pas de $\int_{\mathcal{B}} A \rightarrow \mathcal{B}^{\circ}$ mais de son remplacement fibrant $\int'_{\mathcal{B}} A \rightarrow \mathcal{B}^{\circ}$. Ce remplacement fait référence à une structure de cmf

pour les catégories de Segal (§2). On veut donc montrer qu'un morphisme composé

$$A(X) \rightarrow Sect^{eq}\left(\int_{\mathcal{B}} A\right) \rightarrow Sect^{eq}\left(\int'_{\mathcal{B}} A\right)$$

est une équivalence. On peut voir le terme de droite comme une catégorie de données de descente (à droite ?) et celui du milieu comme la sous-catégorie des données de descente strictes (on n'a pas cherché à établir de correspondance entre ces nouvelles notions de données de descente et les anciennes), et le problème de l'effectivité se décompose à nouveau en deux étapes.

Ces deux étapes seront traités chacun à son tour dans nos §18 et §19. Pour rester strictement en conformité avec ce qui se passe dans le papier, il faudrait dire que cette situation de "strictification" des données de descente a lieu non au-dessus de \mathcal{B} mais au-dessus de la catégorie Δ via un foncteur $\rho(U) : \Delta \rightarrow \mathcal{B}$, dans le cas où \mathcal{B} est le crible engendré par un objet U recouvrant X . En quelque sorte Δ approxime \mathcal{B} via le foncteur $\rho(U)$ et pour des raisons techniques il nous est plus commode de travailler au-dessus de Δ .

Il se trouve que le problème de l'effectivité des données de descente strictes a déjà été résolu pour nos complexes de modules sur un topos annelé dans l'exposé Vbis de SGA 4 II [3] de Saint-Donat (d'après des "notes succinctes" de Deligne). Au §19, nous donnons un résultat plus général pour cette étape "stricte".

Préfaisceaux de Quillen

Nous avons donc mis en place ce formalisme des champs de Segal qui constitue un cadre naturel pour la théorie de l'homotopie relative (au-dessus d'un site), dans lequel nous pouvons reformuler le problème de la descente: trouver des conditions pour qu'un préchamp de Segal soit un champ (de Segal). Comme l'écrit Jardine dans [63], la structure organisationnelle pour la théorie de l'homotopie est celle de catégorie de modèles fermée (cmf) de Quillen [83]. La théorie des champs de Segal que nous avons mise en place est le cadre naturel de la théorie de l'homotopie relative (au-dessus d'un site) et la structure organisationnelle correspondante est tout naturellement une structure de préfaisceau de cmf: nous appelons préfaisceau de Quillen tout préfaisceau de cmf dans lequel les restrictions sont ce qu'on appelle des foncteurs de Quillen (à gauche). Si \mathbf{M} est un tel préfaisceau de Quillen sur un site \mathcal{X} , on peut lui associer le 1-préchamp de Segal $L(\mathbf{M})$ sur \mathcal{X} obtenu en prenant pour $L(\mathbf{M})(X)$ la catégorie simpliciale obtenue en inversant (au sens de Dwyer-Kan) les équivalences dans $\mathbf{M}(X)$. On cherche donc des conditions suffisantes pour que le préchamp de Segal ainsi associé à un préfaisceau de Quillen soit un champ de Segal.

Un théorème de descente

Nous proposons donc un théorème (19.4) donnant des conditions suffisantes pour que le préchamp $L(\mathbf{M})$ soit un champ de Segal. C'est bien sûr à partir du cas des complexes que nous avons trouvé une telle formulation générale. Les conditions que nous imposons sont de trois ordres.

D'abord, nous nous restreignons à des sites où, grosso modo, on peut se réduire à ne considérer que les données de descente définies sur les recouvrements à un seul objet (et vérifiant les conditions de compatibilité adéquates sur le complexe de Čech du recouvrement).

La principale restriction que nous imposons au préfaisceau de Quillen est l'existence, dans les valeurs prises (ce sont des cmf), de petites limites et colimites arbitraires. Ainsi par exemple notre théorème ne concerne pas les complexes de faisceaux de type fini. Nous lui imposons également d'autres conditions plus ou moins naturelles à savoir: le fait que, dans les valeurs prises, tous les objets soient cofibrants; l'existence de factorisations fonctorielles; la compatibilité aux produits fibrés; le caractère local des équivalences; et la compatibilité aux sommes disjointes.

Enfin nous imposons une condition très technique autorisant l'utilisation de l'argument dit "du petit objet" de Quillen pour la construction d'une cmf auxiliaire.

La partie la plus délicate de la démonstration consiste en la strictification des données de descente (§18).

Champs de champs

C'est en étudiant notre problème de descente des complexes, que nous nous sommes rendu compte qu'il y avait un résultat analogue pour les n -champs eux-mêmes: le $n + 1$ -préchamp $n\text{CHAMP}$ défini par

$$n\text{CHAMP}(X) := n\text{CHAMP}(\mathcal{X}/X)$$

est un n -champ (voir les théorèmes 20.1 et 20.5). C'est un résultat de "recollement" pour les n -champs. Par exemple, étant donné des champs \mathcal{F}_U et \mathcal{F}_V sur deux ouverts U, V d'un espace topologique, avec une équivalence

$$\mathcal{F}_U|_{U \cap V} \cong \mathcal{F}_V|_{U \cap V}$$

alors il existe un champ \mathcal{F} sur $U \cup V$ avec $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{F}_U$ et $\mathcal{F}|_V \cong \mathcal{F}_V$. On peut voir 20.1 et 20.5 comme des généralisations aux n -champs, du résultat classique qui dit que le 1-préchamp qui à chaque ouvert U associe la catégorie des faisceaux d'ensembles (i.e. 0-champs) sur U , est un 1-champ. Le cas $n = 1$ de cette généralisation se trouve déjà

dans SGA 1 [51] [43], où l'on montre que le 2-préchamp 1CHAMP des 1-champs est un 2-champ.

Ce résultat pour $n = 2$ (qui dit que 2CHAMP est un 3-champ) a été utilisé, sans démonstration, par Breen [18]. On peut dire que notre résultat généralise approximativement la moitié de ce que fait Breen dans [18] (l'autre moitié étant d'exprimer les données de descente en termes de cocycles, une chose que nous ne sommes pas arrivées à faire de façon entièrement satisfaisante pour n quelconque).

En fait, au début de ce travail, la seule chose que nous pouvions démontrer à propos des complexes était que le préchamp des complexes de \mathbf{Q} -espaces vectoriels, de longueur n fixée, était un $n + 1$ -champ. Pour prouver ceci, nous avons utilisé le résultat disant que le $n + 1$ -préchamp des n -champs est un champ: avec ceci et une version élémentaire de la notion de "spectre" (consistant juste à faire une translation pour que tout se passe entre les degrés N et $N + n$ avec $N \geq n + 2$) on pouvait obtenir (grâce au fait que l'homotopie rationnelle stable est triviale) le fait que les complexes de \mathbf{Q} -espaces vectoriels de longueur n , est un $n + 1$ -champ.

Ce n'est qu'avec l'apport des techniques de pointe en théorie des cmf ([31] [32] [33] [34], [59],[30], [46], [61] [60]) que nous avons pu formuler le résultat plus général 19.4 qui permet de traiter le cas des complexes de \mathcal{O} -modules.

Algébricité

L'étude plus détaillée des champs de complexes sur les sites de la géométrie algébrique fera l'objet d'un autre travail. Nous énonçons simplement au §21 notre principal résultat d'algébricité.

Historique, travaux connexes et techniques utilisées

La notion de 1-champ est aujourd'hui bien enracinée dans la géométrie algébrique, depuis notamment les travaux d'Artin [6], de Deligne-Mumford [25], de Laumon-Moret Bailly [68], prolongés par de nombreux travaux actuels. Une notion semblable joue un rôle important en géométrie différentielle (e.g. en géométrie des feuilletages), voir par exemple [36] [76] [79] [54] [55] [75] [74].¹⁰ En s'appuyant sur la notion de champ, Giraud a développé en bas degrés la cohomologie non-abelienne [42].

¹⁰On peut citer Moerdijk ([74] Example 1.1 (f)): "Effective etale groupoids are well-known to be basically equivalent to pseudogroups..." suivi par une référence à Molino [75]. Au vu de cette remarque, les travaux d'Ehresmann *et al* concernent essentiellement des groupoïdes étales i.e. des 1-champs de Deligne-Mumford dans le cadre différentiel. Il n'est pas clair à nos yeux si cette connexion était connue d'Ehresmann à l'époque; en tout cas, ce point de vue est déjà présent dans les papiers de Pradines [79]; et selon Pradines (communication orale au deuxième auteur), ce point de vue a été présenté par Ehresmann dans son exposé au congrès international de 1956.

Un travail précurseur de la descente pour l' ∞ -champ des complexes est celui sur la “descente cohomologique” de B. Saint Donat et Deligne dans SGA 4 [4].

Dans [49], A. Grothendieck propose comme généralisation la notion de n -*champ* ou même de ∞ -*champ*, sans toutefois donner une définition précise. En fait, on peut dire que la théorie des ∞ -champs de groupoïdes est déjà disponible à l'époque de [49] par le biais de la théorie des préfaisceaux simpliciaux, grâce aux travaux de K. Brown [19], Illusie [62], Joyal dans une lettre à Grothendieck [65], Jardine [63], et Thomason [100]. Le biais en question passe par l'équivalence entre la théorie des ∞ -groupoïdes et celle des espaces topologiques ou ensembles simpliciaux—équivalence pour laquelle ne manquait que la définition de ∞ -groupoïde!

Plus récemment, la théorie des n -catégories pour les petites valeurs de n a été reconnue comme importante dans une large gamme de situations liées par exemple à de nouveaux invariants des noeuds, aux groupes quantiques, à la théorie quantique des champs, et même à l'informatique. . . . Ceci a conduit vers une meilleure compréhension notamment du rôle joué par la non-associativité de la composition. Le premier papier de Baez-Dolan [8] fournit un résumé intéressant de ces développements.

La thèse de Tamsamani [98] fournit une définition de n -catégorie, ainsi que l'équivalence entre les n -groupoïdes et les espaces topologiques n -tronqués, pour tout n . Cette définition permet d'aborder la théorie des n -champs, non nécessairement de groupoïdes, en utilisant les techniques dues à Quillen qui sont à la base des travaux de Brown, Illusie, Joyal, Jardine et Thomason. Signalons également que d'autres définitions de n -catégorie ont été proposées, voir Baez-Dolan ([7] [9] qui était indépendant de [98] et simultanément) ou Batanin ([10], un peu plus tard). Pour l'heure il manque une comparaison entre ces différentes définitions, et comme expliqué plus haut, nous utilisons une légère variante de la définition de Tamsamani.

Notre technique de base est celle des cmf, et notre travail a été profondément influencé par des travaux récents en théorie des cmf, ceux de Hirschhorn [59], de Dwyer-Hirschhorn-Kan [30], aussi ceux de Goerss-Jardine [46] et de Hovey [61] [60], ainsi que par les travaux moins récents de Dwyer-Kan sur la localisation [31] [32] [33] [34].

Remerciements

Nous remercions C. Walter, N. Mestrano, Z. Tamsamani, P. Hirschhorn, B. Toen, R. Brown, A. Bruguières, T. Goodwillie, L. Katzarkov, M. Kontsevich, G. Maltsiniotis, H. Miller, S. Mochizuki, T. Pantev, J. Pradines, C. Rezk, J. Tapia, C. Teleman, D. Toledo pour discussions, correspondances, cours, thèses, livres qui ont influencé le présent travail. Le deuxième auteur remercie l'université de Californie à Irvine pour son hospitalité à la fin de la préparation de ce papier.

Nous remercions nos familles pour leur soutien pendant ce travail.

2. Les n -catégories de Segal

Commençons par fixer quelques notations: les catégories d'ensembles, d'ensembles simpliciaux, et d'espaces topologiques sont notées respectivement Ens , $EnsSpl$ et Top . Un ensemble simplicial est un foncteur $\Delta^\circ \rightarrow Ens$ où Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés $p := \{0', \dots, p'\}$ et les morphismes sont les applications croissantes. Si X est un ensemble simplicial on notera X_p sa valeur sur $p \in \Delta$. Si $A : \Delta^\circ \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, on notera A_p ou parfois $A_{p/}$ la valeur qu'il prend sur $p \in \Delta^\circ$. On notera $|A|$ la réalisation topologique de l'ensemble simplicial A . Si Y est une catégorie (i.e. 1-catégorie) on notera son nerf $\nu Y \in EnsSpl$. On utilisera l'abréviation "cmf" pour "catégorie de modèles fermée" de [83].

Les définitions qui suivent sont des généralisations de définitions de Tamsamani [98] et Dunn [28], qui à leur tour reprenaient des idées de Segal [90] [1]. Voir la comparaison ci-dessous.

On définit la notion de n -précat de Segal, et la catégorie $nSePC$ de ces objets, par récurrence sur n . Un ensemble pourra être considéré comme n -précat de Segal: il y aura un foncteur (pleinement fidèle) $Ens \rightarrow nSePC$. Un objet dans l'image de ce foncteur sera appelé "un ensemble discret". Pour $n = 0$, une 0 -précat de Segal est par définition un ensemble simplicial; et le foncteur $Ens \rightarrow 0SePC$ associe à un ensemble S le foncteur $\underline{S} : \Delta^\circ \rightarrow Ens$ constant à valeurs S . Pour $n \geq 1$, une n -précat de Segal est un foncteur

$$\Delta^\circ \rightarrow (n-1)SePC$$

noté $p \mapsto A_{p/}$, tel que $A_{0/}$ soit un ensemble discret qu'on notera aussi A_0 . Un *morphisme* de n -précats de Segal est une transformation naturelle de foncteurs $\Delta^\circ \rightarrow (n-1)SePC$, ce qui définit la catégorie $nSePC$. Le foncteur $Ens \rightarrow nSePC$ est celui qui à un ensemble S associe le foncteur composé

$$\Delta^\circ \xrightarrow{\underline{S}} Ens \rightarrow (n-1)SePC.$$

On peut dévisser la récurrence dans cette définition. Si on veut suivre les notations de Tamsamani [98], une n -précat de Segal est donc un ensemble $n+1$ -simplicial, i.e. un foncteur

$$(\Delta^\circ)^{n+1} \rightarrow Ens$$

noté $(m_1, \dots, m_{n+1}) \mapsto A_{m_1, \dots, m_{n+1}}$, qui satisfait les *conditions de constance* selon lesquelles pour $m_i = 0$ le foncteur est constant en les variables m_{i+1}, \dots, m_{n+1} .

Ces conditions de constance peuvent être prises en compte une fois pour toutes en introduisant la catégorie Θ^{n+1} , quotient de Δ^{n+1} [94]. On rappelle que Θ^{n+1} est la catégorie

dont les objets sont les suites (m_1, \dots, m_i) pour $i \leq n + 1$, avec $m_i \in \Delta$ et avec les identifications

$$(m_1, \dots, m_j = 0, \dots, m_i) =: (m_1, \dots, m_{j-1}).$$

L'objet $(0, \dots, 0)$ est aussi équivalent à la suite de longueur 0 qui est notée 0. Les morphismes proviennent des morphismes de Δ avec le changement induit par ces identifications; cf [94] ou [95].

Pour $k \leq n$ et pour $M = (m_1, \dots, m_k) \in \Delta^k$ on note $A_{M/}$ la $n - k$ -précat de Segal

$$(m'_1, \dots, m'_{n+1-k}) \mapsto A_{m_1, \dots, m_k, m'_1, \dots, m'_{n+1-k}}.$$

Pour $k = 1$ ceci concorde avec la notation $A_{p/}$ introduite plus haut.

Une n -précat de Segal peut être vue comme foncteur

$$(\Theta^{n+1})^o \rightarrow Ens,$$

sans autre condition (les conditions de constance étant prises en compte par le fait que Θ^{n+1} est le quotient adéquat de Δ^{n+1}). De ce fait, $nSePC$ apparaît comme la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Θ^{n+1} , et donc admet toutes les limites et colimites avec petite indexation, ainsi qu'un Hom interne.

En fait, le point de vue le plus utile est un mélange des deux points de vue du paragraphe précédent: une n -précat de Segal peut (voire doit) être considérée comme un foncteur

$$A : (\Theta^n)^o \rightarrow EnsSpl$$

noté $M \mapsto A_M$, tel que, pour $|M| < n$, l'ensemble simplicial A_M est un ensemble discret. Il est parfois utile de confondre les ensembles simpliciaux et les espaces topologiques, et on obtient essentiellement la même notion en considérant les foncteurs $(\Theta^n)^o \rightarrow Top$.

On dira que A_0 est l'ensemble des objets de A . Pour deux objets $x, y \in A_0$ on notera $A_{1/}(x, y)$ la pré-image de $(x, y) \in A_0 \times A_0$ par le morphisme

$$A_{1/} \rightarrow A_0 \times A_0$$

induit par les deux applications “faces” de la structure simpliciale. On dira que $A_{1/}(x, y)$ est la $n - 1$ -précat de Segal des morphismes entre x et y . On utilisera parfois cette même notation (qui est assez compacte) pour l'ensemble des morphismes entre deux objets d'une catégorie ou pour l'ensemble simplicial des morphismes entre deux objets d'une catégorie simpliciale.

On définit maintenant les n -catégories de Segal, qui sont les n -précats de Segal satisfaisant certaines conditions de “spécialité” généralisant la condition originelle de Segal [88]. Pour formuler ces conditions on a besoin d'une grande récurrence comme dans [98],

cf aussi le résumé dans [95]. On va définir simultanément par récurrence sur n : la condition pour qu’une n -précat de Segal soit une n -catégorie de Segal; la condition pour qu’un morphisme entre deux n -catégories de Segal soit une équivalence; et l’ensemble “tronqué” $\tau_{\leq 0}(A)$ associé à une n -catégorie de Segal A . D’abord pour $n = 0$, et par définition: toute 0-précat de Segal i.e. ensemble simplicial, est une 0-catégorie de Segal; un morphisme est une équivalence si c’est une équivalence faible d’ensembles simpliciaux, i.e. s’il induit des isomorphismes entre les groupes d’homotopie (et les π_0) des réalisations topologiques; et le tronqué $\tau_{\leq 0}(A)$ d’un ensemble simplicial A est l’ensemble $\pi_0(|A|)$. Pour le reste, la récurrence est identique à celle de Tamsamani [98]: soit $n \geq 1$ et on suppose que les définitions sont disponibles au-niveau $n - 1$. Soit A une n -précat de Segal, vue comme foncteur

$$A : \Delta^o \rightarrow (n - 1)SePC, \quad p \mapsto A_{p/}.$$

On dira que A est une n -catégorie de Segal si les $A_{p/}$ sont des $n - 1$ -catégories de Segal, et si pour tout p le morphisme de $n - 1$ -précats de Segal

$$A_{p/} \rightarrow A_{1/} \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_{1/}$$

est une équivalence de $n - 1$ -catégories de Segal. Ce dernier “morphisme de Segal” étant celui dont les composantes sont les applications duaux aux inclusions $\{i, i+1\} \subset \{0, \dots, p\}$ dans Δ , voir [89], [1], [28], [98].

Si A est une n -catégorie de Segal, alors le foncteur

$$p \mapsto \tau_{\leq 0}(A_{p/}) \quad \Delta^o \rightarrow Ens$$

est le nerf d’une catégorie qu’on note $\tau_{\leq 1}(A)$. On définit $\tau_{\leq 0}(A)$ comme l’ensemble des classes d’isomorphisme de la catégorie $\tau_{\leq 1}(A)$. Si A et B sont des n -catégories de Segal et $f : A \rightarrow B$ est un morphisme (i.e. morphisme de $nSePC$) on dira que f est une *équivalence* si le morphisme induit

$$\tau_{\leq 0}(A) \rightarrow \tau_{\leq 0}(B)$$

est surjectif (on dira alors que “ f est essentiellement surjectif”), et si pour tout couple d’objets $x, y \in A_0$, le morphisme

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(f(x), f(y))$$

est une équivalence de $n - 1$ -catégories de Segal (on dira alors que “ f est pleinement fidèle”). Comparer avec la notion d’équivalence entre catégories simpliciales de [34].

C’est seulement pour une n -catégorie de Segal A qu’il est raisonnable de considérer la $n - 1$ -catégorie des morphismes entre deux objets $A_{1/}(x, y)$. Une *1-flèche de A* est un objet de $A_{1/}(x, y)$. Par itération on obtient la notion de i -flèche de A [98]. Soit $1^i \in \Theta^n$ l’objet

$(1, \dots, 1)$ (i fois), image de l'objet $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \Delta^n$. Une i -flèche de A ($i < n$) est un élément de l'ensemble A_{1^i} . Pour $i = n$, A_{1^n} est un ensemble simplicial et une n -flèche de A est un sommet (i.e. un élément de la partie de degré 0) de l'ensemble simplicial A_{1^n} . Les morphismes faces en la i -ième variable simpliciale fournissent les applications *source* et *but* qui à une i -flèche associent des $i - 1$ -flèches (une 0-flèche est un objet i.e. élément de A_0).

Soit A une n -catégorie de Segal. Suivant [98], on dira qu'une i -flèche ($i \geq 1$) est *inversible à équivalence près* ou *à homotopie près* si son image comme 1-flèche dans la 1-catégorie $\tau_{\leq 1}(A_{1^{i-1}})$ est inversible. Voir [98] pour plus de détails. On dira (toujours suivant [98]) que A est un n -groupeïde de Segal si pour tout $1 \leq i \leq n$, toutes les i -flèches sont inversibles à équivalence près. Plus généralement, pour $0 \leq k \leq n$ on dira que A est k -groupique si les i -flèches sont inversibles à équivalence près pour tout $i > k$. En particulier, A est toujours n -groupique, et A est 0-groupique si et seulement si c'est un n -groupeïde de Segal.

Comparaison avec Tamsamani et Dunn

On compare avec [98] et [28]. Tamsamani ([98], 1995) considère les foncteurs $(\Delta^o)^n \rightarrow Ens$ et leur impose les conditions de constance ainsi que les conditions de Segal cf ci-dessous, obtenant la notion de n -catégorie (*faible*). Dans [94], on introduit la notion de n -précat en relaxant toutes sauf les conditions de constance. Une n -précat (resp. n -catégorie de Tamsamani), qui est un foncteur $\Theta^n \rightarrow Ens$, peut être vue comme une n -précat de Segal en composant avec l'inclusion $Ens \rightarrow EnsSpl$.

Plus généralement, les n -précats de Segal (resp. n -catégories de Segal) telles que les valeurs du foncteur $\Theta^n \rightarrow EnsSpl$ soient des ensembles simpliciaux 0-tronqués (i.e. réunion disjointe de composantes contractiles) correspondent à des n -précats (resp. n -catégories) par composition avec $\pi_0 : EnsSpl \rightarrow Ens$. Avec cette traduction, la plupart de nos énoncés sur les n -catégories de Segal restent vrais *mutatis mutandis* pour les n -catégories (la seule exception concerne la propriété de descente—non préservée par troncation—pour des localisées de Dwyer-Kan, qui ne sont pas tronquées en général). Nous formulons souvent nos énoncés seulement dans le cadre des n -catégories de Segal, laissant au lecteur le soin d'écrire les énoncés correspondants pour les n -catégories. En revanche, on reviendra plus loin sur les compatibilités entre les notions de n -catégorie et n -catégorie de Segal (et aussi sur les compatibilités entre différentes valeurs de n).

Dunn, dans [28] (soumis en 1993, paru en 1996 mais résumant sa thèse de 1984, et qui fait référence à Cobb [23]) considère—entre autres “delooping machines”—le n -ième itéré de la machine de Segal dont la catégorie sous-jacente est celle des foncteurs

$$A : (\Delta^o)^n \rightarrow Top$$

tels que $A_{m_1, \dots, m_n} = *$ si $m_i = 0$ (cf. [28], début du §3). On pourra appeler ces objets “ n -précats de Dunn”. En remplaçant Top par $EnsSpl$ et en passant au quotient, on obtient les n -précats de Segal A vérifiant $A_M = *$ pour $|M| < n$.

Dunn impose aussi à ses objets la condition de spécialité en chaque variable simpliciale ([28] Définition 3.1) et on pourrait appeler les objets qui satisfont à cette condition, les “ n -catégories de Dunn”. On peut vérifier que cette condition coïncide avec la condition d’être une n -catégorie de Segal, dans le cas qu’il considère où $A_M = *$ pour $|M| < n$. En somme, Dunn avait regardé les n -catégories de Segal ayant une seule i -flèche pour tout $i < n$.

Les définitions de Dunn et de Tamsamani sont basées sur l’idée d’itérer la construction de Segal [88]. Elles sont complémentaires comme le sont la tour de Postnikov et la tour de Whitehead: chez Dunn (comme chez Whitehead) il s’agit de l’homotopie en degrés $\geq n$ tandis que chez Tamsamani (comme chez Postnikov) il s’agit de l’homotopie en degrés $\leq n$. La notion de n -précat de Segal permet d’intégrer ces deux points de vue. En outre, dans les variables “ n -catégoriques” on peut avoir des flèches non (homotopiquement) inversibles. Il s’agit donc d’une définition qui permet d’avoir de l’homotopie en tout degré, et des flèches non-inversibles en degrés $\leq n$. C’est un avatar de la notion (non encore totalement élucidée) de ∞ -précat qui permettrait d’avoir des flèches non-inversibles en tout degré. Nous avons décidé de faire la présente rédaction dans le cadre des n -précats de Segal, par souci de simplicité et aussi parce que, sur les exemples que nous avons en vue, la non-inversibilité des flèches n’entre en jeu que pour un nombre fini de degrés.

L’opération $SeCat$

L’une des idées de base qui permettraient d’obtenir la structure de catégorie de modèles fermée pour les n -précats dans [94] était l’opération Cat , qu’on peut résumer très simplement en disant qu’elle force la condition d’être une n -catégorie. Ce procédé s’applique de la même façon dans notre cadre des n -précats de Segal: on aura une opération qu’on notera $A \mapsto SeCat(A)$ avec une transformation naturelle $i_A : A \rightarrow SeCat(A)$, qui transformera toute n -précat de Segal en n -catégorie de Segal.

En fait au lieu de fixer précisément l’opération $SeCat$, on donne la définition suivante.

Définition 2.1 *On appellera opération de type $SeCat$ tout couple (F, i) où $F : nSePC \rightarrow nSePC$ est un foncteur et $i_A : A \rightarrow F(A)$ une transformation naturelle, possédant les propriétés suivantes:*

- (a)—pour tout n -précat de Segal A , $F(A)$ est une n -catégorie de Segal;
- (b)— i_A est un isomorphisme sur les ensembles d’objets, et si A est une n -catégorie de Segal alors i_A est une équivalence de n -catégories de Segal; et
- (c)—pour toute n -précat de Segal A , le morphisme $F(i_A)$ est une équivalence de n -catégories de Segal.

Lemme 2.2 *Il existe une opération de type $SeCat$. Si (F^1, i^1) et (F^2, i^2) sont deux opérations de type $SeCat$ alors elles sont équivalentes en ce sens que*

$$F^1(i_A^2) : F^1(A) \rightarrow F^1(F^2(A))$$

est une équivalence de n -catégories de Segal pour toute n -précat de Segal A . En particulier, si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de n -précats de Segal alors $F^1(f)$ est une équivalence de n -catégories de Segal si et seulement si $F^2(f)$ l'est.

Preuve: Pour l'existence, on peut utiliser une définition analogue à celle de [94] qui traite le cas des n -précats (non de Segal) (pour une autre approche, voir la discussion plus loin). Pour les ensembles simpliciaux du dernier degré, il faut remplir toutes les "cornes" (extensions anodines de Kan). Pour l'unicité, on utilise la même démonstration que celle de [94] Proposition 4.2. En fait cette démonstration doit être couplée avec la démonstration du théorème 3.1 dans une récurrence sur n comme c'est fait dans [94]. On note que le cas $n = 0$ est trivialement vrai.

Si $f : A \rightarrow B$ et si $F^2(f)$ est une équivalence alors dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^1(A) & \xrightarrow{F^1(i_A^2)} & F^1(F^2(A)) \\ F^1(f) \downarrow & & \downarrow F^1(F^2(f)) \\ F^1(A) & \xrightarrow{F^1(i_A^2)} & F^1(F^2(A)) \end{array}$$

la flèche $F^1(F^2(f))$ est une équivalence car F^1 transforme équivalences de n -catégories de Segal en équivalences d'après 2.1 (b). Les flèches horizontales sont des équivalences par le résultat d'unicité ci-dessus. Donc $F^1(f)$ est une équivalence. \square

On appellera $SeCat$ toute opération qui satisfait les critères de la définition 2.1. Nous donnons maintenant une variante commode, déjà présente (pour les n -précats) dans [94] et explorée dans [96] pour les 1-précats de Segal. Pour $n = 0$ on peut prendre le foncteur identité avec la transformation naturelle identité. Soit $n \geq 1$ et supposons construite l'opération $SeCat$ pour les $n - 1$ -précats de Segal. Soit A une n -précat de Segal. On définit une n -précat de Segal $Fix(A)$ avec les mêmes objets que A en posant (pour $p \geq 1$)

$$Fix(A)_{p/}(x_0, \dots, x_p) := SeCat(A_{p/}(x_0, \dots, x_p)).$$

Ceci a pour effet de transformer les $A_{p/}$ en n -catégories de Segal. On a un morphisme naturel $A \rightarrow Fix(A)$. D'autre part, pour tout $m \geq 2$ on définit une n -précat de Segal $Gen[m](A)$ munie d'un morphisme $A \rightarrow Gen[m](A)$ induisant un isomorphisme sur les ensembles d'objets, par

$$Gen[m](A)_{q/} := A_{q/} \cup \coprod_{q \rightarrow m} A_{m/} \prod_{q \rightarrow m} \mathcal{G}[m]$$

où

$$A_{m/} \xrightarrow{a} \mathcal{G}[m] \xrightarrow{b} A_{1/} \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_{1/}$$

est une factorisation du morphisme de Segal, où a est une cofibration et b une équivalence faible, (qui existe par le théorème 2.3 qu'on suppose connu pour $n - 1$). Les coproduits dans la définition de $Gen[m]$ sont pris avec tous les morphismes $q \rightarrow m$ dans Δ qui ne se factorisent pas à travers une arête principale $1 \rightarrow m$. Voir [94] ou [96] pour comment définir les morphismes de functorialité $Gen[m](A)_{q/} \rightarrow Gen[m](A)_{p/}$ pour $p \rightarrow q$. Maintenant on définit Gen comme le composé pour tout $m \geq 2$ des $Gen[m]$ et $SeCat$ s'obtient en itérant une infinité dénombrable ω de fois le composé $Fix \circ Gen$. Cette opération d'apparence tres ineffective a en réalité d'assez bonnes propriétés d'effectivité, voir [96].

On peut voir une n -précat A comme un *système de générateurs et relations* pour définir une n -catégorie, et $SeCat(A)$ comme la n -catégorie ainsi engendrée.

La structure de catégorie de modèles fermée

On définit maintenant la structure de catégorie de modèles fermée sur $nSePC$.

Un morphisme $A \rightarrow B$ de n -précats de Segal sera une *cofibration* si $A_M \rightarrow B_M$ est injectif pour tout $M \in \Theta^{n+1}$ (cette condition est différente de la condition pour les $n + 1$ -précats de [94] car ici nous exigeons aussi l'injectivité pour $|M| = n + 1$). Une cofibration est donc simplement une injection de préfaisceaux d'ensembles.

On dira qu'un morphisme $A \rightarrow B$ de n -précats de Segal est une *équivalence faible* si le morphisme $SeCat(A) \rightarrow SeCat(B)$ est une équivalence de n -catégories de Segal. Cette propriété est indépendante du choix de la construction $SeCat$ grâce au lemme 2.2.

Et on dira qu'un morphisme $A \rightarrow B$ de n -précats de Segal est une *fibration* s'il possède la propriété de relèvement pour les cofibrations triviales (celles qui sont des équivalences faibles). Rappelons ([83]) que, par définition, la propriété de relèvement assure que pour toute cofibration triviale $E \rightarrow E'$, et tout paire de morphismes $E \rightarrow A$ et $E' \rightarrow B$ qui forment un carré commutatif, il existe un morphisme $E' \rightarrow A$ rendant commutatif les deux triangles dans le carré.

Théorème 2.3 *Les trois classes de morphismes ci-dessus font de la catégorie des n -précats de Segal une catégorie de modèles fermée.*

La démonstration entre dans le cadre plus général de la comparaison entre notions de n -catégorie de Segal et/ou n -catégorie, pour différentes valeurs de n . On aborde cette discussion avant la démonstration de 2.3.

Changement de n

La catégorie de modèles fermée des n -précats de Segal de 2.3 est une sorte de substitut pour la notion d' ∞ -catégorie, dans laquelle les i -flèches sont inversibles à équivalence près, pour $i > n$. Si on admet l'existence d'une théorie des ∞ -catégories convenable, l'équivalence passera par la construction $A \mapsto \Pi_\infty \circ A$ qui transforme une n -précat de Segal en une ∞ -précat, avec un Π_∞ qui fait correspondre un ∞ -groupeïde à tout espace topologique ou ensemble simplicial de Kan. Nous ne voulons pas entrer dans les détails de la notion de ∞ -catégorie ici, car la version " n -catégories de Segal" convient pour nos applications. Ce choix est d'autant plus raisonnable qu'on peut construire des foncteurs $A \mapsto \Pi_{m,Se} \circ A$ pour passer de n à $n + m$.

Rappelons que Tamsamani [98] a défini un foncteur " n -groupeïde de Poincaré"

$$\Pi_n : Top \rightarrow nCat$$

où $nCat$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie nPC des n -précats, formée des n -catégories. Ce foncteur généralise le "groupeïde de Poincaré" $\Pi_1(X)$ classique. Tamsamani a montré que ce foncteur établit une équivalence entre les théories homotopiques des espaces topologiques n -tronqués (i.e. où les π_i s'annulent pour $i > n$) et des n -groupeïdes (i.e. n -catégories où les flèches sont inversibles à équivalence près). Plus précisément, il a construit un foncteur "réalisation topologique"

$$\mathfrak{R} : nCat \rightarrow Top$$

et des équivalences $\Pi_n \circ \mathfrak{R} \cong 1$ et $\mathfrak{R} \circ \Pi_n \cong 1$ pour les restrictions de ces foncteurs aux catégories Top_n des espaces topologiques n -tronqués et $nGpd$ des n -groupeïdes. On adoptera donc le point de vue que les n -groupeïdes peuvent être librement remplacés par les espaces topologiques (ou ensembles simpliciaux) n -tronqués.

On fait ici quelques remarques qui utilisent des notions qui seront traitées plus loin dans le présent travail, pour offrir un autre éclairage sur ce résultat d'équivalence de Tamsamani (cependant, le lecteur peut s'en passer jusqu'au sigle " \emptyset "). En appliquant la théorie de Dwyer-Kan [33] qui sera rappelée au §8 ci-dessous, on peut inverser les équivalences et obtenir des catégories simpliciales "localisées" $L(Top_n)$ et $L(nGpd)$. Maintenant les foncteurs Π_n et \mathfrak{R} et les équivalences de Tamsamani, en conjonction avec la proposition 3.5 et le corollaire 3.6 de [32] (cf aussi notre lemme 8.1), donnent une équivalence

$$L(Top_n) \cong L(nGpd)$$

de catégories simpliciales. On peut pousser un peu plus loin en utilisant nos notations du §11: on note $nCAT$ la $n + 1$ -catégorie des n -catégories (voir [94]).¹¹ Notons $nGPD \subset$

¹¹Le lecteur prendra soin de distinguer entre la typographie en majuscules $nCAT$ et la typographie qui comporte des minuscules $nCat$. En effet, $nCAT$ désigne la $n + 1$ -catégorie des n -catégories, définie

$nCAT$ la sous- $n + 1$ -catégorie pleine des n -groupoïdes. Alors $nGPD$ est 1-groupique (i.e. ses n -catégories de Hom sont en fait des n -groupoïdes) donc égale à son intérieur 1-groupique: $nGPD^{int,1} = nGPD$. Par le théorème 11.11 on a

$$L(nPC) \cong L(nPC_f) \cong nCAT^{int,1}.$$

D'autre part, comme on a des remplacements fibrants fonctoriels, toute catégorie comprise entre nPC et nPC_f donne la même localisée de Dwyer-Kan; ceci s'applique notamment à $nPC_f \subset nCat \subset nPC$. On obtient ainsi l'équivalence des $n + 1$ -catégories

$$L(nCat) \cong nCAT^{int,1}$$

(plus techniquement, il s'agit ici d'une équivalence qui passe éventuellement par des morphismes dans les deux sens, car aucune des deux $n + 1$ -précats en question n'est fibrante). La sous-catégorie $nGpd \subset nCat$ est définie par une condition invariante par équivalence, donc (par 8.2 ci-dessous) $L(nGpd)$ est la sous-catégorie pleine de $L(nCat)$ formée des objets qui sont des n -groupoïdes. Par définition il en est de même pour $nGPD$ et donc aussi pour $nGPD^{int,1}$. On obtient ainsi l'équivalence

$$L(nGpd) \cong nGPD.$$

Si on applique maintenant la variante (immédiate) du théorème de comparaison de Tamsamani qui donne l'équivalence entre localisés de Dwyer-Kan, on obtient une équivalence de $n + 1$ -catégories

$$L(Top_n) \cong nGPD.$$

D'autre part, on peut observer que les ensembles simpliciaux $L(Top_n)_{1/}(X, Y)$ ont le bon type d'homotopie, à savoir celui de l'espace d'applications $\underline{Hom}(X, Y)$, dès que, par exemple, X est un CW-complexe (voir [33] etc). Pour dire les choses autrement, $L(Top_n)$ est équivalente à la catégorie simpliciale des objets (n -tronqués) fibrants et cofibrants pour n'importe quelle structure de catégorie de modèles fermée simpliciale pour les espaces topologiques. Donc $L(Top_n)$ est "la" $n + 1$ -catégorie des espaces n -tronqués. Cette équivalence donne donc des précisions sur ce qu'on entend par "les n -groupoïdes s'identifient aux espaces topologiques n -tronqués".

○

Au vu des remarques précédentes (la version courte aurait suffi), on va *déclarer* qu'un ∞ -groupoïde n'est rien d'autre qu'un espace topologique ou ensemble simplicial. Ce point

à l'aide de la structure interne cf §11 et ([94] §7); tandis que $nCat$ désigne la 1-catégorie stricte avec les mêmes objets et les morphismes qui respectent strictement la structure (en particulier, c'est celle-ci qu'avait considérée Tamsamani). On utilise cette même convention pour les champs plus loin.

de vue qui nous guide déjà dans la définition des n -catégories de Segal nous guide aussi pour comparer ces notions pour différentes valeurs de n .

Comme expliqué au début de ce chapitre, on peut voir toute n -précat de Segal comme un préfaisceau simplicial au-dessus de Θ^n , i.e. un foncteur vers la catégorie des ensembles simpliciaux,

$$A : \Theta^n \rightarrow \mathit{EnsSpl}, \quad M \mapsto A_M$$

tel que pour $|M| < n$ l'ensemble simplicial A_M est un ensemble discret.

De ce point de vue, on peut composer avec le foncteur $||$ de réalisation topologique des ensembles simpliciaux, puis avec le foncteur Π_m de Tamsamani [98]. De façon équivalente on peut d'abord appliquer le foncteur Ex^∞ de Kan pour arriver dans les ensembles simpliciaux de Kan, puis la variante adaptée aux ensembles simpliciaux du foncteur Π_m de [98]. Par ces deux procédés (essentiellement équivalents), on obtient une $n + m$ -précat qu'on note $\Pi_m \circ A$.

Dans l'autre sens, si on a une $n + m$ -précat B , on peut lui appliquer l'opération $\mathfrak{R}_{\geq n}$ qui consiste à prendre la réalisation topologique (ou plutôt comme ensemble simplicial) de [98] des m -précats $B_{M/}$ pour $|M| = n$ (on garde les ensembles discrets B_M pour $|M| < n$). Le résultat est une n -précat de Segal $\mathfrak{R}_{\geq n}(B)$. Si A est une n -catégorie de Segal n'ayant que des ensembles simpliciaux m -tronqués dans l'image du foncteur

$$(M \mapsto A_{M/}) : (\Theta^n)^\circ \rightarrow \mathit{EnsSpl}$$

considéré ci-dessus, alors $\mathfrak{R}_{\geq n} \Pi_m \circ A$ est équivalente à A . Si A ne vérifie pas cette condition de troncation alors cette construction a pour effet d'opérer la troncation de Postnikov sur les ensembles simpliciaux. D'autre part, si A est une $n + m$ -catégorie n -groupique (i.e. où les i -flèches sont inversibles à homotopie près pour $i > n$), alors $\Pi_m \circ \mathfrak{R}_{\geq n}(A)$ est équivalente à A . Dans le cas contraire on obtient ainsi le *complété n -groupique* de A (i.e. le morphisme universel de A vers une $n + m$ -catégorie n -groupique), analogue du "groupe-complété" d'un monoïde simplicial en topologie algébrique (qui est le cas $n = 0$).

La construction $A \mapsto \Pi_m \circ A$ est à homotopie près compatible avec les coproduits. Si $A \rightarrow B$ est une cofibration (i.e. injection, cf. la définition ci-dessous) et $A \rightarrow C$ un morphisme de n -précats de Segal, le coproduit $B \cup^A C$ est un coproduit d'ensembles simpliciaux objet-par-objet au-dessus de Θ^n . On peut donc appliquer le théorème de Seifert-Van Kampen pour Π_m de [94], objet-par-objet au-dessus de Θ^n , pour obtenir l'équivalence

$$(\Pi_m \circ B) \cup^{(\Pi_m \circ A)} (\Pi_m \circ C) \xrightarrow{\cong} \Pi_m \circ (B \cup^A C).$$

Dans le même ordre d'idées on remarque que si A est un n -précat de Segal alors il y a une équivalence naturelle de m -catégories de Segal

$$\Pi_m \circ \mathit{SeCat}(A) \xrightarrow{\cong} \mathit{Cat}(\Pi_m \circ A).$$

On peut modifier le paragraphe sur l'opération $\Pi_m \circ A$ pour obtenir un passage des n -catégories de Segal aux $n + m$ -catégories de Segal. Pour cela, on doit d'abord définir un $\Pi_{m,Se}(X)$ pour tout espace topologique X , qui sera une m -catégorie de Segal. Pour $m = 0$ c'est tout simplement l'ensemble simplicial "complexe singulier" $Sing(X)$. Pour m général nous appliquons d'abord le foncteur $\underline{\Omega}$ défini par Tamsamani [98], m fois itéré comme dans [98], ce qui donne un foncteur

$$\underline{\Omega}^m(X) : \Theta^m \rightarrow Top.$$

Ensuite on compose avec le foncteur $Sing$ pour obtenir

$$\Pi_{m,Se}(X) := Sing \underline{\Omega}^m(X).$$

Maintenant si A est une n -précat de Segal on la considère comme un foncteur

$$\Theta^n \rightarrow EnsSpl$$

qu'on compose d'abord avec la réalisation $|\cdot|$, puis avec le foncteur $\Pi_{m,Se}$. On notera $\Pi_{m,Se} \circ A$ le résultat de cette construction. C'est une $n + m$ -précat de Segal. De même si B est une $n + m$ -précat de Segal on peut définir sa *réalisation en degrés $\geq n$* $\mathfrak{R}_{\geq n}(B)$. On a l'équivalence

$$A \cong \mathfrak{R}_{\geq n}(\Pi_{m,Se} \circ A)$$

(sans condition de troncation sur A cette fois-ci). Si de plus B est n -groupique, alors on a $B \cong \Pi_{m,Se} \circ \mathfrak{R}_{\geq n}(B)$. Et de nouveau, dans le cas général, $\Pi_{m,Se} \circ \mathfrak{R}_{\geq n}(B)$ sera le complété n -groupique de B .

On a enfin la formule

$$(\Pi_{m,Se} \circ B) \cup^{(\Pi_{m,Se} \circ A)} (\Pi_{m,Se} \circ C) \cong \Pi_{m,Se} \circ (B \cup^A C).$$

Induction

Une n -précat (non de Segal) A peut être considérée comme une m -précat de Segal pour tout $m \geq n$, qu'on peut noter $Ind_n^{m,Se}(A)$ avec

$$Ind_n^{m,Se}(A)_{k_1, \dots, k_{m+1}} := A_{k_1, \dots, k_n}$$

pour $(k_1, \dots, k_{m+1}) \in \Delta^{m+1}$.

Avertissement: Si A est une n -précat alors $SeCat(Ind_n^{m,Se}(A))$ n'est pas en général équivalente à $Ind_n^{m,Se}(Cat(A))$. On a cette équivalence seulement si A est déjà une n -catégorie.

D'autre part il faut remarquer que si A est une n -catégorie (non de Segal) alors $Ind_n^{m,Se}(A)$ est d'emblée une m -catégorie de Segal.

Pour toutes ces raisons, on utilisera cette opération “d'induction” le plus souvent avec un argument A qui est déjà une n -catégorie.

Le cas qu'on rencontrera le plus est celui où Y est une 1-catégorie, qu'on considère comme 1-précat en prenant son nerf νY . Alors pour tout $n \geq 1$ on dispose de la n -catégorie de Segal $Ind_n^{m,Se}(\nu Y)$.

En pratique on confondra Y avec la n -catégorie de Segal induite.

Troncation

Dans le cadre des comparaisons ci-dessus, on définit maintenant une *troncation* $A \mapsto \tau_{\leq n}(A)$ pour les m -catégories de Segal. Le résultat est une n -catégorie (non de Segal). Si $n \geq m$ on pose

$$\tau_{\leq n}(A) := \Pi_{n-m} \circ A$$

avec les notations introduites plus haut. En particulier on a

$$\tau_{\leq m}(A) = \pi_0 \circ A.$$

Pour $n < m$ on pose

$$\tau_{\leq n}(A) := \tau_{\leq n}(\tau_{\leq m}(A)),$$

où la troncation $\tau_{\leq n}$ de droite est la troncation qui transforme une m -catégorie en n -catégorie (voir [98]). En termes des définitions précédentes, on a

$$\tau_{\leq n}(A)_M = A_M \text{ pour } |M| < n, \quad \tau_{\leq n}(A)_M = \tau_{\leq 0}(A_{M/}) \text{ pour } |M| = n.$$

Cette troncation est essentiellement la “troncation de Postnikov”. Si on veut considérer que nos m -catégories de Segal A sont en fait des ∞ -catégories, on peut préférer la notation $\tau_{\leq n}(A)$ à la notation $\Pi_{n-m} \circ A$.

Lemme 2.4 *Un morphisme $A \rightarrow B$ de m -catégories de Segal est une équivalence si et seulement si $\tau_{\leq n}A \rightarrow \tau_{\leq n}B$ est une équivalence de n -catégories pour tout n .*

Preuve: C'est vrai pour $m = 0$ i.e. pour les ensembles simpliciaux, et on obtient le cas général par une récurrence évidente. \square

Soit A une m -catégorie de Segal. On dira que A est *contractile* si le morphisme canonique $A \rightarrow *$ est une équivalence. On dira que A est *0-tronquée* si A est une réunion disjointe de m -catégories de Segal contractiles (ici la réunion peut éventuellement être vide). Soit $n \leq m$; on dira que A est *n -tronquée* si pour tout M avec $|M| = n$, la $m - n$ -catégorie de Segal $A_{M/}$ est 0-tronquée. Enfin, soit $n \geq m$; on dira A est *n -tronquée* si

pour tout M avec $|M| = m$, l'ensemble simplicial $A_{M/}$ est $n - m$ -tronqué (i.e. ses groupes d'homotopie s'annulent en tout degré $i > n - m$).

Pour $n \geq m$ on a un morphisme naturel

$$\Pi_{n-m, Se} \circ A \rightarrow \tau_{\leq n}(A).$$

En revanche, pour $n < m$ il n'existe pas en général de morphisme $A \rightarrow \text{Ind}_n^{m, Se}(\tau_{\leq n}(A))$ (ni dans l'autre sens). Ceci résulte de l'existence possible de i -flèches non-inversibles (la notion d'intérieur introduite ci-dessous permettra de contourner cette difficulté). Cependant, si A est n -tronquée alors on a une équivalence naturelle

$$A \xrightarrow{\cong} \text{Ind}_n^{m, Se}(\tau_{\leq n}(A)).$$

En fait, on peut vérifier qu'une m -catégorie de Segal A est équivalente à une de la forme $\text{Ind}_n^{m, Se}(B)$, où B est une n -catégorie, si et seulement si A est n -tronquée.

L'intérieur

La réalisation fournit un moyen de passer d'une n -précat de Segal à un ensemble simplicial; ça correspond essentiellement à inverser toutes les flèches pour obtenir un ∞ -groupoïde qu'on peut voir comme un ensemble simplicial. Cette opération est assez brutale et n'est guère compatible avec les questions de descente. On introduit ici une construction duale (en un sens assez faible), *l'intérieur* d'une n -précat de Segal, qui est bien mieux adaptée aux questions de descente et qui va nous permettre de dévisser de façon récurrente la notion de champ en termes d'une notion déjà bien connue pour les préfaisceaux simpliciaux.

Si A est une n -catégorie de Segal, on définit *l'intérieur de A* notée $A^{int, 0'}$ d'abord comme la sous- n -catégorie de Segal de A contenant seulement les i -flèches inversibles à homotopie près. Plus précisément on dira qu'une i -flèche $a \in A_{1^i}$ est *inversible à homotopie près* si l'image de a dans $\tau_{\leq i}A$ est une i -flèche inversible (rappelons que la composition des i -flèches dans la i -catégorie $\tau_{\leq i}A$ est bien définie, associative, etc.). L'intérieur $A^{int, 0'}$ de A est la sous- n -précat de Segal définie par la condition que $a \in A_M$ est dans $A_M^{int, 0'}$ si et seulement si $f^*(a)$ est une i -flèche inversible à homotopie près, pour tout morphisme $f : 1^i \rightarrow M$ de Θ^{n+1} , pour $i \leq n$. On voit que $A^{int, 0'}$ est une n -catégorie de Segal, et plus précisément un n -groupoïde de Segal. On introduit maintenant

$$A^{int, 0} := \mathfrak{R}_{\geq 0} A^{int, 0'},$$

qui est un ensemble simplicial. Cette dernière transformation ne change pas grand-chose car $A^{int, 0'}$ est déjà un n -groupoïde de Segal, et en particulier $\Pi_{n, Se} \circ A^{int, 0}$ est équivalente à $A^{int, 0'}$.

En termes d' ∞ -catégories, $A^{int,0}$ est l' ∞ -groupeïde universel muni d'un morphisme vers A .

Plus généralement on définit l'*intérieur k -groupeïde* $A^{int,k}$ d'une n -catégorie de Segal A , pour tout $k < n$. D'abord on définit $A^{int,k'} \subset A$ comme la sous- n -précat de Segal avec $a \in A_M$ contenu dans $A_M^{int,k'}$ si et seulement si f^*a est une i -flèche inversible à homotopie près pour tout morphisme $f : 1^i \rightarrow M$ avec $k < i \leq n$. Autrement dit, c'est seulement pour $i > k$ qu'on ne conserve que les i -flèches inversibles à homotopie près. Ici encore, on vérifie que $A^{int,k'}$ est une n -catégorie de Segal k -groupeïde (i.e. dont les i -flèches sont inversibles à homotopie près pour $i > k$). Comme précédemment, on introduit

$$A^{int,k} := \mathfrak{R}_{\geq k} A^{int,k'},$$

qui est une k -catégorie de Segal. On a

$$\Pi_{n-k, Se} \circ A^{int,k} \cong A^{int,k'}.$$

En termes d' ∞ -catégories, $A^{int,k}$ est l' ∞ -catégorie k -groupeïde universelle munie d'un morphisme vers A .

Si on veut appliquer ces constructions à une n -précat de Segal il faut d'abord appliquer l'opération *SeCat* pour avoir une n -catégorie de Segal (le cas échéant, ceci sera sous-entendu dans la notation: $A^{int,k} := SeCat(A)^{int,k}$).

Pour $k < l < n$ on a $(A^{int,l})^{int,k} = A^{int,k}$ à une équivalence—qu'on omettra de mentionner—près. D'autre part on a

$$\tau_{\leq m}(A^{int,k}) = \tau_{\leq m}A$$

pour $m \leq k$, et

$$\tau_{\leq m}(A^{int,k}) = (\tau_{\leq m})^{int,k}$$

pour $k < m$. Si $A \rightarrow B$ est une équivalence de n -catégories de Segal alors il en est de même de $A^{int,k} \rightarrow B^{int,k}$. De plus, A est k -groupeïde si et seulement si $A^{int,k} \rightarrow A$ est une équivalence.

Enfin, on peut utiliser ces constructions pour relier une n -catégorie de Segal A à sa troncation $\tau_{\leq k}(A)$. Rappelons que pour $k \geq n$ on a déjà un morphisme $\Pi_{k-n, Se} \circ A \rightarrow \tau_{\leq k}(A)$. Si de plus $k < n$, on a un couple de morphismes

$$\Pi_{n-k, Se} \circ A^{int,k} \rightarrow A$$

et

$$A^{int,k} \rightarrow \tau_{\leq k}(A).$$

Comment obtenir une structure de catégorie de modèles fermée

Avant d’aborder la preuve du théorème 2.3, nous extrayons de [63], [46], [59], et plus spécialement de Dwyer-Hirschhorn-Kan [30] un énoncé qui exprime exactement ce qu’il faut démontrer pour obtenir une structure de catégorie de modèles fermée comme dans 2.3. Un énoncé de même nature se trouve dans le livre de Hovey ([60] Theorem 2.1.11).

Soit M une catégorie et $C \subset M$ une sous-catégorie (i.e. classe de morphismes). Soit encore $I \subset C$ un sous-ensemble de morphismes. On dit que I engendre C si, pour tout morphisme $f : B \rightarrow B'$ de M , la propriété de relèvement [83] vis-à-vis des morphismes de I assure la propriété de relèvement vis-à-vis de tous les morphismes de C —i.e. pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \rightarrow & B' \end{array}$$

avec $E \rightarrow E'$ dans C , le morphisme diagonal existe.

On va mentionner, sans donner de définition, la propriété pour I de *permettre l’argument du petit objet* (“small object argument”), cf [59] [46] et particulièrement [30], 7.3. On note que si M admet un foncteur “ensemble sous-jacent” $M \rightarrow \mathit{Ens}$ convenable, alors tout sous-ensemble I de morphismes permet l’argument du petit objet ([30] 8.5, [59]). Ce sera le cas dans tous les exemples qu’on va considérer. En fait, dans ce cas on pourra dire que toute sous-catégorie $C \subset M$ qui est définie par des conditions ensemblistement raisonnables, aura un sous-ensemble générateur $I \subset C$ permettant l’argument du petit objet—voir par exemple l’argument de Jardine [63]. De façon générale nous ne donnerons pas de preuve pour ce type de condition.

Expliquons maintenant comment nous allons parler de “propriété de relèvement”. Il y a deux cas: soit on se donne le morphisme $B \rightarrow B'$ et on veut avoir la propriété de relèvement dans le diagramme ci-dessus pour tout morphisme $E \rightarrow E'$ dans une certaine classe; soit on se donne $E \rightarrow E'$ et on veut avoir la propriété pour tout $B \rightarrow B'$ dans une certaine classe. Au lieu de faire la distinction en parlant de “relèvement à gauche” et “relèvement à droite” (comme le fait Quillen [83]—mais nous n’arrivons pas à retenir où est la gauche dans cette affaire) nous laisserons au lecteur le soin de déduire du contexte ce qu’on veut dire, sachant que les “cofibrations” sont toujours à gauche et les “fibrations” à droite dans ce genre de diagramme.

On rappelle la notion de *catégorie de modèles fermée engendrée par cofibrations* de Hirschhorn [59] [30]: c’est une cmf M , admettant toutes les limites et colimites, et telle que les sous-catégories $\mathit{cof} \subset M$ et $\mathit{cof} \cap \mathit{W} \subset M$ de cofibrations et de cofibrations triviales admettent des ensembles générateurs permettant l’argument du petit objet.

On donne ici une version du *lemme de reconnaissance* ([30] 8.1, qu’Hirschhorn attribue à Kan cf [59]). Notre version n’est pas la plus générale, mais en revanche intègre

quelques remarques-clés qui se trouvent seulement plus loin dans [30], au moment de la démonstration de la structure de cmf pour les catégories simpliciales ([30] 48.7). Le lemme et sa preuve sont contenus implicitement dans l’argument de Jardine [63] et c’est par ailleurs plus ou moins sous cette forme que le deuxième auteur a recopié l’argument de Jardine dans [94]. D’autre part, l’argument se trouve (éparpillé) dans [46], ou encore (avec une liste analogue d’axiomes) dans [47]. Voir également l’énoncé de Hovey [60] 2.1.11. Nous conseillons au lecteur qui veut comprendre cette démonstration, de se reporter aux références [59] [30] [63] [46] [47] [60].

Le lemme suivant se trouve donc entièrement dans les références ci-dessus.

Lemme 2.5 *Soit M une catégorie avec deux sous-catégories $W \subset M$ et $\text{cof} \subset M$ dites d’équivalences faibles et de cofibrations (et on dit que $\text{cof} \cap W$ est la sous-catégorie des cofibrations triviales). Supposons que:*

- (0) *M admet toutes les limites et colimites indexées par des petites catégories;*
- (1) *tout rétracte d’un morphisme de W (resp. de cof) est dans W (resp. dans cof);*
- (2) *W satisfait “trois pour le prix de deux”: si deux parmi f , g , fg sont dans W alors le troisième aussi;*
- (3) *tout morphisme qui possède la propriété de relèvement par rapport aux morphismes de cof , est dans W ;*
- (4) *cof admet un sous-ensemble générateur $I \subset \text{cof}$ permettant l’argument du petit objet;*
- (5) *de même, $\text{cof} \cap W$ admet un sous-ensemble générateur $J \subset \text{cof} \cap W$ permettant l’argument du petit objet;*
- (6) *cof est stable par coproduit (i.e. si $A \rightarrow B$ est dans cof et $A \rightarrow A'$ est quelconque, alors $A' \rightarrow B \cup^A A'$ est dans cof) et par colimite séquentielle transfinie (voir [59] [30] pour la définition); et*
- (7) *de même, $\text{cof} \cap W$ est stable par coproduit et colimite séquentielle transfinie.*

Alors, en notant $\text{fib} \subset M$ la sous-catégorie dite “des fibrations” égale à la classe des morphismes qui possèdent la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations triviales, $(M, W, \text{cof}, \text{fib})$ est une catégorie de modèles fermée engendrée par cofibrations.

Preuve: On applique le critère de reconnaissance ([30] 8.1) (dont on adopte les notations pour la présente preuve). Le fait que I engendre cof en notre sens (4), implique $\text{cof} \subset I\text{-cof}$. Dans l’autre sens, d’après ([30] 7.3 (ii)), les morphismes de $I\text{-cof}$ sont retractes de limites séquentielles de coproduits par des morphismes de I ; donc par nos conditions (1) pour cof et (6), on a $I\text{-cof} \subset \text{cof}$ et donc $I\text{-cof} = \text{cof}$. De même en utilisant nos propriétés (5) et (1) pour cof + (7), on a $J\text{-cof} = \text{cof} \cap W$. Ceci nous donne les premières conditions de [30] 8.1 (ii) et (iii), i.e. que $J\text{-cof} = I\text{-cof} \cap W$. Les conditions du début de ([30] 8.1) sont notre (1) pour W et notre (2). La condition ([30] 8.1 (i)) résulte de (4) et (5). Enfin notre (3) donne $I\text{-inj} \subset W$, et comme le relèvement pour I (resp. J) est

équivalent au relèvement pour cof (resp. $\text{cof} \cap W$), il est clair qu'on a $I\text{-inj} \subset J\text{-inj}$. Ceci donne la deuxième partie de ([30] 8.1 (ii)), à savoir $I\text{-inj} \subset J\text{-inj} \cap W$. \square

Remarque: Il résulte immédiatement de la définition de [59] [30] que si (M, W, cof) est une catégorie de modèles fermée engendrée par cofibrations, alors les propriétés (0)–(7) sont satisfaites. Il peut être utile de noter que la partie de la définition de cmf engendrée par cofibrations qui va au-delà des axiomes de Quillen, consiste en: (0) pour les limites et colimites infinies; (4) et (5); et (6) et (7) pour les limites séquentielles.

Remarque: Lorsque nous appliquerons ce lemme, nous ne vérifierons pas les conditions (4) et (5), qui seront conséquences de l'existence d'un foncteur "ensemble sous-jacent" et du fait que cof et W seront (ensemblément) raisonnables. Voir dans Jardine [63] la technique nécessaire pour obtenir une démonstration rigoureuse de (4) et (5) dans notre type de situation (il traite le cas des préfaisceaux simpliciaux mais sa technique est très générale). D'autre part, les cofibrations seront en général simplement les morphismes qui induisent des injections sur les ensembles sous-jacents; donc (1) pour cof et (6) seront évidents. L'existence de limites et colimites sera une conséquence immédiate de la définition de la catégorie M (généralement comme catégorie de préfaisceaux d'ensembles sur une certaine catégorie). En somme, nous vérifierons seulement (1) pour W , (2), (3) et (7). La principale difficulté sera constituée par (7).

Démonstration du théorème 2.3

On pourrait simplement recopier la démonstration de [94] en remplaçant " n -précat" par " n -précat de Segal". Nous allons indiquer cependant comment obtenir la démonstration en utilisant le lemme 2.5 et en utilisant directement une partie des résultats de [94], sans tout recopier. Au passage, la présente démonstration améliore celle du §6 de [94] en remplaçant l'argument *ad hoc* pour la condition CM5(2) par la condition (3) du lemme 2.5 (plus, implicitement, via ce lemme, l'argument du petit objet).

Comme dans la remarque précédente, les conditions (0), (1) pour cof , et (6) sont immédiates. Nous n'allons pas traiter les conditions (4) et (5) qui sont de nature ensembliste. Il reste donc à traiter (1) pour W , (2), (3), et (7). Fixons n et traitons la catégorie $n\text{SePC}$ des n -précats de Segal.

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de n -précats de Segal. Supposons que f est rétracte d'une équivalence faible g . Alors $\text{SeCat}(f)$ est rétracte de $\text{SeCat}(g)$ et pour tout m , $\Pi_m \circ \text{SeCat}(f)$ est rétracte de $\Pi_m \circ \text{SeCat}(g)$. Ces derniers sont des morphismes de $n + m$ -catégories, donc la fermeture sous rétractes de la classe des équivalences entre $n + m$ -catégories ([94] §6) implique que $\Pi_m \circ \text{SeCat}(f)$ est une équivalence. Ce fait étant vrai pour tout m , il s'ensuit que $\text{SeCat}(f)$ est une équivalence donc, par définition, f est une équivalence faible. Ceci prouve (1) pour W .

De la même façon la propriété (2) “trois pour le prix de deux” est une conséquence immédiate (via la construction $\Pi_m \circ SeCat$) de la même propriété pour les $n+m$ -catégories pour tout m ([94] Lemma 3.8).

Pour la propriété (3), si $n = 0$, la propriété (3) est bien connue pour les ensembles simpliciaux; on suppose donc $n \geq 1$, et on suppose que (3) est connu pour $n-1$. Supposons qu’un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $nSePC$ satisfait la propriété de relèvement par rapport à toute cofibration $E \hookrightarrow E'$. Avec la cofibration $\emptyset \hookrightarrow *$ on obtient que f est surjectif sur les objets. On rappelle maintenant une construction de [95] qui sera utilisée souvent au travers du présent papier. Si E est une $n-1$ -précat on définit la n -précat $\Upsilon(E)$ avec deux objets $\Upsilon(E)_0 = \{0, 1\}$ et avec

$$\Upsilon(E)_{p/}(x_0, \dots, x_p)$$

égal à E si $x_0 = \dots = x_i = 0$ et $x_{i+1} = \dots = x_p = 1$ ($0 \leq i < p$); égal à $*$ si $x_0 = \dots = x_p = 0$ ou $x_0 = \dots = x_p = 1$; et égal à \emptyset sinon. Un morphisme $\Upsilon(E) \rightarrow A$ n’est rien d’autre qu’une paire d’objets $(x, y) \in A_0 \times A_0$ munie d’un morphisme $E \rightarrow A_{1/}(x, y)$. On revient à la démonstration de la propriété (3). La propriété de relèvement pour f vis-à-vis de toute cofibration, s’applique en particulier à $\Upsilon(E) \rightarrow \Upsilon(E')$ pour toute cofibration $E \rightarrow E'$ de $n-1$ -précats de Segal. Ceci implique que si $x, y \in A_0$ alors le morphisme

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(x, y)$$

de $n-1$ -précats de Segal, a la propriété de relèvement pour toute cofibration de $n-1$ -précats de Segal. La propriété (3) en degré $n-1$ implique que $A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(x, y)$ est une équivalence faible. Le même type d’argument (en utilisant la variante de la construction $\Upsilon(E)$ notée $[p]E$ dans [95] 2.4.5) montre que

$$A_{p/}(x_0, \dots, x_p) \rightarrow B_{p/}(f(x_0), \dots, f(x_p))$$

est une équivalence faible. Il résulte clairement de la description de $SeCat$ comme composée d’opérations de la forme Fix et $Gen[m]$ (voir les remarques suivant le lemme 2.2), que $SeCat(A)_{1/}(x, y) \rightarrow SeCat(B)_{1/}(f(x), f(y))$ est une équivalence. Donc $SeCat(f)$ est pleinement fidèle, donc c’est une équivalence, et f est une équivalence faible. Ceci donne la propriété (3).

Pour la propriété (7), soit

$$B \leftarrow A \rightarrow C$$

un diagramme où $A \rightarrow B$ est une cofibration triviale. Comme on l’a remarqué ci-dessus, le théorème de Seifert-Van Kampen, Theorem 9.1 de [94], donne une équivalence

$$(\Pi_m \circ B) \cup^{(\Pi_m \circ A)} (\Pi_m \circ C) \xrightarrow{\cong} \Pi_m \circ (B \cup^A C).$$

La propriété de préservation des cofibrations triviales par coproduit dans le cadre des $n + m$ -précats non de Segal ([94] Lemma 3.2) implique donc que

$$\Pi_m \circ C \rightarrow \Pi_m \circ (B \cup^A C)$$

est une équivalence faible. Ce fait étant vrai pour tout m , il s'ensuit que $C \rightarrow B \cup^A C$ est une équivalence faible (il convient de rappeler ici que par convention nous avons précomposé l'opération Π_m par $SeCat$). Ceci donne (7). \square

Classes d'homotopie de morphismes

On rappelle (Quillen [83]) que si M est une catégorie de modèles fermée et si $W \subset M$ est la sous-catégorie dont les morphismes sont les équivalences faibles, alors la catégorie localisée

$$Ho(M) := W^{-1}M$$

au sens de Gabriel-Zisman [41] possède d'autres descriptions utiles. Soient M_c, M_f et M_{cf} les catégories d'objets cofibrants, fibrants et cofibrants et fibrants, respectivement. Soient W_c, W_f et W_{cf} les intersections de W avec celles-ci. Alors les localisés $W_c^{-1}M_c, W_f^{-1}M_f$ et $W_{cf}^{-1}M_{cf}$ sont toutes trois équivalentes (via les foncteurs induits par les inclusions) à $Ho(M)$. Si on note πM_{cf} la catégorie dont les objets sont les objets de M_{cf} et les ensembles de morphismes sont les ensembles de *classes d'homotopie* de morphismes de M_{cf} [83], alors πM_{cf} est aussi équivalente à $Ho(M)$. Plus généralement, pour $A, B \in M$, si on choisit des équivalences faibles $A' \cong A$ et $B \cong B'$ avec A' cofibrant et B' fibrant, alors $Hom_{Ho(M)}(A, B)$ est l'ensemble de classes d'homotopie de morphismes $A' \rightarrow B'$. Suivant Quillen [83], on va adopter la notation

$$[A, B] := Hom_{Ho(M)}(A, B)$$

pour l'ensemble des morphismes de A vers B dans $Ho(M)$, avec $A, B \in Ob(M)$. En résumé, si A est cofibrant et B fibrant alors tout élément de $[A, B]$ provient d'un morphisme $A \rightarrow B$ de M , et deux tels morphismes donnent le même élément de $[A, B]$ si et seulement s'ils sont homotopes au sens de [83].

On applique ceci avec $M = nSePC$. Dans ce cas, on a un objet \bar{I} , la catégorie avec deux objets $0, 1$ liés par un isomorphisme, considéré comme n -catégorie de Segal (voir la rubrique "Induction" ci-dessus). Cet objet sert d'*intervalle*, i.e. pour tout objet $A \in nSePC$, $A \times \bar{I}$ est un objet " $A \times I$ " au sens de Quillen [83] et pour B fibrant, deux morphismes $f, g : A \rightarrow B$ sont homotopes si et seulement s'il existe un morphisme $h : A \times \bar{I} \rightarrow B$ avec $h|_{A \times \{0\}} = f$ et $h|_{A \times \{1\}} = g$. Si A et B sont deux objets de $nSePC$ alors on peut calculer

$$[A, B] = Hom_{Ho(nSePC)}(A, B)$$

en choisissant une équivalence faible $B \rightarrow B'$ vers un objet fibrant et (grâce au fait que A est automatiquement cofibrant) en prenant l'ensemble des morphismes $A \rightarrow B'$ modulo la relation d'homotopie explicitée plus haut à l'aide de \bar{I} .

3. Les n -préchamps de Segal

Soit maintenant \mathcal{X} un site, i.e. une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck. Rappelons que ceci veut dire une collection de cribles $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$, avec X variable, vérifiant certains axiomes (voir [3] [72] [87]).

Un n -préchamp de Segal au-dessus de \mathcal{X} est un foncteur de \mathcal{X}^o dans la catégorie $nSePC$ des n -précats de Segal, autrement dit c'est un préfaisceau de n -précats de Segal sur \mathcal{X} . Par exemple pour $n = 0$ c'est simplement un préfaisceau d'ensembles simpliciaux sur \mathcal{X} .

On note $nSePCh(\mathcal{X})$ ou simplement $nSePCh$ la catégorie des n -préchamps de Segal au-dessus de \mathcal{X} avec les morphismes respectant strictement la structure (i.e. les morphismes de préfaisceaux à valeurs dans $nSePC$).

Insistons sur le fait qu'il s'agit de foncteurs stricts de \mathcal{X}^o vers la 1-catégorie $nSePC$ où les morphismes sont les morphismes de n -précats de Segal respectant strictement la structure; en particulier on *ne considère pas pour le moment* de "préfaisceaux faibles" ou "lâches". Ceci sera justifié ultérieurement par le théorème 12.1 et en particulier sa partie "strictification" qui est, en fait, le corollaire 18.5.

On peut appliquer l'opération $\tau_{\leq m}$ à un n -préchamp de Segal A : d'abord on remplace chaque $A(X)$ par la n -catégorie de Segal $SeCat(A(X))$ et ensuite on applique objet-par-objet la troncation $\tau_{\leq m}$ décrite dans la section précédente.

Pour $n = 0$ on dispose de la catégorie de modèles fermée de Jardine [63] des préfaisceaux simpliciaux: les cofibrations sont les injections, les équivalences faibles sont celles d'Illusie [62], et les fibrations sont déterminées par la propriété de relèvement. Jardine montre dans [63] que ces trois classes donnent une structure de catégorie de modèles fermée.

Pour $n > 0$ on va suivre le fil de l'argument de Jardine [63] (qui est en quelque sorte résumé dans le lemme 2.5). Pour commencer, on impose—comme Jardine—que les *cofibrations* de n -préchamps de Segal soient les injections, i.e. les morphismes $A \rightarrow B$ tels que $A(X) \rightarrow B(X)$ soit une cofibration pour tout $X \in \mathcal{X}$.

La différence principale avec [63] est qu'il faut donner une définition récursive (sur $n > 0$) de l'équivalence faible. On dira qu'un morphisme $A \rightarrow B$ de n -préchamps de Segal, où tous les $A(X)$ et $B(X)$ sont des n -catégories de Segal, est une *équivalence faible* si:

—pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout $x, y \in A_0(X)$ le morphisme

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(x, y)$$

est une équivalence faible de $n - 1$ -préchamps de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ; et

—le morphisme de préfaisceaux d'ensembles $\tau_{\leq 0}A \rightarrow \tau_{\leq 0}B$ sur \mathcal{X} induit une surjection sur les faisceaux associés.

On dira qu'un morphisme $A \rightarrow B$ de n -préchamps de Segal est une *équivalence faible* si le morphisme $SeCat(A) \rightarrow SeCat(B)$ est une équivalence faible au sens de la définition ci-dessus.

Rappelons que pour $n = 0$ on a pris l'équivalence d'Illusie comme notion d'équivalence faible (les définitions ci-dessus n'ayant pas vraiment de sens). On peut observer que ce choix est compatible avec la construction $\Pi_{m, Se} \circ A$ et l'opération de troncation, voir le lemme 3.6 et le corollaire 3.7 ci-dessous.

Un morphisme de n -préchamps de Segal est une *fibration* s'il possède la propriété de relèvement vis-à-vis des cofibrations triviales.

Comparaison avec la topologie grossière: Notons \mathcal{G} la topologie de Grothendieck donnée sur \mathcal{X} pour la distinguer de la topologie grossière. On rappelle que la topologie grossière est celle où la seule crible recouvrant $X \in \mathcal{X}$ est $\mathcal{B} = X/\mathcal{X}$ (autrement dit pour qu'une famille recouvre X il faut qu'elle contienne X). On utilisera souvent cette topologie donc il convient de comparer les notions principales pour \mathcal{G} et pour la topologie grossière. La classe des cofibrations ne dépend pas de \mathcal{G} . Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de n -préchamps de Segal. Alors:

- f est une équivalence faible pour la topologie grossière si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{X}$, $A(X) \rightarrow B(X)$ est une équivalence faible de n -précats de Segal;
- si f est une équivalence faible pour la topologie grossière alors f est une \mathcal{G} -équivalence faible;
- si f est une \mathcal{G} -fibration alors f est une fibration pour la topologie grossière;
- si f est une fibration pour la topologie grossière alors chaque $f_X : A(X) \rightarrow B(X)$ est une fibration de n -précats de Segal;
- (ici on utilise le Théorème 3.1 ci-dessous) f est une \mathcal{G} -fibration triviale si et seulement si f est une fibration triviale pour la topologie grossière.

On revient maintenant à la considération de notre site \mathcal{X} avec sa topologie \mathcal{G} .

Théorème 3.1 *La catégorie $nSePCh(\mathcal{X})$ des n -préchamps de Segal avec les trois classes de morphismes (cofibrations, \mathcal{G} -équivalences et \mathcal{G} -fibrations) est une catégorie de modèles fermée.*

Pour $n = 0$ c'est le théorème de Jardine [63], Joyal [65], K. Brown [19]. On peut donc supposer $n \geq 1$ et supposer par récurrence que le résultat est vrai pour $n - 1$.

Pour la démonstration du Théorème 3.1 on aura besoin de la notion suivante. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de n -préchamps de Segal. On dira que f est une *équivalence préliminaire* si:

- le morphisme de préfaisceaux d'ensembles $A_0 \rightarrow B_0$ induit un isomorphisme entre les faisceaux associés; et
- pour tout $X \in \mathcal{X}$ et pour chaque suite d'objets $x_0, \dots, x_m \in A_0(X)$ le morphisme

$$A_{m/}(x_0, \dots, x_m) \rightarrow B_{m/}(f(x_0), \dots, f(x_m))$$

est une équivalence faible de $n - 1$ -préchamps de Segal sur \mathcal{X}/X .

Lemme 3.2 *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{q} & B' \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de $n - 1$ -préchamps de Segal, où B et B' sont des préfaisceaux d'ensembles. Supposons que le morphisme vertical de droite (qu'on note g) induit un isomorphisme entre les faisceaux associés. Alors le morphisme $A \rightarrow A'$ est une équivalence faible de $n - 1$ -préchamps de Segal si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{X}$ et $x \in B(X)$ le morphisme $p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(g(x))$ est une équivalence faible de $n - 1$ -préchamps de Segal.

C'est une conséquence directe de la définition de l'équivalence faible. \square

Corollaire 3.3 *Un morphisme $A \rightarrow B$ de n -préchamps de Segal est une équivalence préliminaire si et seulement si pour tout $m \in \Delta$ le morphisme $A_{m/} \rightarrow B_{m/}$ de $n - 1$ -préchamps de Segal est une équivalence faible. Dans ce cas les morphismes*

$$A_{1/} \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_{1/} \rightarrow B_{1/} \times_{B_0} \dots \times_{B_0} B_{1/}$$

sont aussi des équivalences faibles.

On note que pour $m = 0$ c'est la première condition pour une équivalence préliminaire; pour la deuxième condition on applique le lemme précédent. \square

Lemme 3.4 *Soit $f : A \rightarrow B$ une équivalence préliminaire de n -préchamps de Segal. Alors f est une équivalence faible de n -préchamps de Segal.*

Preuve: Le cas où les $A(X)$ et $B(X)$ sont des n -catégories de Segal est immédiat. Il suffit donc de prouver que si f est une équivalence préliminaire alors il en est de même de $SeCat(f) : SeCat(A) \rightarrow SeCat(B)$. Pour ceci on analysera les étapes décrites dans [94] pour passer de A à $SeCat(A)$ (la discussion de [94] pour l'opération Cat s'adapte directement pour l'opération $SeCat$, comme on l'a rappelé au §2). En outre, il s'agit ici de préfaisceaux de n -précats de Segal sur \mathcal{X} ; l'opération $SeCat$ est faite objet-par-objet (elle est fonctorielle). La construction $SeCat$ est obtenue en itérant les constructions notées Fix et $Gen[m]$ dans [94] et au §2 ci-dessus. L'opération Fix préserve le type d'équivalence faible des $A_{m/}$ donc il est clair qu'elle préserve la condition d'être une équivalence préliminaire. Il s'agit donc de traiter de $Gen[m]$.

L'opération $Gen[m]$ comporte d'abord une étape notée $A \mapsto A'$ dans [94], qui préserve le type d'équivalence faible des $A_{p/}$. Nous pouvons donc ignorer cette opération et noter encore A (resp. B) son résultat.

Ensuite on considère un diagramme de la forme

$$A_{m/} \rightarrow \mathcal{G}[m](A) \xrightarrow{g} A_{1/} \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_{1/}$$

où g est une cofibration triviale de n -préchamps de Segal objet-par-objet (i.e. pour la topologie grossière). (NB la notation $\mathcal{G}[m]$ n'a pas de lien avec la notation \mathcal{G} pour la topologie de Grothendieck, on garde $\mathcal{G}[m]$ seulement pour respecter les notations de [94].) Maintenant $Gen[m](A)_{p/}$ est le coproduit de $A_{p/}$ et $A_{m/} \rightarrow \mathcal{G}[m](A)$ pour divers morphismes $A_{m/} \rightarrow A_{p/}$ induits par divers morphismes $p \rightarrow m$. La stabilité des cofibrations \mathcal{G} -triviales par coproduit avec des objets cofibrants, pour les $n - 1$ -préchamps de Segal, est une conséquence du Théorème 3.1 pour $n - 1$, via le lemme de Reedy [86]. Donc le fait que les morphismes

$$\mathcal{G}[m](A) \rightarrow \mathcal{G}[m](B)$$

et

$$A_{p/} \rightarrow B_{p/}$$

soient des équivalences faibles de $n - 1$ -préchamps de Segal implique qu'il en est de même de $Gen[m](A)_{p/} \rightarrow Gen[m](B)_{p/}$. On obtient par le corollaire 3.3 que $Gen[m](A) \rightarrow Gen[m](B)$ est une équivalence préliminaire. En observant que l'équivalence faible des $n - 1$ -préchamps de Segal et donc l'équivalence préliminaire des n -préchamps de Segal est préservée par colimite filtrante, on obtient que $SeCat(A) \rightarrow SeCat(B)$ est une équivalence préliminaire, donc une équivalence faible. \square

Lemme 3.5 *La propriété d'être une équivalence faible est locale: si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de n -préchamps sur \mathcal{X}/X et si $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ est un crible couvrant X alors f est une équivalence faible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{B}$, $f|_{\mathcal{X}/Y}$ est une équivalence faible.*

Preuve: On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$ c'est une conséquence directe de la définition d'Illusie. Si on suppose que c'est vrai pour $n - 1$ alors il suffit (au vu de la définition d'équivalence faible) d'observer que le fait que $\tau_{\leq 0} SeCat(A) \rightarrow \tau_{\leq 0} SeCat(B)$ induise une surjection sur les faisceaux associés est une propriété locale; ce qui est évident (on utilise ici les axiomes d'une topologie de Grothendieck). \square

Démonstration du théorème 3.1: Notre preuve est modélée sur l'argument de Jardine [63] et nous appliquons donc notre lemme 2.5.

La propriété (0) est immédiate.

Il est facile de voir que les équivalences faibles sont stables sous rétractes, par récurrence sur n (le cas $n = 0$ est conséquence directe de la définition d'équivalence faible d'Illusie). La stabilité des cofibrations sous rétractes est immédiate, ce qui donne la condition (1) de 2.5.

Pour la propriété “trois pour le prix de deux” ((2) du 2.5), soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux morphismes. Il est immédiat que si f et g sont des équivalences faibles alors gf aussi; et que si gf et g sont des équivalences faibles alors f aussi (on remarque que la première condition pour g entraîne que le morphisme $\tau_{\leq 0}B \rightarrow \tau_{\leq 0}C$ induit une injection entre les faisceaux associés, donc la surjectivité essentielle de gf implique celle de f). Il faut montrer que si gf et f sont des équivalences faibles alors g est une équivalence faible. La condition d'essentielle surjectivité est évidente; le problème est la première condition (voir la démonstration analogue dans [94], Lemma 3.8). Cette condition est facile à vérifier pour des objets $x, y \in B_0(X)$ de la forme $x = f(u)$ et $y = f(v)$ avec $u, v \in A_0(X)$. Pour le cas général, soient $x, y \in B_0(X)$. Alors pour tout Y dans une famille couvrante de X on peut trouver des objets u_Y et v_Y dans $A_0(Y)$ avec des équivalences

$$i : f(u_Y) \cong x|_Y, \quad j : f(v_Y) \cong y|_Y$$

(ce sont des 1-morphismes dans $B(Y)$). On peut dire que “la composition avec i et j ” induit une équivalence objet-par-objet entre $B_{1/}(f(u_Y), f(v_Y))|_{\mathcal{X}/Y}$ et $B_{1/}(x, y)|_{\mathcal{X}/Y}$ (pour préciser ceci il faut une discussion analogue à celle précédant le Lemma 3.8 dans [94]). Le fait que

$$B_{1/}(f(u_Y), f(v_Y))|_{\mathcal{X}/Y} \xrightarrow{\cong} C_{1/}(gf(u_Y), gf(v_Y))|_{\mathcal{X}/Y}$$

soit une équivalence implique que

$$B_{1/}(x, y)|_{\mathcal{X}/Y} \rightarrow C_{1/}(g(x), g(y))|_{\mathcal{X}/Y}$$

est une équivalence. Ceci pour tout Y dans la famille couvrant X . Comme la condition d'être une équivalence faible est locale (lemme 3.5) on obtient que

$$B_{1/}(x, y)|_{\mathcal{X}/X} \rightarrow C_{1/}(g(x), g(y))|_{\mathcal{X}/X}$$

est une équivalence, ce qui est la condition cherchée.

Si $B' \rightarrow B$ est un morphisme qui possède la propriété de relèvement pour toute cofibration $A \rightarrow A'$, alors on obtient en particulier la propriété de relèvement vis-à-vis des cofibrations de la forme $C_X \rightarrow C'_X$ où C_X est le n -préchamp de Segal engendré librement par une n -précat de Segal C au-dessus d'un objet $X \in \mathcal{X}$; et ce morphisme provient par la même construction d'une cofibration $C \rightarrow C'$. Un morphisme $C_X \rightarrow B'$ s'identifie à un morphisme $C \rightarrow B'(X)$, et donc pour tout $X \in \mathcal{X}$, $B'(X) \rightarrow B(X)$ possède la propriété de relèvement vis-à-vis des cofibrations de n -précats de Segal. Ceci implique (par 2.3)

que $B'(X) \rightarrow B(X)$ est une équivalence faible, donc $B' \rightarrow B$ est une équivalence faible objet-par-objet i.e. pour la topologie grossière. On obtient ainsi la condition (3) de 2.5.

Comme d'habitude nous laissons au lecteur les questions ensemblistes (4) et (5) de 2.5.

La stabilité des cofibrations par coproduit ((6) du 2.5) est immédiate. Il ne reste donc qu'à démontrer la stabilité des cofibrations triviales par coproduit, la condition (7) de 2.5, ce qui occupera le reste de la démonstration (nous laissons au lecteur le soin de vérifier la stabilité des cofibrations triviales par limite séquentielle).

Soient $A \rightarrow B$ une cofibration \mathcal{G} -triviale et $A \rightarrow C$ un morphisme de n -préchamps de Segal. Soit $P := B \cup^A C$. On veut montrer que $C \rightarrow P$ est une cofibration \mathcal{G} -triviale. Il suffit de montrer que $SeCat(C) \rightarrow SeCat(P)$ est une \mathcal{G} -équivalence faible, or on sait (Théorème 2.3) que le morphisme

$$SeCat(B) \cup^{SeCat(A)} SeCat(C) \rightarrow SeCat(P)$$

est une équivalence faible objet-par-objet. Le morphisme $SeCat(A) \rightarrow SeCat(B)$ est encore une cofibration \mathcal{G} -triviale. Quitte à remplacer A, B et C par $SeCat(A), SeCat(B)$ et $SeCat(C)$ respectivement, on peut donc supposer que, pour tout $X, A(X), B(X)$ et $C(X)$ sont des n -catégories de Segal.

On traite d'abord quelques cas particuliers.

Cas 1. On suppose que $A_0 \rightarrow B_0$ induit un isomorphisme sur les faisceaux associés. Dans ce cas, il est facile de voir que $A \rightarrow B$ est une équivalence préliminaire. Le résultat qu'on est en train de démontrer, appliqué aux $n - 1$ -préchamps de Segal et combiné avec le Corollaire 3.3, implique que $C \rightarrow B \cup^A C$ est une équivalence préliminaire. Le Lemme 3.4 implique alors que c'est une équivalence faible.

Cas 2. On suppose que $A \rightarrow B$ est une équivalence faible et que pour tout $X \in \mathcal{X}$ le morphisme $A(X) \rightarrow B(X)$ est essentiellement surjectif. On commence par remarquer que le présent Théorème 3.1 est immédiat dans le cas de la topologie grossière. Il en résulte qu'il existe une factorisation

$$A \rightarrow B' \rightarrow B$$

dans laquelle, pour la topologie grossière, le premier morphisme est une cofibration et le deuxième est une fibration triviale. Soit $B'' \subset B'$ défini par la condition que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $B''(X) \subset B'(X)$ est la sous- n -catégorie de Segal pleine ayant pour objets ceux qui sont dans l'image de A_0 . Le morphisme $B''(X) \rightarrow B(X)$ est encore essentiellement surjectif et pleinement fidèle (car $B'(X) \rightarrow B(X)$ est une équivalence de n -catégories de Segal). Donc $B'' \rightarrow B$ est une équivalence pour la topologie grossière. Notre morphisme se factorise à travers une cofibration $A \rightarrow B''$. Le lemme de Reedy [86] (cf [59] [30] [60] [46]), qui s'applique ici car tous les objets sont cofibrants, implique que le morphisme

$$B'' \cup^A C \rightarrow B \cup^A C$$

est une équivalence pour la topologie grossière. Il suffit alors de savoir que

$$C \rightarrow B'' \cup^A C$$

est une équivalence faible. Le morphisme $A_0 \rightarrow B''_0$ est un isomorphisme (et $A \rightarrow B''$ est une équivalence faible car B'' est objet-par-objet équivalent à B), donc notre Cas 1 s'applique.

Fin de la démonstration: On traite maintenant le cas général (avec les mêmes notations $B \leftarrow A \rightarrow C$). Soit $U_0 \subset B_0$ l'image de A_0 . Soit $U \subset B$ le sous- n -préchamp de Segal plein ayant U_0 comme ensemble d'objets. Par ailleurs, pour $X \in \mathcal{X}$, soit $V_0(X)$ le sous-ensemble des objets de $B_0(X)$ qui sont équivalents à un objet de $U_0(X)$ et soit $V \subset B$ le sous- n -préchamp de Segal plein correspondant. Objet-par-objet, le morphisme $U \rightarrow V$ est essentiellement surjectif et pleinement fidèle, donc notre Cas 2 s'applique.

Le morphisme $A \rightarrow U$ est une équivalence faible et il est bijectif sur les objets; donc le Cas 1 s'applique.

Enfin le morphisme de préfaisceaux d'ensembles $V_0 \rightarrow B_0$ induit un isomorphisme entre les faisceaux associés: l'injectivité découle du fait que le morphisme de préfaisceaux est injectif; et la surjectivité découle du fait que tout objet de $B_0(X)$ est localement équivalent à un objet qui provient de A_0 , donc aussi de V_0 . Et donc le Cas 1 s'applique à nouveau.

On a ainsi une suite de cofibrations

$$A \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow B$$

avec qui les coproduits induisent des équivalences faibles d'après les cas 1, 2 et 1 respectivement. Ceci prouve que le coproduit le long de $A \rightarrow B$ induit lui aussi une équivalence faible. \square

Compatibilité avec les troncations

Soit A un m -préchamp de Segal, et $A \rightarrow A'$ un remplacement équivalent objet-par-objet tel que les $A'(X)$ soient des m -catégories de Segal (e.g. A' est un remplacement fibrant pour la topologie grossière). On considère le n -préchamp sur \mathcal{X} :

$$\tau_{\leq n} A := X \mapsto \tau_{\leq n}(A'(X)).$$

On utilise ici le mot “ n -précat” dans son sens de [94] et “ n -préchamp” pour préfaisceau de n -précats.

Remarque: cette construction a été noté $\tau_{\leq n}^{\text{pre}}$ par le deuxième auteur dans d'autres papiers; en effet, dans ces papiers on avait réservé la notation $\tau_{\leq n}$ pour le champ associé

(cf §9 et §13 ci-dessous) à $\tau_{\leq n}^{\text{pre}}$; mais du point de vue qu'on adopte ici, un préchamp est faiblement équivalent à son champ associé, et on n'a pas besoin de faire cette distinction de notation. Il faudra cependant faire attention que si A est un champ (cf §9) alors $\tau_{\leq n}A$ n'est plus forcément un champ.

Lemme 3.6 *Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de n -préchamps de Segal. Alors f est une équivalence faible pour la topologie \mathcal{G} si et seulement si, pour tout n ,*

$$\tau_{\leq n}(A) \rightarrow \tau_{\leq n}(B)$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible de n -préchamps.

Preuve: On vérifie d'abord que si A et B sont des n -préchamps de n -groupoïdes alors $f : A \rightarrow B$ est une équivalence faible (en utilisant notre définition pour les n -préchamps de Segal) si et seulement si $\mathfrak{R}_{\geq 0}A \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}B$ est une équivalence faible d'Illusie de préfaisceaux simpliciaux. On montre ceci par récurrence sur n , on peut donc supposer que c'est vrai pour $n - 1$. Pour $x, y \in A_0(X)$ on a

$$\text{Path}^{x,y}\mathfrak{R}_{\geq 0}A \cong \mathfrak{R}_{\geq 0}(A_{1/}(x, y))$$

(objet-par-objet on déduit ceci de [98]), et la même chose pour B . Grâce à l'hypothèse de récurrence on obtient que

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(fx, fy)$$

est une équivalence faible si et seulement si

$$\text{Path}^{x,y}\mathfrak{R}_{\geq 0}A \rightarrow \text{Path}^{fx,fy}\mathfrak{R}_{\geq 0}B$$

est une équivalence faible d'Illusie. D'autre part le préfaisceau d'ensembles $\tau_{\leq 0}A$ est isomorphe au préfaisceau d'ensembles $\pi_0 \circ \mathfrak{R}_{\geq 0}A$, donc on obtient que

$$\tau_{\leq 0}A \rightarrow \tau_{\leq 0}B$$

induit une surjection entre les faisceaux associés, si et seulement si

$$\pi_0 \circ \mathfrak{R}_{\geq 0}A \rightarrow \pi_0 \circ \mathfrak{R}_{\geq 0}B$$

induit une surjection entre les faisceaux associés. On conclut cette partie en remarquant qu'un morphisme $f : U \rightarrow V$ de préfaisceaux simpliciaux est une équivalence faible d'Illusie, si et seulement si (a) pour tout $x, y \in U_0(X)$, $\text{Path}^{x,y}(U) \rightarrow \text{Path}^{fx,fy}(V)$ est une équivalence faible d'Illusie, et (b) le morphisme $\pi_0 \circ U \rightarrow \pi_0 \circ V$ induit une surjection entre les faisceaux associés (l'argument pour justifier cette remarque est immédiat).

Maintenant on traite le lemme pour $m = 0$: soit $f : U \rightarrow V$ un morphisme de préfaisceaux simpliciaux. On sait que la troncation de Postnikov $F \rightarrow \mathfrak{R}\tau_{\leq n}F$ respecte les π_i pour $i \leq n$. Il s'ensuit que f est une équivalence faible d'Illusie si et seulement si

$$\mathfrak{R}\tau_{\leq n}U \rightarrow \mathfrak{R}\tau_{\leq n}V$$

est une équivalence faible d'Illusie pour tout n . En appliquant le résultat du paragraphe précédent, on obtient que f est une équivalence faible d'Illusie si et seulement si

$$\tau_{\leq n}(f) : \tau_{\leq n}U \rightarrow \tau_{\leq n}V$$

est une équivalence faible pour tout n , ce qui donne le lemme pour $m = 0$.

On traite maintenant le cas général par récurrence sur $m \geq 1$; on suppose que le résultat est vrai pour $m - 1$. Pour $f : A \rightarrow B$ et $x, y \in A(X)$ on a

$$(\tau_{\leq n}A)_{1/}(x, y) \cong \tau_{\leq n-1}(A_{1/}(x, y))$$

et de même pour B (ces équivalences entrant dans un diagramme commutatif de naturalité pour f). Les $A_{1/}(x, y)$ sont des $m - 1$ -préchamps de Segal. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow B_{1/}(fx, fy)$$

est une équivalence si et seulement si

$$(\tau_{\leq n}A)_{1/}(x, y) \rightarrow (\tau_{\leq n}B)_{1/}(fx, fy)$$

est une équivalence pour tout n . D'autre part on a l'isomorphisme naturel

$$\tau_{\leq 0}A \cong \tau_{\leq 0}(\tau_{\leq n}A).$$

Donc $\tau_{\leq 0}A \rightarrow \tau_{\leq 0}B$ induit une surjection entre les faisceaux associés si et seulement si

$$\tau_{\leq 0}(\tau_{\leq n}A) \rightarrow \tau_{\leq 0}(\tau_{\leq n}B)$$

induit une surjection entre les faisceaux associés pour tout n . Ceci termine la preuve du lemme. \square

Corollaire 3.7 *Soient m et n fixés. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ de m -préchamps de Segal est une \mathcal{G} -équivalence si et seulement si*

$$\Pi_{n, Se} \circ f : \Pi_{n, Se} \circ A \rightarrow \Pi_{n, Se} \circ B$$

est une \mathcal{G} -équivalence de $n + m$ -préchamps de Segal.

\square

Compatibilité avec le produit fibré homotopique

La catégorie de modèles fermée ci-dessus est presque propre. Le seul problème est que $nSePC$ elle-même n'est pas propre (pour un contre-exemple, voir [94]). Les \mathcal{G} -équivalences sont préservées par produit fibré avec une fibration à condition que les valeurs des n -préchamps de Segal considérés soient des n -catégories de Segal. Pour $n = 0$ (auquel cas il n'y a pas de condition) le fait que la cmf des préfaisceaux simpliciaux est propre est prouvé par Jardine dans [64].

En fait on a un énoncé un peu plus fort, à savoir la stabilité des \mathcal{G} -équivalences par produit fibré avec une fibration pour la topologie grossière. Autrement dit, le produit fibré homotopique pour la topologie grossière préserve les \mathcal{G} -équivalences. Cet énoncé a été conjecturé pour $n = 0$ par C. Rezk dans un courrier électronique à P. Hirschhorn [87]. Rezk montre la propriété analogue pour les préfaisceaux d'ensembles (i.e. le cas des 0-champs non de Segal). Encore plus intéressant, Rezk montre, dans le cadre de la localisation par une pré-topologie (i.e. collection de cribles) quelconque, que cette propriété pour les “équivalences locales” est équivalente au fait que la pré-topologie soit une topologie i.e. satisfasse aux axiomes pour une topologie de Grothendieck. Le lemme suivant a donc été inspiré par cette lettre de Rezk et nous remercions P. Hirschhorn de nous l'avoir fait suivre.

Lemme 3.8 *Si $A \rightarrow B$ est une cofibration et $A \rightarrow C$ une \mathcal{G} -équivalence faible alors $B \rightarrow B \cup^A C$ est une \mathcal{G} -équivalence faible. D'autre part, si $f : F \rightarrow E$ est une fibration (même seulement pour la topologie grossière) et $g : G \rightarrow E$ est une \mathcal{G} -équivalence faible, et si $G(X)$ et $E(X)$ sont des n -catégories de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$ alors $F \times_E G \rightarrow F$ est une \mathcal{G} -équivalence faible.*

Preuve: La première partie est immédiate (c'est le “lemme de Reedy” [86] [30] [59]) car tous les objets sont cofibrants.

Pour la deuxième partie, de façon générale, on notera $F \times_E^h G$ le produit fibré homotopique objet-par-objet; il s'identifie (objet-par-objet) au produit fibré ordinaire dans le cas où $F \rightarrow E$ est une fibration pour la topologie grossière et les $G(X)$ et $E(X)$ sont des n -catégories de Segal (voir [94] Theorem 6.7). L'opération de troncation préserve—presque—le produit fibré homotopique en ce sens qu'on a une équivalence objet-par-objet

$$\tau_{\leq n-1}(F \times_E^h G) \cong \tau_{\leq n-1} \left(\tau_{\leq n} F \times_{\tau_{\leq n} E}^h \tau_{\leq n} G \right).$$

Cette formule se démontre pour les 0-préchamps de Segal à l'aide de la suite exacte des groupes d'homotopie pour le produit fibré homotopique d'espaces. On l'obtient ensuite pour les n -préchamps de Segal par récurrence sur n (c'est le même argument que ci-dessous).

En utilisant cette formule et le lemme 3.6, on se ramène au cas où E , F et G sont des n -préchamps de Segal n -tronqués dont les valeurs sont des n -catégories de Segal (ils correspondent en fait à des n -préchamps non de Segal). Et on va traiter ce cas par récurrence sur n . Par exemple, s'il s'agissait au départ du cas des préfaisceaux simpliciaux, on se ramène au cas des préfaisceaux simpliciaux qui sont n -tronqués objet-par-objet.

On suppose donc que E, F, G sont des n -préchamps de Segal n -tronqués, et que les valeurs $E(X)$, $F(X)$ et $G(X)$ sont des n -catégories de Segal; avec un morphisme $f : F \rightarrow E$ fibrant pour la topologie grossière, et un morphisme $g : G \rightarrow E$ qui est une \mathcal{G} -équivalence faible. Le produit fibré homotopique objet-par-objet se calcule comme le produit fibré habituel $F \times_E G$. (Ici on utilise le théorème 6.7 de [94] dans sa version adaptée aux n -catégories de Segal).

Si (u, v) et (u', v') sont dans $(F \times_E G)_0(X)$ alors on a (en notant par w et w' leurs images dans $E_0(X)$):

$$(F \times_E G)_{1/}((u, v), (u', v')) = F_{1/}(u, u') \times_{E_{1/}(w, w')} G_{1/}(v, v').$$

Dans cette formule, à droite, les trois termes sont des $n - 1$ -préchamps de Segal $n - 1$ -tronqués sur \mathcal{X}/X . Les morphismes structurels sont, d'une part une fibration pour la topologie grossière, et d'autre part une \mathcal{G} -équivalence faible.

Par récurrence sur n on peut supposer que la première projection

$$(F \times_E G)_{1/}((u, v), (u', v')) \rightarrow F_{1/}(u, u')$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible. D'autre part

$$\tau_{\leq 0}(F \times_E^h G) \rightarrow (\tau_{\leq 0}F) \times_{\tau_{\leq 0}E} (\tau_{\leq 0}G)$$

est une surjection de préfaisceaux d'ensembles. La propriété en question pour les préfaisceaux d'ensembles (voir [87]) implique que le morphisme

$$(\tau_{\leq 0}F) \times_{\tau_{\leq 0}E} (\tau_{\leq 0}G) \rightarrow \tau_{\leq 0}F$$

induit une surjection sur les faisceaux associés; donc

$$\tau_{\leq 0}(F \times_E^h G) \rightarrow \tau_{\leq 0}F$$

induit également une surjection sur les faisceaux associés. On a vérifié tout ce qu'il faut pour affirmer que $F \times_E^h G \rightarrow F$ est une \mathcal{G} -équivalence faible. \square

Corollaire 3.9 *Soit*

$$\begin{array}{ccccc} F & \rightarrow & E & \leftarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F' & \rightarrow & E' & \leftarrow & G' \end{array}$$

un diagramme où les morphismes verticaux sont des \mathcal{G} -équivalences faibles. Alors le morphisme induit sur le produit homotopique objet-par-objet

$$F \times_E^h G \rightarrow F' \times_{E'}^h G'$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible.

Preuve: Ceci se démontre par un argument standard de Reedy. \square

Au §9 (corollaire 9.6) on verra que le corollaire précédent implique que le produit fibré homotopique objet-par-objet est stable par l'opération de passage au "champ associé". La question de Rezk était en fait posée sous cette forme.

Données de descente

Notons $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\text{gro}}))$ la catégorie homotopique de la catégorie de modèles fermée $nSePCh$ pour \mathcal{X}^{gro} . Rappelons ([83]) qu'elle peut être définie comme la localisée à la Gabriel-Zisman [41] de $nSePCh$ par rapport aux équivalences faibles (pour la topologie grossière) ou également comme la catégorie dont les objets sont les n -pré champs de Segal fibrants pour la topologie grossière (et automatiquement cofibrants) et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes. En fait on dispose de l'intervalle \bar{I} (la catégorie avec deux objets 0, 1 isomorphes) et comme tous les objets sont cofibrants, deux morphismes $f, g : A \rightarrow B$ avec B fibrant, sont homotopes si et seulement s'il existe $h : A \times \bar{I} \rightarrow B$ avec $h|_{A \times \{0\}} = f$ et $h|_{A \times \{1\}} = g$.

Soient $A, B \in nSePCh$. On note

$$[A, B]_{\mathcal{X}^{\text{gro}}}$$

l'ensemble de morphismes de A vers B dans $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\text{gro}}))$.

De la même façon on définit la catégorie homotopique $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}))$ pour la topologie \mathcal{G} , soit comme la localisée de Gabriel-Zisman de $nSePCh$ par les \mathcal{G} -équivalences faibles, soit comme la catégorie des objets \mathcal{G} -fibrants et classes d'homotopie de morphismes. On note

$$[A, B]_{\mathcal{X}^{\mathcal{G}}}$$

l'ensemble des morphismes de A vers B dans $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}))$.

Soit $X \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible couvrant X . Soit A un n -pré champ de Segal sur \mathcal{X} . Soit $*_{\mathcal{B}}$ le n -pré champ sur \mathcal{B} à valeurs la n -pré cat de Segal finale $*$. Une donnée de descente pour A par rapport au crible \mathcal{B} est un élément de l'ensemble

$$[*_{\mathcal{B}}, A]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}.$$

On peut calculer cet ensemble de la façon suivante. Soit $A \rightarrow A'$ un remplacement fibrant pour la topologie grossière. On verra dans la prochaine section que $A|_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{B}}$ est un remplacement fibrant pour \mathcal{B}^{gro} . Donc une donnée de descente i.e. élément de $[\ast_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$ est un morphisme $\ast_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{B}}$, à équivalence près (l'équivalence étant la relation d'homotopie avec l'intervalle \bar{I} par exemple). Par léger abus de notation on dira qu'une donnée de descente est un morphisme $\ast_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{B}}$.

Avec le foncteur $p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$ et la construction $p_!$ (voir §4 ci-dessous) on peut identifier un morphisme $\ast_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{B}}$ avec un morphisme $p_!\ast_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$. La n -précat de Segal $p_!\ast_{\mathcal{B}}$ sur \mathcal{X} (qui est en fait un préfaisceau d'ensembles sur \mathcal{X}) sera aussi souvent notée $\ast_{\mathcal{B}}$, et avec cette notation une donnée de descente pour A par rapport à \mathcal{B} est un morphisme $\ast_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$ à équivalence d'homotopie près.

Pour la question de "l'effectivité des données de descente" on s'intéresse aux données de descente à homotopie près; c'est pour cela qu'on utilise la catégorie homotopique ici pour donner la définition de "l'ensemble des données de descente". On pourrait aussi envisager de définir la n -catégorie de Segal des données de descente dont le présent ensemble est le $\tau_{\leq 0}$ ¹²; dans ce cas la terme "donnée de descente" introduit ici devrait être remplacée par "donnée de descente à homotopie près". Cependant, pour l'utilisation qu'on en fera dans le présent papier, la terminologie qu'on donne ici convient bien.

On a maintenant l'égalité

$$[\ast_{\mathcal{X}/X}, A|_{\mathcal{X}/X}]_{(\mathcal{X}/X)^{\text{gro}}} = [\ast, A(X)],$$

où la notation à droite signifie l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes $\ast \rightarrow A(X)$ dans $nSePC$; et la restriction de \mathcal{X}/X à \mathcal{B} induit donc un morphisme

$$[\ast, A(X)] \rightarrow [\ast_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}.$$

On dira qu'une donnée de descente pour A par rapport à \mathcal{B} est *effective* si elle est dans l'image de ce morphisme, i.e. si elle provient d'un élément de $[\ast, A(X)]$. La notion d'*effectivité des données de descente* entrera dans notre critère pour être un champ 10.2 ci-dessous.

En principe, les données de descente peuvent arriver sous forme d'un diagramme

$$\ast_{\mathcal{B}} \leftarrow D \rightarrow A' \leftarrow A$$

¹²La n -catégorie de Segal des données de descente serait $\underline{Hom}(\ast_{\mathcal{B}}, A')$ avec les notations du §11, ce qui est équivalent à $\lim_{\leftarrow, \mathcal{B}} A|_{\mathcal{B}}$ d'après 14.2. L'ensemble des données de descente peut alors être exprimé comme

$$[\ast_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}} = \tau_{\leq 0} \lim_{\leftarrow, \mathcal{B}} A|_{\mathcal{B}}.$$

où la première et la dernière flèche sont des équivalences faibles objet-par-objet. En fait, les données de descente proviendront le plus souvent de diagrammes de la forme

$$*_\mathcal{B} \leftarrow D \rightarrow A.$$

Au §5 ci-dessous on construira une seule flèche $D \rightarrow *_\mathcal{B}$ indépendamment de A , tel que pour tout n -préchamp A dont les valeurs $A(X)$ sont des n -catégories de Segal fibrantes, les données de descente pour A proviennent uniformément de diagrammes $*_\mathcal{B} \leftarrow D \rightarrow A$.

On pourrait aussi considérer des *données de descente généralisées*, qu'on définirait comme des éléments de $[*_\mathcal{X}/X, A|_{\mathcal{X}/X}]_{\mathcal{X}^{\mathcal{G}}}$. Dans cette optique une telle donnée peut provenir par exemple d'un diagramme

$$*_\mathcal{X}/X \leftarrow D \rightarrow A$$

où la première flèche est une \mathcal{G} -équivalence faible. Tel est certainement le cas si D est équivalent objet-par-objet à $*_\mathcal{B}$ pour un crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ couvrant X ; mais un tel diagramme pourrait aussi arriver à partir d'un *hyper-recouvrement* de X (cf l'exposé de Verdier dans [4]). On laisse au lecteur le soin d'explicitier la construction d'un D adéquat à partir d'un hyper-recouvrement.

4. Les functorialités p^* , p_* , $p!$

Nous traiterons des functorialités dans le cas des catégories avec la topologie grossière. La compatibilité avec une topologie de Grothendieck sera traitée ultérieurement (voir Corollaire 6.3).

Il convient (du moins pour les auteurs!) de rappeler la distinction entre adjoint à gauche et adjoint à droite (il s'agit de deux foncteurs L et R de sens contraire entre deux catégories): on aura une formule de la forme

$$\{LX \rightarrow Y\} \cong \{X \rightarrow RY\}, \text{ et}$$

l'adjoint à gauche est le foncteur L qui apparaît dans la formule à gauche de la flèche; et

l'adjoint à droite est le foncteur R qui apparaît dans la formule à droite de la flèche. On a les morphismes d'adjonction

$$X \rightarrow RLX, \quad \text{et} \quad LRY \rightarrow Y.$$

On rappelle la notion de *foncteur de Quillen* [83] [30] [60] [46]. Si M, M' sont deux catégories de modèles fermées, un foncteur $f : M \rightarrow M'$ est dit *foncteur de Quillen à gauche* s'il préserve les cofibrations et les cofibrations triviales (en particulier, on ne demande pas forcément que f préserve toutes les équivalences faibles, mais c'est parfois le cas tout de même); et si f admet un adjoint à droite. La notion de *foncteur de Quillen à droite* s'en déduit par dualité: c'est un foncteur qui préserve les fibrations et les fibrations triviales, et qui admet un adjoint à gauche. C'est un fait (pas complètement trivial) [83] que si f est un foncteur de Quillen à gauche alors son adjoint à droite est un foncteur de Quillen à droite et vice-versa. On rappelle aussi qu'un foncteur de Quillen à gauche préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants [46] [30] [60].

Soit $p : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ un foncteur entre 1-catégories munies de la topologie grossière. Les n -préchamps de Segal sont des préfaisceaux d'objets dans une catégorie admettant toutes les limites avec toutes les commutations nécessaires (en effet la catégorie $nSePC$ des n -précats de Segal en question, est elle-même une catégorie de préfaisceaux d'ensembles). En conséquence on dispose des opérations p^* , p_* , $p!$ (et $p^!$ dont on n'aura pas besoin). On les explicite pour plus de commodité.

D'abord si B est un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} alors $p^*(B)$ est le remonté de B sur \mathcal{Z} i.e. le composé

$$\mathcal{Z}^o \rightarrow \mathcal{X}^o \rightarrow nSePC.$$

Ce foncteur admet des adjoints à droite et à gauche. Si A est un n -préchamp de Segal sur \mathcal{Z} on pose

$$p_*(A)(X) := \lim_{\leftarrow, p(Z) \rightarrow X} A(Z)$$

la limite étant prise sur la catégorie des paires (Z, f) avec $f : p(Z) \rightarrow X$. D'autre part on pose

$$p_!(A)(X) := \lim_{\rightarrow, X \rightarrow p(Z)} A(Z),$$

la limite étant prise sur la catégorie des paires (Z, i) avec $i : X \rightarrow p(Z)$. On a les formules d'adjonction:

$$\{p_!A \rightarrow B\} = \{A \rightarrow p^*B\}$$

et

$$\{B \rightarrow p_*A\} = \{p^*B \rightarrow A\}.$$

Il est clair que le foncteur p^* préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. C'est donc un *foncteur de Quillen à gauche* et son adjoint à droite p_* envoie les fibrations (resp. fibrations triviales) sur des fibrations (resp. fibrations triviales).

On note $A \mapsto \Gamma(\mathcal{Z}, A)$ le cas particulier du foncteur p_* obtenu en faisant $\mathcal{X} = *$. On dit que c'est le foncteur des "sections globales". Il transforme les fibrations (resp. triviales) en fibrations (resp. triviales). Il convient parfois de remarquer que $\Gamma(\mathcal{Z}, A)$ peut être définie comme la n -précat de Segal qui représente le foncteur $E \mapsto Hom_{nPC}(\underline{E}, A)$ de $nSePC$ vers Ens , où $\underline{E} = p^*(E)$ est le n -préchamp de Segal constant à valeurs E .

On a la formule de composition $(pq)_* = p_*q_*$ (comme toujours, nous négligeons les éventuels problèmes de cohérence entre isomorphismes naturels dans des 1-catégories strictes comme $nSePCh$). En termes de Γ on obtient

$$\Gamma(\mathcal{X}, p_*(A)) = \Gamma(\mathcal{Z}, A).$$

Rappelons pour donner un sens homotopique à cette formule, que si A est fibrant sur \mathcal{X} alors $p_*(A)$ est fibrant sur \mathcal{X} .

Dans l'autre sens la situation n'est pas aussi facile. On aimerait pouvoir dire que si B est fibrant sur \mathcal{X} alors p^*B est fibrant sur \mathcal{Z} . Ceci n'est pas toujours le cas (même pour $p : \mathcal{Z} \rightarrow *$ par exemple). On a le lemme suivant.

Lemme 4.1 *Supposons que $p : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ a la propriété que pour tout $X \in \mathcal{X}$, l'opération*

$$A \mapsto \operatorname{colim}_{X \rightarrow p(Z)} A(Z)$$

préserve les cofibrations et cofibrations triviales. Alors p^ préserve les objets fibrants, les fibrations et les fibrations triviales (i.e. c'est un foncteur de Quillen à droite).*

Proof: L'hypothèse revient exactement à dire que le foncteur $p_!$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales; dans ce cas son adjoint à droite p^* préserve les fibrations et les fibrations triviales. \square

Remarque: Pour $X \in \mathcal{X}$ on note habituellement X/p la catégorie des paires (Z, f) où $Z \in \mathcal{Z}$ et $f : X \rightarrow p(Z)$. La limite dans l'hypothèse du lemme est prise sur X/p . Comme on parle de préfaisceaux, tout est contravariant. En particulier, si X/p est une catégorie cofiltrante (et notamment si elle a un objet initial) alors l'hypothèse est satisfaite.

Le cas qui nous intéresse est celui où \mathcal{Z} est la catégorie \mathcal{X}/Y pour un certain objet $Y \in \mathcal{X}$. Dans ce cas, pour $X \in \mathcal{X}$, la catégorie

$$X/p = \{X \rightarrow Z \rightarrow Y\}$$

est la catégorie des diagrammes. Elle se décompose en réunion disjointe de catégories $(X/p)_\varphi$ indexées par les flèches $\varphi : X \rightarrow Y$. Et la catégorie

$$(X/p)_\varphi = (X \xrightarrow{\varphi} Y)/(\mathcal{X}/Y)$$

est la catégorie des objets au-dessous de (X, φ) dans la catégorie des objets au-dessus de Y . En particulier, $(X/p)_\varphi$ admet (X, φ) comme objet initial. Ainsi l'opération

$$\operatorname{colim}_{X/p} A(Z) = \coprod_{\varphi: X \rightarrow Y} A(X)$$

vue comme foncteur en A préserve les cofibrations et les cofibrations triviales, donc pour

$$p : \mathcal{X}/Y \rightarrow \mathcal{X},$$

$p_!$ est un foncteur de Quillen à gauche et son adjoint p^* est un foncteur de Quillen à droite. On a la formule

$$p_!(A)(X) = \coprod_{\varphi: X \rightarrow Y} A(X).$$

Corollaire 4.2 *Si \mathcal{X} est une catégorie munie de la topologie grossière alors pour tout $X \in \mathcal{X}$ la restriction de n -préchamps de Segal*

$$A \mapsto A|_{\mathcal{X}/X}$$

préserve les fibrations (donc les objets fibrants), les cofibrations, et les équivalences faibles; c'est un foncteur de Quillen à la fois à gauche et à droite pour la topologie grossière.

□

On verra plus loin (Lemma 10.5) que la restriction sur \mathcal{X}/X préserve aussi les \mathcal{G} -fibrations (il est évident sur la définition qu'elle préserve les \mathcal{G} -équivalences faibles).

Un autre exemple qui nous intéresse est celui où $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ est un *crible*, i.e. une sous-catégorie pleine telle que si $X \rightarrow Y$ est un morphisme de \mathcal{X} et si $Y \in \mathcal{Z}$, alors $X \in \mathcal{Z}$. Dans ce cas, la colimite dans 4.1 est, ou bien vide si $X \notin \mathcal{Z}$, ou bien égale à $A(X)$ si $X \in \mathcal{Z}$. Cette construction préserve les cofibrations et cofibrations triviales. On obtient le

Corollaire 4.3 *Soit $i : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ un crible (les deux catégories considérées étant munies de leurs topologies grossières). Alors $i_!$ est un foncteur de Quillen à gauche et i^* un foncteur de Quillen à droite, i.e. i^* préserve les objets fibrants et équivalences faibles entre eux.*

□

On peut aussi expliciter $i_!$ dans ce corollaire: si A est un n -préchamp de Segal sur \mathcal{Z} alors $i_!(A)(X) = A(X)$ pour $X \in \mathcal{Z}$, et $i_!(A)(X) = \emptyset$ pour $X \notin \mathcal{Z}$.

5. La structure de type Bousfield-Kan d'après Hirschhorn

On veut indiquer ici une autre façon d'obtenir une catégorie de modèles fermée pour les n -champs de Segal, basée sur le livre de Hirschhorn [59] et qui trouve ses origines dans une construction de Bousfield-Kan [15] (qui à son tour remonte à Quillen [83]) pour le cas des préfaisceaux simpliciaux.

Dans [59], Hirschhorn définit d'abord la notion de *catégorie de modèles fermée engendrée par cofibrations*. Nous avons repris cette notion dans l'énoncé 2.5 ci-dessus, qui peut donc servir de définition. Ensuite, Hirschhorn montre que, pour toute catégorie \mathcal{X} petite et toute cmf M engendrée par cofibrations, la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{X} à valeurs dans M admet une structure de catégorie de modèles fermée notée

$$M^{\mathcal{X}^o}.$$

Pour $M = \mathit{EnsSpl}$ la construction est due à Bousfield-Kan ([15], p. 314). A son tour, leur construction était une application directe de la construction de Quillen [83] d'une cmf pour les objets simpliciaux dans une catégorie convenable, en l'occurrence celle des préfaisceaux d'ensembles. Pour cette raison nous appellerons *structure de HBKQ* (*i.e.* *Hirschhorn-Bousfield-Kan-Quillen*) cette structure de cmf définie par Hirschhorn sur $M^{\mathcal{X}^o}$.

Pour $M = n\mathit{SePC}$ égale à la catégorie des n -précats de Segal, la structure de HBKQ est différente de celle du théorème 3.1, notre catégorie de modèles des n -préchamps de Segal pour la topologie grossière. Les catégories sous-jacentes sont les mêmes, ainsi que les équivalences faibles (qui sont les équivalences faibles objet-par-objet). En revanche, les fibrations de HBKQ sont les morphismes $f : A \rightarrow B$ induisant pour tout X une fibration $f(X) : A(X) \rightarrow B(X)$ —c'est donc une classe plus grande que celle des fibrations du théorème 3.1. Et là où nous prenons toutes les injections comme cofibrations, la classe des cofibrations de HBKQ est plus petite: ce sont les rétractions de morphismes qui sont obtenus par une suite (transfinie) d'additions libres de cellules, où une *addition libre de cellules* est une cofibration $A \rightarrow A'$ engendrée librement par une cofibration $A(X) \rightarrow C'$ dans M (pour un seul objet X). Plus précisément si on note $p_X : \mathcal{X}/X \rightarrow \mathcal{X}$ le foncteur naturel, et par \underline{C} le diagramme constant sur \mathcal{X}/X à valeurs un objet C dans M , alors une libre addition de cellules est un coproduit de la forme

$$A' = A \cup^{p_X,!(C)} p_{X,!}(C')$$

pour une cofibration $C \rightarrow C'$ dans M (dans l'expression précédente on avait $C = A(X)$).

L'intérêt des morphismes obtenus par libre addition de cellules est le fait suivant: si $A \rightarrow A'$ est obtenu par l'addition d'une cellule $A(X) \rightarrow C'$ au-dessus de X , et si B est un autre diagramme, alors le prolongement d'un morphisme $f : A \rightarrow B$ en $f' : A' \rightarrow B$ n'est

rien d'autre que le prolongement du morphisme $f(X) : A(X) \rightarrow B(X)$ en un morphisme $C' \rightarrow B(X)$.

Comme les deux catégories et leurs sous-catégories d'équivalences faibles sont les mêmes, les deux théories homotopiques sont les mêmes (d'après la théorie de la localisation de Dwyer-Kan [31] [32] [33]).

Conclusion: On aurait pu prendre, comme catégorie de modèles fermée pour les n -préchamps de Segal sur \mathcal{X} avec la topologie grossière, la structure de HBKQ sur $M^{\mathcal{X}^o}$ avec pour M la catégorie de modèles fermée $nSePC$ des n -précats de Segal (Théorème 2.3). Dans la structure de HBKQ, les fibrations sont simplement les morphismes qui sont objet-par-objet des fibrations de n -précats de Segal.

Remarque: Si \mathcal{X} admet des produits fibrés alors les cofibrations de HBKQ sont stables par restriction aux sites \mathcal{X}/X et aussi stables par produit direct. Ceci permet d'appliquer la théorie des *Hom* internes qui sera expliquée au §11 ci-dessous.

Pour légitimer cet autre point de vue possible, il reste à voir comment intégrer une topologie de Grothendieck dans cette théorie. Soit encore M la catégorie des n -précats de Segal du Théorème 2.3. Sur $M^{\mathcal{X}^o}$ qui est la catégorie des n -préchamps de Segal, on garde la notion de cofibration de HBKQ; on utilise la notion de \mathcal{G} -équivalence faible définie ci-dessus; et on définit les *\mathcal{G} -fibrations de HBKQ* comme les morphismes qui possèdent la propriété de relèvement pour les cofibrations de HBKQ qui sont des \mathcal{G} -équivalences faibles.

Théorème 5.1 *La catégorie des n -préchamps de Segal munie des cofibrations de HBKQ, des \mathcal{G} -équivalences faibles, et des \mathcal{G} -fibrations de HBKQ, est une catégorie de modèles fermée.*

Preuve: Un morphisme est une cofibration \mathcal{G} -triviale de HBKQ, si et seulement si c'est une cofibration de HBKQ et aussi une cofibration \mathcal{G} -triviale pour la structure 3.1. Hirschhorn prouve que ses cofibrations (pour la topologie grossière) sont stables par coproduit [59]. Donc la préservation des cofibrations \mathcal{G} -triviales de HBKQ par coproduit est une conséquence immédiate du même résultat pour la structure du Théorème 3.1. Les autres propriétés sont aussi immédiates. \square

Le lecteur trouvera peut-être cette structure de catégorie de modèles fermée plus conviviale que celle de 3.1. Nous avons gardé la structure de 3.1 comme notion de base parce qu'elle est compatible avec la structure de Jardine (devenue standard notamment en K-théorie) pour les préfaisceaux simpliciaux i.e. pour le cas des 0-préchamps de Segal.

Calcul des classes d'homotopie d'applications

La structure de HBKQ permet de calculer plus facilement les classes d'homotopie d'applications. Fixons une catégorie \mathcal{X} munie de la topologie grossière. La catégorie

homotopique $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\text{gro}}))$ est définie comme la localisée de Gabriel-Zisman de $nSePCh(\mathcal{X})$ par la sous-catégorie des équivalences faibles objet-par-objet. En particulier, $Ho(nSePCh(\mathcal{X}^{\text{gro}}))$ ne dépend pas du choix de structure de cmf compatible avec ces équivalences faibles; en particulier on peut utiliser la structure de HBKQ pour calculer les ensembles Hom dans la catégorie homotopique, i.e. les ensembles de classes d'homotopie d'applications.

Commençons par une remarque d'ordre général: si E est une n -précat de Segal et si \underline{E} est le n -préchamp de Segal constant sur \mathcal{X} à valeurs E , alors le produit direct avec \underline{E} respecte les cofibrations de HBKQ (sans hypothèse sur l'existence de produits fibrés dans \mathcal{X} , et sans supposer que \underline{E} soit lui-même cofibrant). En effet, si $A \rightarrow A'$ est obtenu par addition d'une cellule $A(X) \rightarrow C$ au-dessus de l'objet X , alors $A \times \underline{E} \rightarrow A' \times \underline{E}$ est obtenu par addition de la cellule $A(X) \times E \rightarrow C \times E$. Plus généralement si $E \rightarrow E'$ est une cofibration de n -précats de Segal et $A \rightarrow A'$ est une cofibration de HBKQ alors

$$A \times \underline{E'} \cup^{A \times \underline{E}} A' \times \underline{E} \rightarrow A' \times \underline{E'}$$

est encore une cofibration de HBKQ.

Soient A et B deux n -préchamps de Segal sur \mathcal{X} et supposons que $B(X)$ est fibrant pour tout $X \in \mathcal{X}$. Alors B est un objet fibrant pour la structure HBKQ (pour la topologie grossière). Si on choisit un remplacement HBKQ-cofibrant $C \rightarrow A$ (équivalence faible objet-par-objet avec C cofibrant de HBKQ) alors tout élément de $[A, B]_{\mathcal{X}^{\text{gro}}}$ provient d'un morphisme $C \rightarrow B$. Notons \bar{I} la catégorie avec deux objets $0, 1$ et un isomorphisme entre eux (considérée comme n -catégorie de Segal, voir "Induction" au §2). Et notons aussi par \bar{I} le n -préchamp de Segal constant à valeurs \bar{I} . Le diagramme

$$C \times \{0, 1\} \rightarrow C \times \bar{I} \rightarrow C$$

constitue un "objet $C \times I$ " dans la terminologie de Quillen [83] pour la structure de HBKQ, et en particulier la première application est une cofibration. Donc, deux applications $C \rightarrow B$ sont homotopes, i.e. induisent le même élément de $[A, B]_{\mathcal{X}^{\text{gro}}}$, si et seulement si elles sont liées par une homotopie de la forme $C \times \bar{I} \rightarrow B$. On a ainsi obtenu l'énoncé suivant.

Lemme 5.2 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} et fixons un remplacement $C \rightarrow A$ avec C cofibrant de HBKQ. Alors pour tout n -préchamp de Segal B tel que $B(X)$ soit une n -catégorie de Segal fibrante pour tout $X \in \mathcal{X}$, l'ensemble de classes d'homotopie d'applications*

$$[A, B]_{\mathcal{X}^{\text{gro}}}$$

se calcule comme l'ensemble de morphismes de n -préchamps de Segal $C \rightarrow B$, modulo la relation d'équivalence qui identifie deux morphismes s'ils sont liés par une homotopie de la forme $C \times \bar{I} \rightarrow B$.

□

Expression uniforme des données de descente

On peut utiliser ce lemme 5.2 pour donner une expression uniforme des données de descente à valeurs dans un n -préchamp de Segal A tel que tous les $A(X)$ soient des n -catégories de Segal fibrante. Pour cette discussion il faut avoir $n \geq 1$ (dans le cas $n = 0$, il faut remplacer A par $\Pi_{1,Se} \circ A$ voir §10 par exemple).

Soit $X \in \mathcal{X}$ et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible couvrant X . Choisissons un remplacement HBKQ-cofibrant

$$D \rightarrow *_\mathcal{B}$$

(disons, pour fixer les idées, qu'on parle ici de n -préchamps de Segal sur \mathcal{B} —mais on peut aussi prendre le $p_!$ pour se retrouver sur \mathcal{X}/X ou sur \mathcal{X}). Maintenant, d'après le lemme 5.2, on sait que pour tout n -préchamp de Segal A tel que tous les $A(X)$ soient fibrants, l'ensemble des données de descente

$$[*_\mathcal{B}, A|_\mathcal{B}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$$

s'exprime comme l'ensemble de morphismes $D \rightarrow A|_\mathcal{B}$ modulo la relation qui identifie deux morphismes s'ils sont liés par une homotopie $D \times \bar{I} \rightarrow A|_\mathcal{B}$.

Supposons maintenant que le site \mathcal{X} admet des produits fibrés et que le crible \mathcal{B} provient d'une famille couvrante $\mathcal{U} = \{U_\alpha \rightarrow X\}$. Dans ce cas on peut donner une formule explicite pour un remplacement HBKQ-cofibrant $D \rightarrow *_\mathcal{B}$.

Pour cela, soit $\bar{I}^{(p)}$ la catégorie avec $p+1$ objets notés $0', \dots, p'$ et un isomorphisme entre chaque paire d'objets (c'est en quelque sorte le "produit symétrique" de p exemplaires de \bar{I}). Considérons-la comme n -précat de Segal (par "induction" voir §2). On obtient un foncteur noté

$$R : \Delta \rightarrow nSePC, \quad R(p) := \bar{I}^{(p)}.$$

Ce foncteur munit $nSePC$ d'une structure de cmf simpliciale [83]. En particulier, si K est un ensemble simplicial (on n'a pas besoin dans ce cas que K soit fini) et E une n -précat de Segal, on obtient la n -précat de Segal $K \otimes^R E$; dans notre cas on peut écrire

$$K \otimes^R E = (K \otimes^R *) \times E.$$

Ici $K \otimes^R *$ est juste le coproduit des $R(p)$ sur les p -simplexes de K (pris suivant le procédé habituel de réalisation d'un ensemble simplicial). On dira que $K \otimes^R *$ est la *réalisation de K par rapport à R* .

Cette construction étant fonctorielle, s'étend à des préfaisceaux d'ensembles simpliciaux: si K est un préfaisceau d'ensembles simpliciaux sur \mathcal{X} on obtient le n -préchamp de Segal $K \otimes^R *$.

Maintenant notre famille couvrante \mathcal{U} représente un préfaisceau d'ensembles: c'est tout simplement le préfaisceau réunion disjointe de ceux représentés par les U_α . On obtient le préfaisceau simplicial

$$P(\mathcal{U}) := \dots \mathcal{U} \times_X \mathcal{U} \rightrightarrows \mathcal{U}$$

i.e. $P(\mathcal{U})_k = \mathcal{U} \times_X \dots \times_X \mathcal{U}$ ($k + 1$ fois). C'est le *nerf du recouvrement* \mathcal{U} . En appliquant la construction "réalisation par rapport à R " on obtient le n -préchamp de Segal

$$D := P(\mathcal{U}) \otimes^R *.$$

Le morphisme $D \rightarrow *_\mathcal{B}$ est une équivalence objet-par-objet. En effet $P(\mathcal{U})(Y)$ est contractile si $Y \in \mathcal{B}$ et vide sinon. Observons que l'objet D est défini comme un n -préchamp sur \mathcal{X}/X , de sorte que pour définir le morphisme $D \rightarrow *_\mathcal{B}$ il faut interpréter $*_\mathcal{B}$ comme n -préchamp sur \mathcal{X}/X .

Nous prétendons que D est HBKQ-cofibrant. En fait il est intéressant de voir explicitement comment obtenir D à partir de \emptyset par une suite d'additions libres de cellules. D'abord on ajoute $R(0) = *$ au-dessus de chaque élément U_α de la famille couvrante. Appelons D^0 le résultat obtenu. Ensuite on ajoute $R(1) = \bar{I}$ au-dessus de chaque $U_\alpha \times_X U_\beta$, via le diagramme

$$D^0(U_\alpha \times_X U_\beta) \leftarrow p_1^* R(0) \sqcup p_2^* R(0) = \{0, 1\} \hookrightarrow \bar{I}.$$

Notons D^1 le résultat obtenu. Plus généralement notons $\partial R(p)$ le "bord" de $R(p)$, i.e. la réunion dans $R(p)$ des $p + 1$ faces de la forme $R(p - 1)$. On ajoute $R(2)$ au-dessus de chaque $U_\alpha \times_X U_\beta \times_X U_\gamma$ via le diagramme

$$D^1(U_\alpha \times_X U_\beta \times_X U_\gamma) \leftarrow \partial R(2) \hookrightarrow R(2)$$

pour obtenir D^2 . A chaque étape on ajoute à D^{p-1} un exemplaire de $R(p)$ au-dessus de chaque

$$U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} := U_{\alpha_0} \times_X \dots \times_X U_{\alpha_p},$$

via le diagramme

$$D^{p-1}(U_{\alpha_0} \times_X \dots \times_X U_{\alpha_p}) \leftarrow \partial R(p) \hookrightarrow R(p).$$

Enfin D est la colimite (réunion croissante) des D^p .

On note que D peut être considéré comme un n -préchamp de Segal au-dessus de \mathcal{B} et la description ci-dessus montre qu'en tant que tel (aussi bien qu'en tant que n -préchamp de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ou \mathcal{X}), il est HBKQ-cofibrant. On peut donc l'utiliser dans le lemme 5.2. On obtient l'énoncé suivant.

Lemme 5.3 *Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible engendré par une famille \mathcal{U} couvrant X . Soit $D \rightarrow *_\mathcal{B}$ le n -préchamp de Segal construit ci-dessus. Alors pour tout n -préchamp de Segal A sur \mathcal{X} tel que tous les $A(X)$ soient fibrants, l'ensemble des données de descente*

$$[*_\mathcal{B}, A|_\mathcal{B}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$$

se calcule comme l'ensemble de morphismes $D \rightarrow A$ modulo la relation qui identifie deux morphismes s'ils sont liés par un morphisme $D \times \bar{I} \rightarrow A$.

□

On peut donner une description explicite de ce que c'est qu'un morphisme $D \rightarrow A$. On procède par récurrence sur le p de D^p . Si on a un morphisme $D^{p-1} \rightarrow A$, alors on obtient pour chaque $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ le morphisme composé

$$\partial R(p) \rightarrow D^{p-1}(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}) \rightarrow A(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}).$$

Une extension en morphisme $D^p \rightarrow A$ n'est rien d'autre qu'une extension pour chaque $\alpha_0, \dots, \alpha_p$, du morphisme ci-dessus en un morphisme

$$R(p) \rightarrow A(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}).$$

Un morphisme $D \rightarrow A$ consiste en une telle collection d'extensions successives.

En résumé: un morphisme $\eta : D \rightarrow A$ est un ensemble de données comme suit: pour chaque α , un objet $\eta(\alpha) \in A(U_\alpha)$; pour chaque α, β une équivalence

$$\eta(\alpha, \beta) : \bar{I} \rightarrow A(U_{\alpha\beta})$$

entre les restrictions des objets $\eta(\alpha)$ et $\eta(\beta)$; pour chaque α, β, γ un morphisme

$$\eta(\alpha, \beta, \gamma) : \bar{I}^{(2)} \rightarrow A(U_{\alpha\beta\gamma})$$

qui, restreint au triangle $\partial R(2) \subset \bar{I}^{(2)}$, est égal au morphisme obtenu par restriction des $\eta(\alpha, \beta)$, $\eta(\beta, \gamma)$ et $\eta(\alpha, \gamma)$; etc.

Commentaire

Dans cette description des données de descente, on a utilisé de façon essentielle l'hypothèse que les $A(X)$ sont des n -catégories de Segal fibrantes. C'est pour cette raison qu'on ne voit pas apparaître de 2-morphismes, 3-morphismes etc dans les données. Par exemple, comme $A(U_{\alpha\beta\gamma})$ est fibrant, la donnée comme dans [18] de trois 1-flèches avec une 2-équivalence

entre fg et h , peut être remplacée par un vrai morphisme de $R(2)$ dans $A(U_{\alpha\beta\gamma})$ (i.e. en quelque sorte un objet de $A(U_{\alpha\beta\gamma})_{2/}$).

Ceci explique pourquoi nous arrivons à traiter le cas des n -catégories sans trop nous emmêler dans des “formules de cocycles” mais en fait c’est un désavantage si on cherche une compréhension explicite de ce qui se passe, car la notion de n -catégorie de Segal fibrante n’est pas très explicitement calculable.¹³ En particulier, si on n’arrive pas à donner une forme totalement “en termes de cocycles” de la notion de données de descente, à la façon dont Breen l’a fait pour les 2-champs dans [18], c’est parce que ce problème est plus difficile que ceux qu’on peut actuellement résoudre. On peut formuler un

Problème 5.4 *Trouver une structure de cmf analogue à la structure de HBKQ, pour les n -précats (de Segal) dont les objets fibrants soient les n -catégories de Segal.*

Avec une solution affirmative à ce problème, on pourrait reprendre la discussion ci-dessus des données de descente: si $D' \rightarrow *_B$ est un remplacement cofibrant pour la structure recherchée dans ce problème (qui donnerait aussi une structure de cmf pour les \mathcal{X}^o -diagrammes par la méthode de HBKQ), alors on pourrait dire que pour tout A tel que les $A(X)$ soient des n -catégories de Segal, une donnée de descente pour A par rapport à B est la même chose qu’un morphisme $D' \rightarrow A$. Dans ce cas, on verrait apparaître (beaucoup) des i -flèches pour tout i , et on obtiendrait en fait une description des données de descente en termes de cocycles au sens classique du terme (qui généraliserait [18]).

¹³D’un point de vue plus optimiste on peut cependant observer que si T est un espace topologique (ou ensemble simplicial de Kan) alors $\Pi_{n,Se}(T)$ est fibrant; donc les n -préchamps de Segal qui proviennent par application de $\Pi_{n,Se}$ aux préfaisceaux d’espaces topologiques (ou ensembles simpliciaux de Kan) vérifient la condition en question.

6. Le point de vue de la localisation

Le passage de la structure de catégorie de modèles fermée pour la topologie grossière à celle pour la topologie \mathcal{G} , est une *localisation de Bousfield*, opération qui est très bien expliquée dans Hirschhorn [59]; voir aussi Goerss-Jardine [47] et qui remonte bien sûr à Bousfield-Kan [15]. L'opération de passage de la topologie grossière à la topologie \mathcal{G} préserve la notion de cofibration (aussi bien dans le cadre de 3.1 que dans le cadre de 5.1), donc c'est une localisation de Bousfield à gauche dans la terminologie de [59].

Si $p : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un foncteur et U une n -précat de Segal alors on note $U_{\mathcal{Y}}$ le n -préchamp de Segal $p_!(\underline{U})$ où \underline{U} est le n -préchamp de Segal constant sur \mathcal{Y} à valeurs U .

On va considérer des cofibrations du type suivant: soit $X \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible; et soit $U \hookrightarrow U'$ une cofibration de n -précats de Segal. On note

$$\text{cof}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$$

la cofibration

$$U_{\mathcal{X}/X} \cup^{U_{\mathcal{B}}} U'_{\mathcal{B}} \rightarrow U'_{\mathcal{X}/X}.$$

Proposition 6.1 *La catégorie de modèles fermée de 3.1 (resp. de 5.1) pour la topologie \mathcal{G} , est la localisée de Bousfield à gauche ([59] Définition 3.3.1) de la catégorie de modèles fermée pour la topologie grossière, par rapport aux morphismes $\text{cof}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$, avec \mathcal{B} crible couvrant X pour \mathcal{G} .*

Preuve: On traite la structure de 3.1, l'autre cas étant analogue. Nous allons juste montrer l'étape-clé qui est le lemme suivant. Ce lemme impliquera, par la théorie de Hirschhorn [59] §3, la proposition. \square

Lemme 6.2 *Si $E \hookrightarrow E'$ est une cofibration \mathcal{G} -triviale alors il existe une suite (éventuellement transfinie voir la discussion de [59] [30] [60]) de cofibrations*

$$E = E_{-1} \hookrightarrow E_0 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_k \hookrightarrow \dots$$

de colimite notée E_{∞} , et une cofibration triviale pour la topologie grossière $E_{\infty} \hookrightarrow E'$ telle que $E \rightarrow E'$ soit une rétraction de $E \rightarrow E'$; et telle que les cofibrations $E_i \hookrightarrow E_{i+1}$ soient ou bien des coproduits de cofibrations de la forme $\text{cof}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$, ou bien des cofibrations triviales pour la topologie grossière.

Preuve: On appellera *suite adéquate* toute suite de cofibrations comme dans l'énoncé du lemme, et *composé* de cette suite, la colimite correspondante E_{∞} . On va prouver que si $f : E \rightarrow E'$ est une fibration \mathcal{G} -triviale alors il existe une suite adéquate, avec un

morphisme défini sur le composé $E_\infty \rightarrow E'$ qui étend f et qui est une équivalence pour la topologie grossière. Ceci impliquera le lemme (exercice laissé au lecteur).

On prouve ce résultat par récurrence sur n . On montre d'abord le pas de récurrence puis le cas $n = 0$. Soit $n \geq 1$ et on suppose donc le résultat vrai pour $n - 1$. On peut sans perte supposer que E et E' sont fibrants pour la topologie grossière. Pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d'objets $x, y \in E(X)$, le morphisme $E_{1/}(x, y) \rightarrow E'_{1/}(x, y)$ est une fibration \mathcal{G} -triviale de $n - 1$ -préchamps de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ; il est donc équivalent (pour la topologie grossière) au composé d'une suite adéquate. On remarque que pour tout coproduit de $E_{1/}(x, y)$ avec une cofibration de $n - 1$ -préchamps de Segal $V \rightarrow V'$ au-dessus de \mathcal{X}/X , on peut définir un coproduit correspondant de E avec $p_! \Upsilon(V) \rightarrow p_! \Upsilon(V')$ où $p : \mathcal{X}/X \rightarrow \mathcal{X}$ (ici on utilise la notation Υ introduite dans [95]).

D'autre part, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y$ est un crible couvrant $Y \in \mathcal{X}/X$ et U une $n - 1$ -précate de Segal alors

$$p_! \Upsilon(\text{cof}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X))$$

est identique à

$$\text{cof}(\Upsilon(U) \hookrightarrow \Upsilon(U'); \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X);$$

donc en appliquant $p_! \Upsilon$ à une suite adéquate de $n - 1$ -préchamps sur \mathcal{X}/X , on obtient une suite adéquate de n -préchamps sur \mathcal{X} .

Donc, à partir de la suite de cofibrations pour $E_{1/}(x, y) \rightarrow E'_{1/}(x, y)$ on obtiendra une suite adéquate de cofibrations pour

$$E \cup^{p_! \Upsilon(E_{1/}(x, y))} p_! \Upsilon(E'_{1/}(x, y)).$$

On peut ensuite ajouter les coproduits avec une cofibration $*_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{X}}$ (qui a la bonne forme $\text{cof}(\emptyset \hookrightarrow *, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$) pour chaque morphisme $u : *_{\mathcal{B}} \rightarrow E$ se prolongeant en $u' : *_{\mathcal{X}/X} \rightarrow E'$. Notons que le résultat obtenu admet un morphisme vers E' qui est (grâce à “trois pour le prix de deux”) une \mathcal{G} -équivalence faible.

Si on itère cette construction pour tout (X, x, y) et tout (X, \mathcal{B}, u, u') et cela une infinité dénombrable de fois, on obtient une factorisation

$$E \rightarrow E'' \rightarrow E'$$

où le premier morphisme est un composé de cofibrations de la forme voulue; et le deuxième est une \mathcal{G} équivalence faible et qui induit une équivalence pour la topologie grossière sur tous les $E''_{1/}(x, y) \rightarrow E'_{1/}(x, y)$; de plus $E'' \rightarrow E'$ a la propriété de relèvement pour les morphismes de la forme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{X}/X}$. Ceci implique que $E'' \rightarrow E'$ est une équivalence pour la topologie grossière, ce qui donne le résultat voulu.

Il reste à traiter le cas $n = 0$, i.e. le cas des préfaisceaux simpliciaux (ce cas est certainement déjà connu mais on reproduit l'argument ici pour le confort du lecteur).

Pour cela on suppose qu'on a une fibration $E \rightarrow E'$ qui est une équivalence faible d'Illusie, qu'on veut mettre sous forme de rétraction d'une suite adéquate de cofibrations.

On peut remarquer (directement à partir de la définition d'Illusie) que si $f : E \rightarrow E'$ est une fibration de préfaisceaux simpliciaux fibrants, le tout pour la topologie grossière, alors f est une \mathcal{G} -équivalence faible d'Illusie si et seulement si f vérifie la propriété de relèvement suivante: pour tout morphisme

$$\alpha : S^{n-1} \rightarrow E(X)$$

et tout prolongement de $f\alpha$ en un morphisme

$$\beta = B^n \rightarrow E'(X),$$

il existe un crible couvrant $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ et un relèvement de β au-dessus de \mathcal{B} :

$$\tilde{\beta} : B_{\mathcal{B}}^n \rightarrow E|_{\mathcal{B}}.$$

qui prolonge

$$\alpha|_{\mathcal{B}} : S_{\mathcal{B}}^{n-1} \rightarrow E|_{\mathcal{B}}.$$

Ici il nous faut considérer toutes les inclusions d'ensembles simpliciaux $S^{n-1} \subset B^n$ ayant le type d'homotopie de l'inclusion de la sphère dans la boule et l'indice \mathcal{B} dans la notation indique le préfaisceau simplicial constant sur \mathcal{B} avec la valeur donnée. Il est clair qu'en utilisant cette propriété de $E \rightarrow E'$ et l'argument des petits objets, si on ajoute à E (de façon répétitive et un nombre transfini suffisamment grand de fois) les coproduits avec les cofibrations de la forme

$$\text{cof}(S^{n-1} \hookrightarrow B^n; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X) : S_{\mathcal{X}/X}^{n-1} \cup^{S_{\mathcal{B}}^{n-1}} B_{\mathcal{B}}^n \rightarrow B_{\mathcal{X}/X}^n$$

alors on obtient une factorisation $E \rightarrow E'' \rightarrow E'$ où pour tout $X \in \mathcal{X}$ le morphisme $E''(X) \rightarrow E'(X)$ vérifie la propriété de relèvement pour $S^{n-1} \subset B^n$, i.e. c'est une équivalence faible objet-par-objet ou pour la topologie grossière. C'est la factorisation voulue pour $n = 0$. \square

Dans notre démonstration nous avons utilisé l'existence de la catégorie de modèles fermée 3.1, mais les résultats de Goerss-Jardine [47] montrent *a priori* que la localisation de la proposition est possible dans le cas $n = 0$ des préfaisceaux simpliciaux. Leur argument s'étend certainement au cas général, ce qui devrait donner une autre démonstration de 3.1. Le fait que la structure de cmf de Jardine pour les préfaisceaux simpliciaux peut s'obtenir par localisation à partir de celle pour la topologie grossière est implicite, sinon explicite, dans [47].

Dans le même ordre d'idées, Rezk montre dans [87] que la cmf des préfaisceaux pour la théorie des faisceaux, s'obtient, à partir de la cmf des préfaisceaux sans topologie, par

la localisation ci-dessus (i.e. Rezk traite le cas des 0-champs non de Segal). En outre il suggère à la fin de sa lettre que la même chose devrait être vraie pour la structure de Jardine.

La proposition reste également vraie pour la structure de catégorie de modèles fermé de type HBKQ. En fait, les résultats de [59] permettraient de définir une notion de M -champ et une catégorie de modèles fermée correspondante, pour toute catégorie de modèles fermée M , cellulaire et propre à gauche (cf la terminologie de [59]). On prendrait la catégorie de modèles fermée de diagrammes $M^{\mathcal{X}^o}$ et on localiserait par rapport à tous les morphismes $\text{cof}(U \hookrightarrow U', \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$ (qui ne sont malheureusement plus des cofibrations pour cette structure) obtenus en faisant varier $U \hookrightarrow U'$ dans la classe des cofibrations de M .

En fait, en poussant cette idée un peu plus loin, on peut envisager de considérer une notion de n -catégorie dans M pour une telle catégorie de modèles fermée, et de façon correspondante une notion de n -champ dans M . Pour ceci, il faudrait avoir l'analogue de 6.1 pour le procédé de localisation sous-jacent à [94] (localisation d'une part par rapport aux $\Sigma \rightarrow h$ et d'autre part en inversant $\bar{I} \rightarrow *$).

Le lemme 6.2 nous permet maintenant de faire l'analogue de 4.2, pour la topologie \mathcal{G} .

Corollaire 6.3 *Soit \mathcal{X} un site et $X \in \mathcal{X}$ avec $p : \mathcal{X}/X \rightarrow \mathcal{X}$ le foncteur d'oubli. Soit \mathcal{G} la topologie sur \mathcal{X} qui induit une topologie (notée aussi \mathcal{G}) sur \mathcal{X}/X . Alors $p_!$ transforme les cofibrations \mathcal{G} -triviales sur \mathcal{X} en cofibrations \mathcal{G} -triviales sur \mathcal{X}/X . Autrement dit, $p_!$ est un foncteur de Quillen à gauche et p^* un foncteur de Quillen à droite par rapport aux structures de 2.3 pour la topologie \mathcal{G} . Donc p^* préserve les objets fibrants et les fibrations.*

Preuve: Soit $Y \in \mathcal{X}/X$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y$ un crible couvrant Y . Notons $q : \mathcal{X}/Y \rightarrow \mathcal{X}/X$ le foncteur d'oubli. En particulier, pq est le foncteur d'oubli $\mathcal{X}/Y \rightarrow \mathcal{X}$. Notons $\text{cof}_{\mathcal{X}}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y)$ (resp. $\text{cof}_{\mathcal{X}/X}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y)$) la cofibration définie ci-dessus sur \mathcal{X} (resp. sur \mathcal{X}/X). Comme on a $(pq)_! = p_!q_!$, il résulte de la définition qu'on a

$$p_!\text{cof}_{\mathcal{X}/X}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y) = \text{cof}_{\mathcal{X}}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y).$$

Donc si $E \rightarrow E'$ est une cofibration triviale sur \mathcal{X}/X , on la décompose selon 6.2, on applique $p_!$, et on obtient une cofibration triviale sur \mathcal{X} . Ceci prouve que $p_!$ est un foncteur de Quillen à gauche. Il s'ensuit que son adjoint p^* est un foncteur de Quillen à droite, i.e. préserve les fibrations. \square

Remarque: Ce corollaire est valable aussi pour la structure de HBKQ.

Dans la structure de HBKQ on a aussi une réciproque:

Corollaire 6.4 *Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est \mathcal{G} -fibrant pour la structure de HBKQ si et seulement si $A|_{\mathcal{X}/X} \rightarrow B|_{\mathcal{X}/X}$ est \mathcal{G} -fibrant pour HBKQ pour chaque $X \in \mathcal{X}$.*

Preuve: Une direction est fournie par le corollaire précédent (pour la structure HBKQ). Pour l’autre direction, supposons que $f|_{\mathcal{X}/X}$ est une \mathcal{G} -fibration de HBKQ pour tout X . Alors f possède la propriété de relèvement pour les cofibrations qui sont triviales objet-par-objet (en fait d’après la construction de Hirschhorn [59], les cofibrations triviales pour la topologie grossière sont des rétractes de composés de suites de cofibrations obtenues par additions libres de cellules correspondant à des cofibrations triviales dans la cmf de base M); et f satisfait la propriété de relèvement pour les cofibrations $\text{cof}_{\mathcal{X}}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/Y)$. Par l’analogie du lemme 6.2 pour la structure de HBKQ, on obtient que f est une \mathcal{G} -fibration de HBKQ. \square

Contre-exemple: Le corollaire 6.4 n’est pas vrai pour la structure de 3.1, si la catégorie \mathcal{X} n’a pas d’objet final; et ceci même pour la topologie grossière. On donne un contre-exemple avec $n = 0$, i.e. pour les préfaisceaux simpliciaux. La catégorie sous-jacente \mathcal{X} sera la catégorie avec 1 seul objet x , et un groupe \mathbf{Z} d’automorphismes de x . Un préfaisceau simplicial au-dessus de X est juste un ensemble simplicial avec action de \mathbf{Z} , i.e. un couple (B, t) où B est un ensemble simplicial et t un automorphisme de B . Supposons que t agit sans point fixe à chaque niveau B_k . Si (A, s) est un autre objet, et si l’automorphisme s a un point fixe dans un A_k , alors il n’existe pas de morphisme $(A, s) \rightarrow (B, t)$. Ceci conduit à une contradiction avec la propriété du corollaire 6.4. En effet, la catégorie \mathcal{X}/x est la réunion disjointe d’exemplaires de la catégorie triviale, donc $(B, t)|_{\mathcal{X}/x}$ est fibrant si et seulement si B est un ensemble simplicial fibrant de Kan. Or il existe un tel B avec t agissant sans point fixe—par exemple on prend le complexe singulier total $\text{Sing}(\mathbf{R})$ avec la translation qui agit sur \mathbf{R} par $t : b \mapsto b + 1$. Maintenant on peut fabriquer une cofibration triviale

$$g : (B, t) \hookrightarrow (A, s)$$

tel que (A, s) ait des points fixes, pour compléter l’exemple. On prend $A = \text{Sing}(\mathbf{R}^2)$ avec l’automorphisme $s : (a, b) \mapsto (a, b + a)$ et le morphisme $B \rightarrow A$ défini par $g : b \mapsto (1, b)$. Notons que A et B sont contractiles, donc g est une cofibration triviale pour la structure 3.1 (la condition pour être une cofibration est juste d’être injectif). Or A a pour lieu fixe le sous-complexe $\text{Sing}(\{0\} \times \mathbf{R}) \subset \text{Sing}(\mathbf{R}^2)$. En particulier il n’existe pas d’application $(A, s) \rightarrow (B, t)$ qui induise l’identité sur (B, t) . Ceci montre que (B, t) n’est pas fibrant pour la structure de 3.1.

La localisation de Boole

Signalons l’existence du papier de Jardine sur la “localisation de Boole” [64]: il est probable qu’on pourrait donner un traitement de la cmf de 3.1 avec la technique de [64] mais nous n’avons pas exploré cette voie.

7. Catégories de Segal et catégories simpliciales

La plupart des exemples de n -champs de Segal concernent le cas $n = 1$. Il convient de souligner encore une fois qu'un 1-champ de Segal est en fait un certain type de ∞ -champ, où les morphismes en degré ≥ 2 sont inversibles. En particulier, un 1-champ de Segal peut être un n -champ pour $n > 1$ (c'est le cas quand les ensembles simpliciaux de morphismes sont $n - 1$ -tronqués).

Une *catégorie simpliciale*¹⁴ est une catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux (voir [66]). C'est donc un ensemble d'objets $Ob(C)$, muni, pour toute paire d'objets $x, y \in Ob(C)$, d'un ensemble simplicial $Mor_C(x, y)$ dit des morphismes de x vers y , avec une loi de composition

$$Mor_C(x, y) \times Mor_C(y, z) \rightarrow Mor_C(x, z)$$

qui est strictement associative, et des identités $1_x \in (Mor_C(x, x))_0$.

Les catégories simpliciales ont joué, depuis longtemps déjà, un rôle clé en théorie de l'homotopie, à commencer par Kan et Quillen; voir ensuite [31] [32] [33], particulièrement l'introduction de [34], et plus récemment [30]; dans la même volume que [34] on relève immédiatement d'autres papiers qui utilisent de façon essentielle cette notion, par exemple celui de Waldhausen.

Si C est une catégorie simpliciale, on définit la *1-catégorie de Segal associée*, qu'on note encore C , comme la catégorie de Segal définie par

$$C_0 := Ob(C),$$

et pour $x_0, \dots, x_p \in C_0$,

$$C_{p/}(x_0, \dots, x_p) := Mor_C(x_0, x_1) \times Mor_C(x_1, x_2) \times \dots \times Mor_C(x_{p-1}, x_p).$$

Les morphismes de la structure simpliciale sont définis (de façon évidente) en utilisant la composition en cas de besoin. Par exemple, la composition elle-même devient le morphisme de face 02

$$C_{1/}(x, y) \times C_{1/}(y, z) = C_{2/}(x, y, z) \rightarrow C_{1/}(x, z).$$

Un foncteur entre deux catégories simpliciales est une équivalence si et seulement si le morphisme correspondant entre 1-catégories de Segal est une équivalence. On va montrer,

¹⁴On fait ici un léger abus de notation: en principe une "catégorie simpliciale" devrait plutôt être un objet simplicial dans Cat , en particulier les objets devraient former un ensemble simplicial. Nous imposons la condition supplémentaire que l'ensemble simplicial d'objets soit constant i.e. un ensemble discret.

en utilisant la théorie de la localisation de Dwyer-Kan qui sera traitée ci-dessous, que toute 1-catégorie de Segal est équivalente à une catégorie simpliciale. Plus précisément, si A est une 1-catégorie de Segal et A' son remplacement fibrant alors il existe une catégorie simpliciale C et une équivalence $C \rightarrow A'$.

Pour notre traitement des morphismes, champs, etc. nous utilisons systématiquement le point de vue des 1-catégories de Segal. Signalons ici que les techniques que nous utilisons sont aussi disponibles, ou en voie de développement, pour les catégories simpliciales. Dwyer, Hirschhorn et Kan décrivent une catégorie de modèles fermée pour les catégories simpliciales, où les cofibrations sont les rétractions d'extensions libres (itérées) [30]. D'autre part, Cordier et Porter ont développé une théorie des morphismes “homotopiquement-cohérents” entre deux catégories simpliciales [24]. Si C et D sont deux catégories simpliciales, ils définissent une catégorie simpliciale $Coh(C, D)$ de foncteurs et transformations naturelles “cohérents” entre C et D . La notion de composition pour de tels foncteurs est un peu problématique (car la 2-catégorie de Segal $1SeCAT$ n'est pas équivalente à une 2-catégorie stricte simpliciale), et c'est le sujet d'une grande partie du papier [24].

Il reste notamment à faire le lien entre ces différents points de vue. On peut isoler deux problèmes:

Problème 7.1 *Donner une équivalence (à la Quillen) entre la cmf des catégories simpliciales de Dwyer-Hirschhorn-Kan [30], et la cmf des 1-précats de Segal du théorème 2.3;*

Problème 7.2 *Etant données deux catégories simpliciales C et D , construire une équivalence de 1-catégories de Segal*

$$Coh(C, D) \cong \underline{Hom}(C', D')$$

où $Coh(C, D)$ est la catégorie simpliciale définie par Porter et Cordier [24], C' et D' sont des remplacements fibrants des catégories de Segal correspondant à C et D et $\underline{Hom}(C', D')$ est le Hom interne des 1-précats de Segal (qui sera traité au §11 ci-dessous).

On fait un pas vers le premier de ces problèmes dans le corollaire 8.10 ci-dessous, où on montre que toute 1-catégorie de Segal est équivalente à une 1-catégorie simpliciale.

Remarque: La catégorie de modèles fermée de Dwyer-Hirschhorn-Kan ne peut pas être “interne” (voir §11 ci-dessous) car les cofibrations sont des extensions libres (itérées) de catégories et ne sont donc pas stables par produit direct. En particulier, la construction de [94] (voir aussi §11 ci-dessous) d'une catégorie stricte enrichie pour les objets en question, ne peut pas s'adapter à cette catégorie de modèles fermée.

En fait, il ne peut pas exister une catégorie stricte $SplCAT$ enrichie sur les 1-catégories simpliciales et ayant le bon type d'homotopie (i.e. équivalente à $1SeCAT$). Car si $SplCAT$

existait, on pourrait effectuer la troncation $\tau_{\leq 3}SplCAT$, c'est-à-dire une troncation ≤ 2 pour les catégories simpliciales de morphismes, ou encore une troncation ≤ 1 pour les ensembles simpliciaux de 2-morphismes. Or la troncation $\tau_{\leq 1}$ donne une 1-catégorie stricte, et est compatible aux produits directs. Ceci entraînerait que $\tau_{\leq 3}SplCAT$ serait une 3-catégorie stricte. Mais $1SeCAT$ a des produits de Whitehead non triviaux, ce qui implique que $\tau_{\leq 3}(1SeCAT)$ ne peut pas être équivalente à une 3-catégorie stricte.

Produits et coproduits homotopiques

Dans une catégorie simpliciale on a une notion de *produit fibré homotopique* et la notion duale de *coproduit homotopique*. En fait, on dispose de ces notions dans une n -catégorie de Segal cf [95] mais on se borne ici au cas $n = 1$. C'est un cas particulier de la notion de limite (ou de colimite), voir [95] et §14 ci-dessous.

Soit A une catégorie simpliciale, avec $X, Y, Z \in A_0$ et des morphismes (i.e. sommets de l'ensemble simplicial $Hom_A(\cdot, \cdot)$) $f : X \rightarrow Y$ et $g : Z \rightarrow Y$. Si $U \in A_0$ est un objet muni de morphismes $p : U \rightarrow X$ et $q : U \rightarrow Z$ et d'une homotopie $\gamma : fp \sim gq$ on dira que (U, p, q, γ) est un *produit fibré homotopique* et on écrira

$$U = X \times_Y^h Z$$

si, pour tout objet $V \in A_0$ le morphisme $\mu_{V,U}$ induit par (p, q, γ)

$$Hom_A(V, U) \rightarrow Hom_A(V, X) \times_{Hom_A(V, Y)}^h Hom_A(V, Z)$$

est une équivalence faible; à droite il s'agit du produit fibré homotopique d'ensembles simpliciaux (obtenu par remplacement d'un des morphismes par une fibration de Kan), et le morphisme est défini à homotopie près après remplacement à droite par un ensemble simplicial de Kan. En fait le lecteur pourrait imaginer qu'on a $fp = gq$ et que γ est l'homotopie constante—ce sera le cas notamment dans nos exemples provenant des catégories de modèles fermées—mais si on imposait cette condition alors la notion ne serait pas invariante par équivalence $A \cong A'$ de catégories simpliciales. Si fp et gq sont égaux, le morphisme ci-dessus est bien défini à valeurs dans le produit fibré strict habituel (non-homotopique).

Si (V, p', q', γ') se trouve être un autre produit fibré homotopique (pour les mêmes données) alors la fibre homotopique de $\mu_{V,U}$ au-dessus de (p', q', γ') est contractile, tout comme celle de $\mu_{U,V}$ au-dessus de (p, q, γ) , ce qui fournit des ensembles simpliciaux contractiles canoniques de morphismes $U \rightarrow V$ et $V \rightarrow U$, et assure l'unicité essentielle du produit fibré homotopique (U, p, q, γ) s'il en existe un.

On dira que A admet des *produits fibrés homotopiques* s'il existe un produit fibré homotopique $(U, p, q, \gamma) = X \times_Y^h Z$ pour tout couple de morphismes $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ de A .

On a une notion duale de *coproduit homotopique*: si $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est un diagramme dans A , le coproduit homotopique correspondant est un quadruplet (U, i, j, δ) avec $i : X \rightarrow U$, $j : Z \rightarrow U$ et δ une homotopie $if \sim jg$. On laisse au lecteur le soin de donner des précisions analogues à ce qui est dit plus haut pour le produit. On notera le coproduit homotopique

$$(U, i, j, \delta) = X \cup_h^Y Z,$$

et on dira que A admet des coproduits homotopiques s'il existe un tel coproduit homotopique pour tout couple de morphismes $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Ces notions sont les généralisations aux objets d'une catégorie simpliciale quelconque, des *holim* et *hocolim* de Bousfield-Kan [15] *et al.*

Ces notions peuvent être définies de la même façon pour une 1-catégorie de Segal A à condition de choisir un scindage $A_{1/} \times_{A_0} A_{1/} \rightarrow A_{2/}$ (un tel scindage existe par exemple si A est fibrante) fournissant un morphisme de composition $A_{1/} \times_{A_0} A_{1/} \rightarrow A_{1/}$; et on n'a pas besoin des relations de cohérence supérieures. On laisse ce développement au lecteur, ainsi que le soin de vérifier que ces notions de limites et colimites sont compatibles avec les définitions de [95].

Dans [41], Gabriel et Zisman ont introduit une notion de produit fibré homotopique dans une 2-catégorie stricte, et ils l'ont utilisée pour construire le foncteur Ω sur la catégorie homotopique $Ho(Top)$ donnant lieu à la suite exacte longue d'une fibration. Dualement ils ont introduit une notion de coproduit homotopique et l'ont utilisée pour construire le foncteur Σ sur $Ho(Top)$. Dans les deux cas, en utilisant la structure de 2-catégorie, ils produisent des limites ou colimites bien définies dans la 1-catégorie obtenue par troncation (en l'occurrence la catégorie homotopique). On peut voir la notion de produit fibré homotopique ci-dessus comme une généralisation de leur notion au cas des n -catégories (1-groupiques) quand n tend vers l'infini. Expliquons en quoi les deux constructions sont compatibles: si A est une catégorie simpliciale alors la construction de [41] pour Top s'étend en une version de $\tau_{\leq 2}A$ qui est une 2-catégorie stricte; et on peut alors appliquer l'argument de [41] à $\tau_{\leq 2}A$. Si A admet des produits fibrés homotopiques au sens ci-dessus, alors $\tau_{\leq 2}A$ vérifie les conditions (A), (B), (C) de [41], et le produit qu'ils définissent est l'image de notre produit fibré homotopique dans le tronqué $\tau_{\leq 1}A$ (en fait ils regardent surtout la fibre homotopique au-dessus d'un point de base mais pour le produit fibré l'argument est le même).

L'argument de Gabriel-Zisman permet—en passant par $\tau_{\leq 2}A$ — de munir $\tau_{\leq 1}A$ d'une structure supplémentaire avec les opérations Ω (quand A est pointé et admet des produits fibrés homotopiques) et Σ (quand A est pointé et admet des coproduits homotopiques). Alternativement (mais on souligne quand-même que l'argument de Gabriel-Zisman date de 1964) on peut induire directement vers le tronqué $\tau_{\leq 1}A$, ces opérations qu'on peut

définir sur A par

$$\Omega X := * \times_X^h *$$

et

$$\Sigma Y := * \cup_h^Y *.$$

Une version de l'argument de Gabriel-Zisman adaptée aux catégories d.g. de complexes, est donnée par Bondal-Kapranov [14]. Nous ne nous sommes aperçu de l'existence de l'argument de Gabriel-Zisman qu'après que M. Kontsevich nous a indiqué le résultat de Bondal-Kapranov.

8. Localisation de Dwyer-Kan

Une bonne source d'exemples de catégories simpliciales, et donc de 1-catégories de Segal, est la théorie des localisées simpliciales $L(C, W)$ (et leurs variantes $L^H(C, W)$ qui sont équivalentes) développée dans les papiers de Dwyer et Kan [31], [32], [33]. Si C est une catégorie et W une sous-catégorie on obtient une catégorie simpliciale $L(C, W)$ “en inversant homotopiquement les fleches de W ” (souvent la sous-catégorie “des équivalences” W est sous-entendu, dans ce cas on utilisera la notation $L(C)$ voir Convention 8.3 ci-dessous). Nous renvoyons le lecteur aux travaux [31], [32], [33] pour plus sur les notations et définitions.

Ici, le terme “localisation” n’a pas exactement la même signification qu’au §6 (bien qu’il y ait un rapport entre les deux notions). Pour le reste du papier nous utiliserons le mot “localisation” pour parler de la localisation de Dwyer-Kan (ou de son analogue pour les n -catégories de Segal).

Pour être historiquement correct il convient de préciser que Quillen [83] avait déjà, avec sa notion de catégorie de modèles fermée simpliciale, trouvé la plupart des catégories simpliciales qu’on construit avec la localisation de Dwyer-Kan; et en particulier, dans tous nos exemples, la cmf M qu’on localise admet déjà une structure simpliciale et on pourrait donc faire référence à [83]. Cependant, l’observation de Dwyer-Kan selon laquelle la structure simpliciale ne dépend, à équivalence près, que de M et de sa sous-catégorie d’équivalences faibles est une amélioration très importante par rapport [83] qui permet d’obtenir facilement des functorialités sans avoir à vérifier qu’un foncteur préserve la structure simpliciale. C’est pour cette raison que nous utilisons systématiquement cette construction de Dwyer-Kan.

On commence par une remarque plus ou moins triviale mais qui n’apparaît pas explicitement dans [31], [32], [33]. C’est une variante du Corollaire 3.6 de [32] dans laquelle on considère des foncteurs non nécessairement adjoints et des transformations naturelles de direction quelconque. Pour exprimer cette observation, convenons d’appeler *chaîne de transformations naturelles* entre deux foncteurs A et B la donnée d’une suite $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ de foncteurs et d’une suite u_1, \dots, u_n où u_i est une transformation naturelle soit de A_{i-1} vers A_i soit de A_i vers A_{i-1} . Convenons aussi de dire qu’une transformation naturelle u entre deux foncteurs $F, G : C \rightarrow D$ est à valeurs dans la sous-catégorie W de D si pour tout objet X de C , $u(X)$ est un morphisme de W (de même pour une chaîne de transformations naturelles).

Lemme 8.1 *Soit C et C' deux catégories munies de sous-catégories W et W' . Soient*

$$F : C \rightarrow C', \quad G : C' \rightarrow C$$

deux foncteurs avec $F(W) \subset W'$ et $G(W') \subset W$. Supposons qu'il existe des chaînes de transformations naturelles $u : GF \leftrightarrow 1_C$ et $v : FG \leftrightarrow 1_{C'}$ à valeurs respectivement dans W et W' . Alors F induit une équivalence de catégories simpliciales

$$L(C, W) \xrightarrow{\cong} L(C', W').$$

Preuve: L'existence d'une chaîne de transformations naturelles à valeurs dans W implique que le foncteur induit par GF sur $L(C, W)$ est une équivalence: il résulte alors des Propositions 3.3 et 3.5 de [32] que le morphisme $L(C, W)(X, Y) \rightarrow L(C, W)(GF X, GF Y)$ est une équivalence, et il est facile de voir que $GF : L(C, W) \rightarrow L(C, W)$ est essentiellement surjectif. De même le foncteur induit par FG est une équivalence. Par conséquent F et G induisent des équivalences. A la limite, cette dernière étape peut être vue en utilisant la structure de catégorie de modèles fermée pour les 1-précats de Segal: un foncteur est une équivalence si et seulement s'il induit un isomorphisme dans la catégorie homotopique, et, dans celle-ci, on peut utiliser le fait que l'existence d'inverses à droite et à gauche implique l'inversibilité; enfin, pour conclure, on observe qu'un foncteur entre catégories simpliciales est une équivalence si et seulement si le foncteur correspondant entre 1-catégories de Segal est une équivalence. \square

L'observation suivante est utile pour traiter des sous-catégories définies par des conditions homotopiquement invariantes, par exemple des catégories de complexes à cohomologie supportée dans un intervalle.

Proposition 8.2 *Soit C une catégorie et W une sous-catégorie de C admettant un calcul de fractions homotopique (cf [41]). Soit $B \subset C$ une sous-catégorie pleine définie par une propriété W -invariante, i.e. l'image inverse d'un sous-ensemble B' de l'ensemble de classes d'équivalence d'objets de $L(C, W)$. Alors $(B, W \cap B)$ admet un calcul de fractions homotopique et $L(B, W \cap B) \rightarrow L(C, W)$ est homotopiquement pleinement fidèle, avec pour image essentielle la sous-catégorie pleine de $L(C, W)$ image inverse du même sous-ensemble de l'ensemble des classes d'équivalence.*

C'est une conséquence directe de la définition de Dwyer-Kan ([32] Definition 6.1). \square

L'application principale de la construction de Dwyer-Kan cf [32] fournit, à partir d'une catégorie de modèles fermée M et de sa sous-catégorie W des équivalences faibles, une catégorie simpliciale $L(M, W)$.

Convention 8.3 *Si M est une catégorie de modèles fermée (ou une sous-catégorie d'objets fibrants, cofibrants etc.) on notera $L(M)$ la localisée de Dwyer-Kan par rapport à la sous-catégorie des équivalences faibles. Cette convention s'étendra à toute catégorie dans laquelle il y a une notion naturelle "d'équivalence". En cas de confusion possible, e.g. quand il s'agit de comparer les équivalences pour la topologie grossière et*

les \mathcal{G} -équivalences, on remettra W dans la notation par exemple $L(nSePCh, W^{\text{gr}^\circ})$ ou $L(nSePCh, W^{\mathcal{G}})$.

Signalons maintenant quelques méthodes de calcul des “complexes de fonctions”, i.e. des ensembles simpliciaux de morphismes dans $L(M)$ où M est une catégorie de modèles fermée. Il y a bien sûr la définition directe de [31] à l’aide d’une résolution de M par des catégories libres simpliciales; nous renvoyons le lecteur à [31] pour plus de détails.

La deuxième méthode est celle des “hamacs”, de Dwyer-Kan [32]. Cette méthode convient pour toute localisation mais avec des hamacs de longueur arbitraire. Comme il est remarqué dans [32], dans le cas d’une catégorie de modèles fermée, on peut se restreindre aux hamacs de longueur 3. Pour $x, y \in M$ on note

$$\text{ham}^3(M; x, y)$$

la catégorie de diagrammes de la forme

$$x \leftarrow a \rightarrow b \leftarrow y$$

où la première et la dernière flèche sont des équivalences faibles i.e. dans W . Les morphismes dans $\text{ham}^3(M; x, y)$ sont les diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} x & \leftarrow & a & \rightarrow & b & \leftarrow & y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \leftarrow & a & \rightarrow & b & \leftarrow & y \end{array}$$

où les flèches verticales aux deux bouts sont les identités de x et de y . Dwyer et Kan donnent dans [32] une équivalence faible d’ensembles simpliciaux naturelle entre le complexe de fonctions entre x et y , et le nerf de la catégorie des hamacs:

$$L(M)_{1/}(x, y) \cong \nu\text{ham}^3(M; x, y).$$

La dernière méthode est celle des “complexes de fonctions homotopiques” (“homotopy function complexes”), de Reedy [86], et de Dwyer, Hirschhorn, Kan [30] [59] [33]. Ceci est une généralisation ou affaiblissement de la méthode de Quillen [83] de considérer une structure simpliciale sur la catégorie de modèles fermée. Dans la méthode des “function complexes”, on n’exige pas autant de functorialité, ce qui donne plus de flexibilité (au prix du fait, comme remarqué dans [30], que la composition des fonctions n’est plus directement accessible—mais ceci ne pose pas de problème car on dispose déjà de la catégorie $L(M)$).

Soit $x, y \in M$. Une *résolution simpliciale fibrante* de y est un objet simplicial de M , $\mathbf{y} \in M^{\Delta^\circ}$ muni d’un morphisme $c^*y \rightarrow \mathbf{y}$ où c^*y est l’objet constant à valeurs y , tel que $y \rightarrow \mathbf{y}(p)$ soit une équivalence faible pour tout $p \in \Delta$, et tel que \mathbf{y} soit fibrant pour la

structure de Reedy de M^{Δ° (voir [86] [59] [30] [46] ainsi que notre discussion plus bas). Dualement, une *résolution cosimpliciale cofibrante* de x est un objet cosimplicial de M , $\mathbf{x} \in M^\Delta$ muni d'un morphisme $\mathbf{x} \rightarrow c^*x$ tel que $\mathbf{x}(p) \rightarrow x$ soit une équivalence faible pour tout $p \in \Delta$, et tel que \mathbf{x} soit cofibrant pour la structure de Reedy sur M^Δ .

Avec ces résolutions, on obtient (voir *loc cit.*) une équivalence naturelle d'ensembles simpliciaux

$$L(M)_{1/}(x, y) \cong d^*M_{1/}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

où le terme de droite est la diagonale de l'ensemble bisimplicial de morphismes entre les deux résolutions. Si x est cofibrant, on a

$$L(M)_{1/}(x, y) \cong M_{1/}(x, \mathbf{y})$$

tandis que si y est fibrant on a

$$L(M)_{1/}(x, y) \cong M_{1/}(\mathbf{x}, y).$$

Ceci est une généralisation directe de la notion de calcul de complexes de fonctions en algèbre homologique (à l'aide résolutions projectives et injectives de complexes). Ce cadre très satisfaisant est (à notre connaissance) dû à Reedy [86], et à Dwyer, Hirschhorn, Kan [30] [59] [33]; et c'est ce à quoi pensait Quillen en intitulant "algèbre homotopique" son livre [83]. Plus loin on retrouve les origines dans la théorie des hyper-recouvrements de Verdier [4].

Si M est une catégorie de modèles fermée simpliciale (c'est le cas principal envisagé par Quillen [83]), on obtient des résolutions à partir de la structure simpliciale, donc la localisée $L(M)$ est équivalente à la catégorie simpliciale M_{cf}^{spl} des objets cofibrants et fibrants.

Dans l'introduction de [33], Dwyer-Kan indiquent sans entrer dans les détails que $L(M)$ "capture toute l'information homotopique supérieure implicite dans M " que Quillen [83] avait recherchée, et partiellement reconstituée dans la catégorie homotopique de M —pour le cas non simplicial. En fait on peut préciser leur affirmation. En effet, le lemme suivant et son corollaire autorisent les constructions de Gabriel-Zisman qu'on a rappelée au §7 plus haut et, dans le cas pointé, celles-ci induisent bien sur $Ho(M) = \tau_{\leq 1}L(M, W)$ la "structure triangulée" définie par Quillen.

Lemme 8.4 *Si M est une catégorie de modèles fermée, alors $L(M)$ admet des produits fibrés homotopiques et des coproduits homotopiques au sens du §7 ci-dessus.*

Preuve: On applique la méthode des résolutions rappelée ci-dessus. Soit

$$x \rightarrow y \leftarrow z$$

un diagramme entre objets fibrants de M , avec les deux flèches fibrantes (tout diagramme pour un produit fibré dans $L(M)$ est équivalent à un diagramme de cette forme). Pour $u \in M$, on choisit une résolution cosimpliciale cofibrante $\mathbf{u} \rightarrow u$. Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} L(M)_{1/}(u, x \times_y z) & \rightarrow & L(M)_{1/}(u, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(M)_{1/}(u, x) & \rightarrow & L(M)_{1/}(u, y) \end{array}$$

est équivalent au carré cartésien d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} M_{1/}(\mathbf{u}, x \times_y z) & \rightarrow & M_{1/}(\mathbf{u}, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{1/}(\mathbf{u}, x) & \rightarrow & M_{1/}(\mathbf{u}, y). \end{array}$$

Les morphismes en bas et à droite sont des fibrations de Kan (on peut le vérifier en utilisant le fait que \mathbf{u} est cofibrant de Reedy et que les morphismes $x \rightarrow y$ et $z \rightarrow y$ sont fibrants). Donc ce carré est aussi homotopiquement cartésien, donc le carré des complexes de fonctions est homotopiquement cartésien. Ceci montre que $x \times_y z$ est un produit fibré homotopique de x et z au-dessus de y .

La démonstration pour les coproduits homotopiques est duale. \square

Corollaire 8.5 *Si M est une catégorie de modèles fermée, la 2-catégorie stricte $\tau_{\leq 2}L(M)$ vérifie les propriétés (A), (B), (C) de Gabriel-Zisman et (dans le cas pointé) leur construction des opérations Ω et Σ s'applique, et donne donc la "structure triangulée" sur $Ho M = \tau_{\leq 1}L(M)$.*

La vérification est laissée aux soins du lecteur. \square

Pour une version plus générale de ce lemme, qui permet de calculer les limites indexées par une petite catégorie, voir la proposition 14.2 ci-dessous (pour les colimites, voir 14.3).

On revient maintenant à des considérations générales sur la localisation. On va définir la localisation pour une n -catégorie de Segal. Soit donc A une n -précat de Segal et $f \in A_{1^i}$ une i -flèche, $1 \leq i \leq n$. On rappelle qu'avec les notations de [95] on a

$$A_{1^i} = Mor_{nSePC}(h(1^i), A) = Mor_{nSePC}(i\Upsilon(*), A)$$

où $h(1^i)$ est la n -précat de Segal représentée par $1^i \in \Theta^{n+1}$ et où $i\Upsilon$ désigne l'opération Υ de [95] itérée i fois. On a l'égalité $\Upsilon(*) = I$, où I est la 1-catégorie ayant deux objets 0, 1 et un morphisme $0 \rightarrow 1$. On peut écrire $i\Upsilon(*) = (i-1)\Upsilon(I)$. Notre i -flèche f correspond donc à un morphisme

$$f : (i-1)\Upsilon(I) \rightarrow A.$$

Soit \bar{T} la 1-catégorie ayant deux objets $0, 1$ et un isomorphisme $0 \cong 1$. On a $I \subset \bar{T}$, et donc une cofibration

$$(i-1)\Upsilon(I) \hookrightarrow (i-1)\Upsilon(\bar{T})$$

qu'on combine avec f pour définir

$$nSeL(A, f) := A \cup^{(i-1)\Upsilon(I)} (i-1)\Upsilon(\bar{T}).$$

C'est une n -précat de Segal (même si A était une n -catégorie de Segal, ce n'est pas en général une n -catégorie de Segal). Il faut appliquer l'opération $SeCat$ (ou un remplacement fibrant) pour obtenir une n -catégorie de Segal $SeCat(nSeL(A, f))$.

Si B est une n -catégorie de Segal fibrante et $u : A \rightarrow B$ un morphisme, alors u s'étend en un morphisme

$$u' : nSeL(A, f) \rightarrow B$$

si et seulement si l'image $u(f)$ est inversible à homotopie près dans B , i.e. si elle est inversible comme i -flèche dans $\tau_{\leq i}(B)$.

On peut préciser un peu plus cette propriété universelle; mais il nous faut faire appel aux notations de la section §11 ci-dessous. Le lecteur est invité à lire le §11 (voir aussi [94] et [95]) avant d'aborder ce qui suit jusqu'à la fin de la démonstration de la prochaine proposition (sigle \odot).

Pour B fibrant, le morphisme

$$\underline{Hom}(nSeL(A, f), B) \rightarrow \underline{Hom}(A, B)$$

est pleinement fidèle avec pour image essentielle la sous- n -catégorie de Segal pleine de $\underline{Hom}(A, B)$ dont les objets sont les u tels que $u(f)$ soit inversible à homotopie près. Ce résultat (pour la preuve voir la proposition ci-dessous) signifie que $SeCat(nSeL(A, f))$ possède la propriété universelle qui en fait une localisation de A .

En particulier on note que si f était déjà inversible à homotopie près dans $SeCat(A)$, alors le morphisme $A \rightarrow nSeL(A, f)$ est une équivalence faible.

On étend maintenant cette construction au cas des sous-ensembles de i -flèches. Soit A une n -précat de Segal et soit $W = \{W^i\}$ un système de sous-ensembles de i -flèches $W^i \subset A_{1^i}$, $1 \leq i \leq n$. On définit alors $nSeL(A, W)$ comme le coproduit de A avec un exemplaire de $(i-1)\Upsilon(\bar{T})$ recollé le long de $(i-1)\Upsilon(I)$, pour chaque $f \in W^i$. Si on veut avoir une n -catégorie de Segal on peut ensuite regarder $SeCat(nSeL(A, W))$. On a la même propriété universelle, qu'on énonce sous la forme suivante.

Proposition 8.6 *Soit A une n -catégorie de Segal et $W = \{W^i\}$ un système de sous-ensembles de i -flèches $W^i \subset A_{1^i}$. Alors $A \rightarrow nSeL(A, W)$ possède la propriété universelle suivante. Si B est une n -catégorie de Segal fibrante alors*

$$\underline{Hom}(nSeL(A, W), B) \rightarrow \underline{Hom}(A, B)$$

est pleinement fidèle avec pour image essentielle la sous-catégorie pleine des $u : A \rightarrow B$ tels que, pour tout f dans l'un des W^i , $u(f)$ soit inversible à homotopie près.

Preuve: Au vu des propriétés du Hom interne cf 11.1 ci-dessous, il suffit de voir cette propriété pour l'inclusion

$$(i-1)\Upsilon(I) \rightarrow (i-1)\Upsilon(\bar{I}).$$

Un morphisme

$$(i-1)\Upsilon(I)$$

est la même chose qu'un morphisme

$$I \rightarrow B_{1^{i-1}/}.$$

Comme $B_{1^{i-1}/}$ est fibrant, un tel morphisme s'étend à \bar{I} si et seulement si la i -flèche en question est inversible à équivalence près. Il reste à prouver que le morphisme

$$\underline{Hom}((i-1)\Upsilon(\bar{I}), B)_{1/}(f, g) \rightarrow \underline{Hom}((i-1)\Upsilon(I), B)_{1/}(f, g)$$

est une équivalence; on va montrer que c'est une fibration triviale en montrant la propriété de relèvement pour toute cofibration triviale $E \rightarrow E'$.

Pour cela il faut montrer que le morphisme

$$(i-1)\Upsilon(I) \times \Upsilon(E) \cup^{(i-1)\Upsilon(I) \times \{0,1\}} (i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \{0,1\} \rightarrow (i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \Upsilon(E)$$

est une cofibration triviale. L'argument est le même que dans la démonstration de ([95] Theorem 2.5.1) et on ne le reproduit pas ici.

Avec ce fait, on obtient que pour toute cofibration $E \rightarrow E'$, la cofibration

$$\begin{aligned} (i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \Upsilon(E) \cup^{(i-1)\Upsilon(I) \times \Upsilon(E)} (i-1)\Upsilon(I) \times \Upsilon(E') \\ \rightarrow (i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \Upsilon(E') \end{aligned}$$

est triviale, ce qui donne la propriété de relèvement voulue (en notant qu'un morphisme

$$E \rightarrow \underline{Hom}((i-1)\Upsilon(\bar{I}), B)_{1/}(f, g)$$

s'identifie à un morphisme

$$(i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \Upsilon(E) \rightarrow B$$

se restreignant en f, g sur $(i-1)\Upsilon(\bar{I}) \times \{0,1\}$ et de même pour les autres morphismes du carré dans le diagramme de relèvement). \square

⊗

Revenons maintenant au cas des 1-catégories de Segal. On a défini une localisation $1SeL(A, W)$ par tout sous-ensemble de 1-flèches $W \subset A_1$. Dans ce cas on n'a pas besoin de la notation Υ puisqu'on attache simplement des exemplaires de \bar{I} le long des morphismes $I \rightarrow A$ correspondant aux flèches de W . Cette construction est compatible avec celle de Dwyer-Kan au sens suivant.

Proposition 8.7 *Soit C une catégorie et $W \subset C$ une sous-catégorie. Alors il y a une équivalence de 1-catégories de Segal (compatible avec l'identité de C)*

$$L(C, W) \xrightarrow{\cong} 1SeL(C, W)'$$

où $1SeL(C, W)'$ est un remplacement fibrant de $1SeL(C, W)$.

Preuve: Rappelons ([31]) qu'une *catégorie libre* est une catégorie librement engendrée par un ensemble de flèches qu'on appellera les *générateurs*. Si on fixe un ensemble O d'objets, on a la notion de *produit libre* d'une collection de O -catégories (i.e. de catégories dont O est l'ensemble d'objets). Si on fixe un ensemble de générateurs $\{f_\alpha\}$ avec f_α une flèche de $x_\alpha \in O$ vers $y_\alpha \in O$, notons par $\langle f_\alpha \rangle$ la O -catégorie libre engendrée par f_α . La O -catégorie libre engendrée par $\{f_\alpha\}$ est alors le produit libre des O -catégories $\langle f_\alpha \rangle$.

On va prouver d'abord le résultat suivant: soit C une catégorie libre (avec ensemble O d'objets) et soient $x, y \in O$. On va rajouter une flèche f de source x et but y . Soit

$$C' := C * \langle f \rangle$$

la O -catégorie libre engendrée par les générateurs de C plus f . D'autre part la flèche f de C' correspond à un morphisme $I \rightarrow C'$. On va prouver que le morphisme de 1-précats de Segal

$$C \cup^{\{x,y\}} I \rightarrow C'$$

est une équivalence faible.

Pour prouver ce résultat, on montre que C' s'obtient à partir de $C \cup^{\{x,y\}} I$ par une suite de cofibrations triviales explicites. Pour tout ℓ , soit $F_\ell C'$ le sous-ensemble simplicial de C' déterminé par les simplexes comportant au total, dans toutes leurs arêtes principales, au plus ℓ des générateurs de C' (i.e. des générateurs de C plus f). Ici on compte, sur une même arête (qui correspond à une flèche de C'), le nombre des générateurs (avec leur multiplicité) qui entre en jeu dans la flèche en question. Soit $F_\ell C$ l'intersection de $F_\ell C'$ avec C , c'est-à-dire le sous-ensemble simplicial de C des simplexes comportant au plus ℓ générateurs de C au sens ci-dessus. On a l'égalité

$$F_1 C' = F_1 C \cup^{\{x,y\}} I.$$

On va montrer que, pour $\ell \geq 2$, $F_\ell C'$ est obtenu à partir de $F_{\ell-1} C' \cup^{F_{\ell-1} C} F_\ell C$ par coproduit avec une collection de cofibrations triviales. Pour cela, on appellera ℓ -simplexe élémentaire tout élément $u \in C'_\ell$ dont les arêtes principales sont des générateurs de C' . Rappelons aussi (cf. [94]) que $h(\ell)$ désigne l'ensemble simplicial représenté par ℓ (considéré comme 1-précat de Segal constant en la deuxième variable simpliciale). Le morphisme

$$i : h(\ell - 1) \cup^{h(\ell-2)} h(\ell - 1) \rightarrow h(\ell)$$

correspondant à l'inclusion de la première et de la dernière face, est une cofibration triviale de 1-précats de Segal. ¹⁵ Si u est un ℓ -simplexe élémentaire vu comme morphisme de $h(\ell)$ vers C' , on a soit $u : h(\ell) \rightarrow C$, soit

$$u^{-1}(F_{\ell-1} C' \cup^{F_{\ell-1} C} C) = i \left(h(\ell - 1) \cup^{h(\ell-2)} h(\ell - 1) \right).$$

Dans le premier cas on n'a pas besoin d'ajouter u ; dans le deuxième cas on peut ajouter à $F_{\ell-1} C' \cup^{F_{\ell-1} C} F_\ell C$ un exemplaire de $h(\ell)$ recollé le long de $h(\ell - 1) \cup^{h(\ell-2)} h(\ell - 1)$, correspondant à u . Appelons provisoirement B le résultat de tous ces coproduits, un pour chaque ℓ -simplexe élémentaire non contenu dans C . Il y a un morphisme évident $B \rightarrow C'$ et il est facile de voir que ce morphisme est injectif, car un élément (i.e. k -simplexe) introduit par la cofibration associée à u connaît tous les générateurs apparaissant dans u , en particulier il ne peut provenir d'une cofibration associée à un $u' \neq u$. D'autre part l'image de ce morphisme est visiblement $F_\ell C'$. Donc $B = F_\ell C'$ et on a prouvé que

$$F_{\ell-1} C' \cup^{F_{\ell-1} C} F_\ell C \rightarrow F_\ell C'$$

est une cofibration triviale. L'argument montre aussi que

$$F_{\ell-1} C' \cup^{F_{\ell-1} C} C \rightarrow F_\ell C' \cup^{F_\ell C} C$$

est une cofibration triviale. La composition de ces cofibrations triviales donne la cofibration triviale

$$F_1 C' \cup^{F_1 C} C \rightarrow C',$$

c'est-à-dire le résultat cherché.

Maintenant on continue la démonstration de la proposition. Notons $A * B$ le produit libre de deux O -catégories, et $A \cup^O B$ le coproduit en tant que O -précats de Segal (i.e.

¹⁵Il est facile de voir par récurrence que le morphisme

$$h(m - 1) \cup^* h(1) \rightarrow h(m)$$

est une cofibration triviale, et on voit que i est une cofibration triviale en combinant ce résultat pour $m = \ell$ et $m = \ell - 1$ avec la propriété "trois pour le prix de deux".

1-précats de Segal ayant O comme ensemble d'objets). Le résultat ci-dessus implique, par récurrence (plus éventuellement passage à une colimite filtrante qui ne pose pas de problème), que si C est la catégorie libre engendrée par $\{f_\alpha\}$ alors

$$\coprod_{\alpha}^O \langle f_\alpha \rangle \rightarrow C$$

est une équivalence faible de 1-précats de Segal. Il s'ensuit que si A et B sont des O -catégories libres, alors le morphisme

$$A \cup^O B \rightarrow A * B$$

est une équivalence faible de 1-précats de Segal.

Si A est une O -catégorie simpliciale on peut la considérer comme 1-catégorie de Segal (en utilisant la variable simpliciale comme deuxième variable simpliciale pour la catégorie de Segal). Le résultat ci-dessus implique directement que si A et B sont des O -catégories simpliciales, libres à chaque étage, alors le morphisme

$$A \cup^O B \rightarrow A * B$$

est une équivalence faible. Maintenant, le coproduit (dans une cmf) d'objets cofibrants (et pour 2.3 tout objet est cofibrant) préserve le type d'équivalence. Dwyer-Kan montrent que le produit libre des O -catégories simpliciales quelconques préserve l'équivalence ([31] Proposition 2.7). En utilisant des résolutions simpliciales libres ([31]) on obtient que pour toute paire de catégories simpliciales A, B ayant l'ensemble O pour objets, le morphisme

$$A \cup^O B \rightarrow A * B$$

est une équivalence faible de 1-précats de Segal.

Revenons maintenant à la définition de la localisation de Dwyer-Kan [31]. Si C est une catégorie et W une sous-catégorie, Dwyer-Kan choisissent une résolution libre de C de la forme $A * B$ avec A et B des catégories simpliciales libres à chaque niveau (et partageant le même ensemble d'objets O), et de sorte que B soit une résolution de W . Notons \overline{B} la catégorie simpliciale obtenue en inversant les flèches de chaque niveau de B . Par définition on a

$$L(C, W) := A * \overline{B}$$

tandis que

$$1SeL(A * B, B) = (A * B) \cup^B 1SeL(B, B).$$

Observons en outre que $1SeL(B, B) \rightarrow \overline{B}$ est une équivalence faible (pour cela on peut supposer que B est une catégorie libre, auquel cas \overline{B} est son complété 0-groupique et $1SeL(B, B)$ aussi).

On a une suite de flèches

$$A \cup^O \overline{B} = (A \cup^O B) \cup^B \overline{B} \rightarrow (A * B) \cup^B \overline{B} \rightarrow A * \overline{B},$$

et d'après les remarques ci-dessus, la première flèche et la composée sont des équivalences faibles de 1-précats de Segal. D'après "trois pour le prix de deux" on obtient que la flèche

$$1SeL(A * B, B) = (A * B) \cup^B \overline{B} \rightarrow A * \overline{B} = L(C, W)$$

est une équivalence. D'autre part la localisation $1SeL$ préserve les équivalences donc la flèche

$$1SeL(A * B, B) \rightarrow 1SeL(C, W)$$

est une équivalence faible donc, en choisissant un remplacement fibrant $1SeL(L, W)'$ on obtient une équivalence (essentiellement bien définie) de 1-catégories de Segal

$$L(C, W) \xrightarrow{\cong} 1SeL(C, W)'.$$

Ceci termine la démonstration. □

Corollaire 8.8 *Soit C une catégorie simpliciale et $W \subset C$ une sous-catégorie simpliciale. On peut supposer que W est saturée au sens que $W(x, y)$ est une réunion de composantes connexes de $C(x, y)$ (cf [31]). L'ensemble $W_{1,0}$ des sommets de l'ensemble simplicial des flèches de W est un sous-ensemble de 1-flèches de la 1-catégorie de Segal correspondante à C . On a alors une équivalence de 1-catégories de Segal (compatible avec les injections de C)*

$$L(C, W) \xrightarrow{\cong} 1SeL(C, W_{1,0})'.$$

Preuve: On suppose C libre comme dans [31], et on applique la proposition à chaque niveau. On peut noter que d'après [31], $L(C, W)$ est équivalent à $L(C, W_{1,0})$. □

Corollaire 8.9 *Soit C une catégorie simpliciale et $W \subset C$ une sous-catégorie simpliciale. Si B est une 1-catégorie de Segal fibrante, alors le morphisme de 1-catégories de Segal*

$$\underline{Hom}(L(C, W), B) \rightarrow \underline{Hom}(C, B)$$

est pleinement fidèle avec pour image essentielle la sous-catégorie des morphismes $C \rightarrow B$ qui envoient les éléments de W sur des morphismes inversibles (à équivalence près) dans B .

Preuve: Il suffit d'appliquer la proposition 8.6 et 8.8 (ou juste 8.7 s'il s'agit d'une 1-catégorie C non simpliciale). \square

Ce corollaire devrait avoir une variante formulée en termes de catégories simpliciales avec les catégories simpliciales $Coh(\cdot, \cdot)$ de morphismes de Cordier et Porter, voir les problèmes 7.1–7.2 ci-dessus.

Remarque: En toute rigueur, il n'existe pas forcément de morphisme $C \rightarrow L(C, W)$. En revanche, si $\widehat{C} \rightarrow C$ est la résolution simpliciale standard de C (qui est une équivalence de catégories simpliciales) on a par construction [31] un morphisme $\widehat{C} \rightarrow L(C, W)$. Nous allons, dans le reste du papier, négliger ce point technique (on l'a déjà ignoré dans l'énoncé du corollaire précédent) et *prétendre* qu'on a un morphisme $C \rightarrow L(C, W)$. Cette difficulté ne concerne pas $1SeL(C, W)$ qui reçoit par construction un morphisme de source C .

Le corollaire suivant est l'analogue pour les catégories de Segal ayant plusieurs objets, d'un fait bien connu pour les monoïdes topologiques: tout monoïde faible (i.e. objet de la catégorie sous-jacente à une machine de délaçage; par exemple une catégorie de Segal avec un seul objet, pour la machine de Segal) est équivalent à un monoïde topologique strict. Voir le travail de Fiedorowicz [40], ou la proposition 1.12 de Dunn [28].

Corollaire 8.10 *Si A est une 1-catégorie de Segal fibrante alors il existe une catégorie simpliciale C et une équivalence $C \rightarrow A$.*

Esquisse de démonstration: En considérant A comme un préfaisceau simplicial sur la catégorie Δ , on peut appliquer la “subdivision barycentrique” au-dessus de chaque objet de Δ (voir le lemme 16.1 ci-dessous) pour obtenir un préfaisceau de catégories sur Δ . Ensuite on applique l'opération d'intégration de Grothendieck (cf §16 ci-dessous), en utilisant un analogue du lemme 16.1 pour les préfaisceaux de catégories au-dessus de Δ au lieu des ensembles simpliciaux. Ceci est l'analogue pour les catégories de Segal, de la platification (“flattening”) utilisée dans Dwyer-Kan ([34] “A delocalization theorem” 2.5). On obtient ainsi une 1-catégorie $\beta(A)$ munie d'un sous-ensemble $\delta(A)$ de 1-flèches: on y inclut toutes les flèches “verticales” i.e. des catégories-fibres, ainsi que les flèches “horizontales” qui entrent dans le $\delta(A)$ du 16.1. Comme dans 16.1, on a

$$A \cong 1SeL(\beta(A), \delta(A))'$$

(équivalence dans la catégorie homotopique de $1SeCat$). Alors, d'après la proposition précédente, on a aussi $A \cong L(\beta(A), \delta(A))$. Et comme A est fibrante, cette équivalence peut être réalisée comme une équivalence $L(\beta(A), \delta(A)) \rightarrow A$. \square

Cette démonstration montre aussi qu'il existe un ensemble simplicial X vérifiant

$$SeCat(X) \cong A.$$

En effet, $\beta(A)$ est une 1-catégorie qui correspond à un ensemble simplicial (son nerf); et la localisation $1SeL(\beta(A), W)$ s'obtient en recollant des exemplaires de \bar{I} le long des morphismes $I \rightarrow \beta(A)$ de W . Le coproduit reste dans les ensembles simpliciaux (en effet, le résultat reste constant dans la deuxième variable simpliciale des 1-précats de Segal). On a donc bien un ensemble simplicial

$$X := 1SeL(\beta(A), W)$$

vérifiant $A \cong SeCat(X)$.

Adjoints homotopiques

La propriété d'adjonction se transmet aux localisés de Dwyer-Kan et devient une propriété d'adjonction homotopique. Soient A et B deux n -catégories de Segal (qu'on peut supposer fibrantes), et

$$F : A \rightarrow B, \quad G : B \rightarrow A$$

deux morphismes. Soit aussi

$$u \in \underline{Hom}(A, A)_{1/}(1_A, GF)$$

une transformation naturelle. Alors pour tout $x \in A_0$ et tout $y \in B_0$, u induit un morphisme (essentiellement bien défini)

$$B_{1/}(Fx, y) \rightarrow A_{1/}(x, Gy).$$

On dira que F et G sont *homotopiquement adjoints via u* si ce morphisme est une équivalence de $n-1$ -catégories de Segal pour tout x et tout y . On dira que F est *l'adjoint à gauche* et G *l'adjoint à droite*. On pourrait aussi construire la définition à partir d'une transformation naturelle

$$v \in \underline{Hom}(B, B)_{1/}(FG, 1_B).$$

Et pour bien faire, il faudrait vérifier que les deux définitions coïncident, que l'adjoint (G, u) d'un morphisme F est essentiellement unique s'il existe, etc.

De même on pourrait envisager de définir la notion de paire adjointe de 1-flèches dans une n -catégorie de Segal quelconque (et récupérer la notion ci-dessus avec la $n+1$ -catégorie $nSeCAT$). Ceci pourrait correspondre à ce que Baez-Dolan appellent une "duale" dans une n -catégorie [8].

Lemme 8.11 *Soit $F : M \rightarrow N$ un foncteur de Quillen à gauche entre catégories de modèles fermées, et soit G son adjoint à droite. Alors*

$$L(F) : L(M) \leftrightarrow L(N) : L(G)$$

sont homotopiquement adjoints.

Preuve: D’abord on doit noter que le calcul des $L(M)_{1/}(x, y)$ par résolutions est compatible avec la composition dans la mesure du possible: si par exemple $y \rightarrow \mathbf{y}$ est une résolution simpliciale fibrante, et si $x \rightarrow x'$ est un morphisme entre objets cofibrants, alors le morphisme induit

$$M_{1/}(x', \mathbf{y}) \rightarrow M_{1/}(x, \mathbf{y})$$

coïncide avec le morphisme de composition

$$L(M)_{1/}(x', y) \rightarrow L(M)_{1/}(x, y)$$

via l’équivalence de [32] qui a été rappelée plus haut.

On applique ceci au morphisme d’adjonction $x \rightarrow GFx$. On obtient que si x est cofibrant et si $y \rightarrow \mathbf{y}$ est une résolution simpliciale fibrante, alors le morphisme

$$L(N)_{1/}(Fx, y) \rightarrow L(M)_{1/}(x, Gy)$$

induit par le morphisme d’adjonction, coïncide (à équivalence près) avec le morphisme

$$N_{1/}(Fx, \mathbf{y}) \rightarrow M_{1/}(x, G\mathbf{y})$$

(ici le fait que F et G sont des foncteurs de Quillen (à gauche et à droite) implique que Fx est cofibrant, et que $Gy \rightarrow G\mathbf{y}$ est une résolution simpliciale fibrante). Or ce dernier morphisme est un isomorphisme, donc le morphisme d’adjonction sur les localisés est une équivalence. \square

Pour une autre propriété d’une catégorie de modèle fermée M qui peut être “amplifiée” en propriété de $L(M)$ voir la proposition 11.2 sur les Hom internes homotopiques. On termine en posant le problème analogue pour les “foncteurs dérivés”.

Problème 8.12 *Définir la notion de foncteur dérivé homotopique dans le cadre des catégories simpliciales ou 1-catégories de Segal (ou éventuellement les n -catégories de Segal). Prouver que si M et N sont des catégories de modèles fermées et si $F : M \rightarrow N$ est un foncteur de Quillen (à gauche, disons), alors le foncteur composé*

$$L(M) \cong L(M_c) \rightarrow L(N_c) \cong L(N)$$

est le foncteur dérivé homotopique de $M \rightarrow L(N)$ le long de $M \rightarrow L(M)$. Donner un énoncé d’unicité essentielle pour le foncteur dérivé homotopique, s’il existe.

La solution de ce problème permettrait de voir que le 1-préchamp de Segal $L(\mathbf{M})$ associé à un préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{M} (voir §17) est essentiellement bien défini indépendamment du choix des sous-catégories de cofibrations dans les $\mathbf{M}(y)$.

9. Première définition de champ

On considère à nouveau la structure de catégorie de modèles fermée du théorème 3.1, relatif à un site \mathcal{X} avec topologie de Grothendieck \mathcal{G} .

Soit A un n -préchamp de Segal. Soit $A \rightarrow A'$ une cofibration triviale vers un n -préchamp de Segal \mathcal{G} -fibrant. On dira que A est un n -champ de Segal (ou bien un ∞ -champ ou même juste un *champ*) si:

- $A(X)$ est une n -catégorie de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$; et
- le morphisme $A(X) \rightarrow A'(X)$ est une équivalence de n -catégories de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$.

On voit facilement (voir l'argument du corollaire 9.4 ci-dessous) que cette condition est indépendante du choix de $A \rightarrow A'$.

Pour $n = 0$ les préfaisceaux simpliciaux qui sont des 0-champs de Segal sont précisément ceux qui vérifient la condition de *descente cohomologique* de Thomason (voir [107]), ou encore ceux qui sont *flasques par rapport à tout objet X du site \mathcal{X}* au sens de Jardine [63] (ce sont aussi les *faisceaux homotopiques* de [92] ou les *faisceaux flexibles* de [91]). La terminologie “descente cohomologique” de Thomason est inspirée de la descente cohomologique de Deligne-Saint Donat [4] et [26].

Il est intéressant de constater que les lemmes suivants, analogues des résultats classiques sur les faisceaux, sont des conséquences entièrement formelles de la théorie de Quillen [83] (d'ailleurs on peut dérouler la théorie des faisceaux d'ensembles sur un site, comme application essentiellement facile de ces arguments standards en théorie des cmf, voir le travail de Rezk [87]).

Lemme 9.1 *Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de n -champs de Segal qui est une \mathcal{G} -équivalence faible alors f est aussi une équivalence faible objet-par-objet (i.e. pour la topologie grossière).*

Preuve: Par définition des n -champs de Segal on peut supposer que A et B sont \mathcal{G} -fibrants. On peut factoriser le morphisme donné en

$$A \rightarrow B' \rightarrow B$$

où le premier morphisme est une cofibration \mathcal{G} -triviale et le deuxième morphisme est une fibration \mathcal{G} -triviale. Une fibration \mathcal{G} -triviale possède la propriété de relèvement vis-à-vis de toutes les cofibrations; en particulier elle est aussi triviale pour la topologie grossière. D'autre part, comme A est \mathcal{G} -fibrant, il existe une rétraction $B' \rightarrow A$ (induisant l'identité sur A). En particulier le morphisme $A \rightarrow B'$ admet un inverse à gauche. On a ainsi montré que tout morphisme $f : A \rightarrow B$ entre n -champs de Segal (pour \mathcal{G}) admet un inverse g à gauche, dans la catégorie homotopique des n -préchamps de Segal pour l'équivalence de

la topologie grossière. Ceci s'applique en particulier à cet inverse $g : B \rightarrow A$ (c'est ici qu'on voit pourquoi on a supposé que B est un champ). On obtient ainsi un inverse à gauche h de g ; or f est inverse à droite de g donc g est inversible, ce qui implique que f est inversible. Ceci permet de conclure puisque, d'après Quillen [83] les seuls morphismes dont la classe soit inversible dans la catégorie homotopique sont les équivalences (ici, pour la topologie grossière). \square

Lemme 9.2 *Si A est un n -préchamp de Segal alors A est \mathcal{G} -fibrant si et seulement si A est un champ, et fibrant pour la topologie grossière.*

Preuve: Si A est \mathcal{G} -fibrant alors A est fibrant pour la topologie grossière, et par définition c'est un champ.

Supposons donc que A est fibrant pour la topologie grossière et que c'est un champ. Soit $A \hookrightarrow A'$ un remplacement \mathcal{G} -fibrant. Par définition c'est une équivalence faible pour la topologie grossière. Comme A est fibrant pour la topologie grossière, il existe une rétraction $r : A' \rightarrow A$. Montrons alors que A possède la propriété de relèvement vis-à-vis de toute cofibration \mathcal{G} -triviale $X \rightarrow Y$. Comme A est \mathcal{G} -fibrant, tout morphisme $X \rightarrow A$ s'étend en un morphisme $Y \rightarrow A'$. En composant avec la rétraction r on obtient l'extension $Y \rightarrow A$ désirée. \square

Remarque: On a un résultat similaire (et même plus joli) pour la structure de HBKQ (Théorème 5.1): si A est un n -préchamp de Segal alors A est \mathcal{G} -fibrant de HBKQ, si et seulement si les $A(X)$ sont fibrants pour tout X , et A est un champ. En particulier, on obtient la même notion de "champ" en utilisant 5.1 au lieu de 3.1.

Lemme 9.3 *Si $f : A \rightarrow B$ est une \mathcal{G} -fibration et si B est un n -champ de Segal, alors A est un n -champ de Segal.*

Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme entre n -champs de Segal et si f est fibrant pour la topologie grossière alors f est \mathcal{G} -fibrant.

Preuve: Pour la première partie, on commence par le cas ponctuel, pour lequel on va seulement donner une esquisse de démonstration: si $f : A \rightarrow B$ est une fibration de n -précats de Segal, et si B est une n -catégorie de Segal, alors A est une n -catégorie de Segal. On remarque d'abord que les morphismes $A_{p/}(x_0, \dots, x_p) \rightarrow B_{p/}(fx_0, \dots, fx_p)$ sont des fibrations de $n - 1$ -précats de Segal, donc par récurrence sur n on peut supposer que les $A_{p/}$ sont des $n - 1$ -catégories de Segal. Maintenant on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{p/} & \rightarrow & A_{1/} \times_{A_0} \dots, \times_{A_0} A_{1/} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{p/} & \rightarrow & B_{1/} \times_{B_0} \dots, \times_{B_0} B_{1/}. \end{array}$$

Soit $E \rightarrow A_{1/} \times_{A_0} \dots, \times_{A_0} A_{1/}$ un morphisme de $n - 1$ -précats de Segal, ce qui correspond à un morphisme $U^p(E) \rightarrow A$ (où $U^p(\)$ est le foncteur adjoint à gauche de $A \mapsto A_{1/} \times_{A_0} \dots, \times_{A_0} A_{1/}$, qui associe donc à toute $n - 1$ -précat de Segal une n -précat de Segal). On a une inclusion $U^p(E) \rightarrow [p]E$ où $[p]$ est adjoint à gauche de $A \mapsto A_{p/}$. Cette inclusion est une cofibration triviale de n -précats de Segal. Maintenant, le fait que B soit une n -catégorie de Segal implique qu'il existe un prolongement de $U^p(E) \rightarrow B$ en un morphisme $([p]E)' \rightarrow B$ où $([p]E)'$ est équivalent à $[p]E$ objet-par-objet au-dessus de Δ . Le fait que $A \rightarrow B$ soit fibrant (combiné au fait que $U^p(E) \rightarrow ([p]E)'$ soit une cofibration triviale) implique qu'il existe également une extension $([p]E)' \rightarrow A$. Ceci implique que le morphisme $E \rightarrow A_{1/} \times_{A_0} \dots, \times_{A_0} A_{1/}$ se relève à homotopie près en un morphisme $E \rightarrow A_{p/}$. On pourrait donner aussi une version relative de cette discussion: étant donné $F \rightarrow A_{p/}$, $F \hookrightarrow E$ et $E \rightarrow A_{1/} \times_{A_0} \dots, \times_{A_0} A_{1/}$, il existe à homotopie près une extension en $E \rightarrow A_{p/}$. On obtient que l'application de Segal est une équivalence, donc A est une n -catégorie de Segal.

On traite maintenant la première partie pour $f : A \rightarrow B$ au-dessus de \mathcal{X} . Soit $B \hookrightarrow B'$ un remplacement \mathcal{G} -fibrant (qui est une équivalence objet-par-objet), et soit

$$A \hookrightarrow A' \rightarrow B'$$

une factorisation où la deuxième flèche est une fibration pour la topologie grossière et la première est une équivalence objet-par-objet. On va montrer que la deuxième flèche est une \mathcal{G} -fibration. Soit $E \rightarrow E'$ une cofibration \mathcal{G} -triviale avec un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \rightarrow & B'. \end{array}$$

On peut supposer que $E \rightarrow A'$ et $E' \rightarrow B'$ sont des fibrations pour la topologie grossière. Avec cette réduction, on a par propriété cf 3.8 que $E \times_{A'} A \rightarrow E$ et $E' \times_{B'} B \rightarrow E'$ sont des équivalences objet-par-objet (on utilise le fait que les valeurs $B(X)$ et $B'(X)$ sont des n -catégories de Segal; de même pour $A(X)$, et $A'(X)$, pour cela on utilise la version ponctuelle mentionnée au début). D'autre part, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \times_{A'} A & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' \times_{B'} B & \rightarrow & B, \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est une cofibration \mathcal{G} -triviale. Comme par hypothèse la flèche de droite est une \mathcal{G} -fibration, on obtient un relèvement $E' \times_{B'} B \rightarrow A$. Maintenant

$$(E' \times_{B'} B) \cup^{E \times_{A'} A} E \rightarrow E'$$

est une équivalence pour la topologie grossière. On la factorise en

$$(E' \times_{B'} B) \cup^{E \times_{A'} A} E \rightarrow E'' \rightarrow E'$$

où la première flèche est une cofibration triviale pour la topologie grossière et la deuxième est une fibration triviale pour la topologie grossière. On a un morphisme provenant de notre relèvement

$$(E' \times_{B'} B) \cup^{E \times_{A'} A} E \rightarrow A'.$$

Comme $A' \rightarrow B'$ est une fibration pour la topologie grossière, il existe une extension $E'' \rightarrow A'$. Maintenant, comme $E'' \rightarrow E'$ est une fibration triviale pour la topologie grossière, il existe une section $E' \rightarrow E''$ qui coïncide sur E avec le morphisme donné $E \rightarrow E''$. On obtient donc par composition, un morphisme $E' \rightarrow A'$ qui fournit le relèvement cherché.

Pour la deuxième partie du lemme, on a un morphisme entre n -champs de Segal $f : A \rightarrow B$ qui est fibrant pour la topologie grossière. On le factorise en

$$A \xrightarrow{g} A' \xrightarrow{h} B$$

avec g une \mathcal{G} -équivalence et h une \mathcal{G} -fibration. D'après la première partie, A' est un champ. Par le lemme précédent, g est une équivalence pour la topologie grossière. Si $E \rightarrow E'$ est une cofibration \mathcal{G} -triviale avec un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \rightarrow & B \end{array}$$

alors il existe un relèvement intermédiaire $E' \rightarrow A'$. Comme plus haut, on peut supposer que le morphisme $E' \rightarrow A'$ est une fibration pour la topologie grossière. Dans ce cas $E' \times_{A'} A \rightarrow E'$ est une équivalence objet-par-objet (ici on utilise encore le fait que les $A(X)$ sont des n -catégories de Segal, cf. le début de la démonstration), donc c'est une cofibration triviale pour la topologie grossière. On a l'inclusion $E \subset E' \times_{A'} A$. On applique alors la propriété de relèvement de f (qui est une fibration pour la topologie grossière) au diagramme

$$\begin{array}{ccc} E' \times_{A'} A & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \rightarrow & B, \end{array}$$

pour obtenir un relèvement $E' \rightarrow A$ qui répond à la question. \square

Le champ associé

Si A est un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} on appellera *champ associé* à A toute équivalence faible $A \rightarrow A'$ où A' est un n -champ de Segal. On note qu'un champ associé existe toujours, il suffit de prendre pour A' un remplacement fibrant de A .

Corollaire 9.4 *Soit A un n -préchamp et soient $A \rightarrow A'$ et $A \rightarrow A''$ deux champs associés à A . Supposons que A'' est fibrant pour la topologie grossière. Alors il existe une équivalence (pour la topologie grossière) $A' \rightarrow A''$ rendant commutatif le triangle à homotopie près. Si de plus $A \rightarrow A'$ est une cofibration, on peut supposer le triangle strictement commutatif.*

Preuve: Si $A \rightarrow A'$ est une cofibration, alors c'est une cofibration triviale et le fait que A'' soit fibrant implique l'existence de l'extension cherchée $A' \rightarrow A''$. Si $A \rightarrow A'$ n'est pas une cofibration, on factorise

$$A \rightarrow B \rightarrow A'$$

avec à gauche une cofibration triviale et à droite une fibration triviale. Il existe donc une section $A' \rightarrow B$ ainsi qu'une extension du morphisme $A \rightarrow A''$ en $B \rightarrow A''$. Ceci donne un morphisme $A' \rightarrow A''$ et on vérifie (en suivant les définitions de [83]) que ce morphisme rend le triangle commutatif à homotopie près. \square

Amélioration: Avec le Hom interne des n -préchamps de Segal fibrants qui sera défini au §11 ci-dessous, on pourra formuler un meilleur énoncé d'unicité du "champ associé" via la propriété universelle suivante. Si $A \rightarrow A'$ est un champ associé au préchamp A alors pour tout n -préchamp de Segal B fibrant pour la topologie grossière et qui est un champ, le morphisme induit

$$\underline{Hom}(A', B) \rightarrow \underline{Hom}(A, B)$$

est une équivalence de n -champs de Segal (fibrants). Voir §13.

Produits fibrés

Soient A, B, C des n -précats de Segal. Si $B \rightarrow A$ et $C \rightarrow A$ sont des morphismes, on dispose d'un *produit fibré homotopique* $B \times_A^h C$, essentiellement bien défini: on peut le définir comme $B' \times_{A'} C'$ où

$$\begin{array}{ccccc} B & \rightarrow & A & \leftarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \rightarrow & A' & \leftarrow & C' \end{array}$$

est un diagramme dans lequel A', B' et C' sont des n -catégories de Segal avec $B' \rightarrow A'$ fibrant, et où les flèches verticales sont des équivalences faibles. Il est montré dans [95]

Lemma 6.1.2, que ce produit est une limite dans la $n+1$ -catégorie de Segal $nSeCAT$ ([95] traite le cas des n -catégories mais le cas des n -catégories de Segal est identique).

Le remplacement de A, B, C par A', B', C' peut être choisi fonctoriellement. D'où, si $B \rightarrow A \leftarrow C$ est un diagramme de n -préchamps de Segal sur une catégorie \mathcal{X} , on peut considérer leur *produit fibré homotopique objet-par-objet* $B \times_A^h C$. C'est un n -préchamp essentiellement bien défini sur \mathcal{X} et (avec les notations de structure interne qu'on introduira au §11 ci-dessous) c'est la limite dans $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{gro})$ du diagramme donné.

Le lemme suivant est l'analogie de l'énoncé de théorie des faisceaux selon lequel le noyau d'un morphisme de faisceaux de groupes (ou le noyau d'une double flèche s'il s'agit de faisceaux d'ensembles) est encore un faisceau.

Lemme 9.5 *Soit \mathcal{X}, \mathcal{G} un site et $B \rightarrow A \leftarrow C$ un diagramme de n -champs de Segal sur \mathcal{X} . Alors le produit fibré homotopique objet-par-objet $B \times_A^h C$ est un n -champ de Segal (et c'est aussi la limite du diagramme dans $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$, voir la notation au §11).*

Preuve: On peut choisir un remplacement du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \rightarrow & A & \leftarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \rightarrow & A' & \leftarrow & C' \end{array}$$

avec A', B', C' \mathcal{G} -fibrants, et où les flèches verticales sont des équivalences faibles pour \mathcal{G} , et $B' \rightarrow A'$ est une \mathcal{G} -fibration. D'après le lemme 9.1 les flèches verticales sont des équivalences faibles objet-par-objet, et on a donc un remplacement adéquat pour la construction du produit fibré homotopique

$$B \times_A^h C = B' \times_{A'} C'$$

qui est \mathcal{G} -fibrant, en particulier c'est un n -champ de Segal. Toute autre construction de $B \times_A^h C$ donnera un n -préchamp équivalent objet-par-objet au précédent; et par définition, ce sera toujours un n -champ de Segal. \square

Le corollaire suivant répond à la question originellement posé par C. Rezk dans [87] (où il donne la démonstration pour les 0-préchamps): le passage au "champ associé" est compatible avec les produits fibrés homotopiques.

Corollaire 9.6 *Soit $B \rightarrow A \leftarrow C$ un diagramme de n -préchamps de Segal. On suppose que les valeurs $A(X), B(X)$ et $C(X)$ sont des n -catégories de Segal. Soit $B' \rightarrow A' \leftarrow C'$ le diagramme obtenu en passant aux \mathcal{G} -champs associés. Alors*

$$B \times_A^h C \rightarrow B' \times_{A'}^h C'$$

est un \mathcal{G} -champ associé; ici les produits fibrés homotopiques des deux côtés sont pris objet-par-objet au-dessus de \mathcal{X} .

Preuve: La flèche en question est une \mathcal{G} -équivalence faible d'après le corollaire 3.9; et d'après le lemme précédent, le but est un \mathcal{G} -champ. Il s'ensuit par définition que la flèche est un "champ associée". \square

10. Critères pour qu'un préchamp soit un champ

On commence par introduire plusieurs notions équivalentes *d'effectivité des données de descente*. Par la suite, nous utiliserons seulement la version (ii) ci-dessous; les autres sont là pour éclairer la définition—le lecteur peut donc sauter la démonstration.

L'intérêt des conditions (vii) et (viii) ci-dessous est leur caractère élémentaire: en effet, elles ne font référence ni à la structure de modèles 3.1, ni à l'opération *SeCat*. Cependant, sans la structure de cmf ces conditions seraient quasiment inutilisables. On les a incluses pour faciliter éventuellement une exposition sans démonstrations de la notion de champ.

Lemme-Définition 10.1 *Soit A un n -préchamp de Segal sur un site \mathcal{X} . Soit $X \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible couvrant X . On dira que les données de descente pour A sur \mathcal{B} sont effectives si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite.*

(i) *Tout morphisme de $*_{\mathcal{B}}$ dans $A|_{\mathcal{B}}$ dans la catégorie homotopique $Ho(nSePCh(\mathcal{B}^{\text{gro}}))$ des n -préchamps de Segal par rapport aux équivalences objet-par-objet, s'étend en un morphisme de $*$ vers $A(X)$ dans $Ho(nSePC)$. Autrement dit, l'application naturelle*

$$[* , A(X)] \rightarrow [*_{\mathcal{B}} , A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$$

est surjective;

(ii) *Pour tout remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la topologie grossière, tout morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$ s'étend en un morphisme $*_{\mathcal{X}/X} \rightarrow A'$;*

(ii') *Il existe un remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la topologie grossière, tel que tout morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$ s'étende en un morphisme $*_{\mathcal{X}/X} \rightarrow A'$;*

(iii) *Pour tout remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la topologie grossière, le morphisme de n -catégories de Segal*

$$A'(X) = \Gamma(\mathcal{X}/X, A'|_{\mathcal{X}/X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{B}, A'|_{\mathcal{B}})$$

est essentiellement surjectif;

(iii') *Il existe un remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la topologie grossière, tel que le morphisme de n -catégories de Segal*

$$A'(X) = \Gamma(\mathcal{X}/X, A'|_{\mathcal{X}/X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{B}, A'|_{\mathcal{B}})$$

soit essentiellement surjectif;

(iv) *Le morphisme*

$$A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \mathcal{B}^{\circ}} A|_{\mathcal{B}}$$

est essentiellement surjectif;

(v) Pour tout remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la structure HBKQ (5.1) i.e. une équivalence objet-par-objet avec chaque $A'(X)$ fibrant, et pour tout morphisme

$$\eta : D_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$$

il existe une homotopie $h : D_{\mathcal{B}} \times \bar{I} \rightarrow A'$ avec $h(0) = \eta$ et telle que $h(1)$ provienne d'un morphisme $* \rightarrow A(X)$. Ici $D_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{B}}$ est le remplacement HBKQ-cofibrant construit à la fin de §5.

(v') Il existe un remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la structure HBKQ (5.1) tel que pour tout morphisme

$$\eta : D_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$$

il existe une homotopie $h : D_{\mathcal{B}} \times \bar{I} \rightarrow A'$ avec $h(0) = \eta$ et telle que $h(1)$ provienne d'un morphisme $* \rightarrow A(X)$.

Si on suppose, de plus, que $A(Y)$ est une n -catégorie de Segal pour tout $Y \in \mathcal{X}$, alors ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes:

(vi) Pour tout diagramme de préfaisceaux de n -catégories de Segal

$$*_{\mathcal{B}} \leftarrow C \rightarrow A$$

où le premier morphisme est une équivalence objet-par-objet, il existe $* \rightarrow A(X)$ tel que le composé

$$C \rightarrow *_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{X}/X} \rightarrow A$$

soit homotope (au sens de Quillen) au morphisme $C \rightarrow A$ de départ;

(vii) Tout diagramme de préfaisceaux de n -catégories de Segal

$$*_{\mathcal{B}} \leftarrow C \rightarrow A$$

où le premier morphisme est une équivalence objet-par-objet se complète en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} *_{\mathcal{B}} & \leftarrow & C & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ *_{\mathcal{X}/X} & \leftarrow & C' & \rightarrow & A \end{array}$$

où le morphisme $C' \rightarrow *_{\mathcal{X}/X}$ est une équivalence objet-par-objet; et

(viii) Soit $n\text{SeCat}^{\mathcal{B}^{\circ}}$ la catégorie des préfaisceaux de n -catégories de Segal sur \mathcal{B} ; et soit $\text{Ho}(n\text{SeCat}^{\mathcal{B}^{\circ}})$ sa localisée de Gabriel-Zisman, obtenue en inversant les équivalences objet-par-objet. Alors tout morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow A$ dans $\text{Ho}(n\text{SeCat}^{\mathcal{B}^{\circ}})$ provient d'un morphisme $* \rightarrow A(X)$.

Preuve:

(i) \Leftrightarrow (ii) (\Leftrightarrow (ii')) D'après Quillen [83] tout élément de $[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$ provient d'un morphisme $f : *_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{B}}$ (remarquer que $A'|_{\mathcal{B}}$ est fibrant pour la topologie grossière voir §4, et que $*_{\mathcal{B}}$ est automatiquement cofibrant). Si f s'étend à $*_{\mathcal{X}/X}$ alors la classe de f provient évidemment de $[*_{\mathcal{B}}, A(X)]$. Dans l'autre sens, si f correspond à un élément de $[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$ provenant de $[*_{\mathcal{B}}, A(X)]$ alors il existe un morphisme $g : *_{\mathcal{X}/X} \rightarrow A'$ tel que $g|_{\mathcal{B}}$ soit homotope (à gauche) à f au sens de Quillen [83]. Comme $*_{\mathcal{B}} \times \bar{I}$ est un objet-cylindre pour $*_{\mathcal{B}}$, il existe un morphisme

$$h : *_{\mathcal{B}} \times \bar{I} \rightarrow A'$$

avec $h(0) = f$ et $h(1) = g|_{\mathcal{B}}$. Maintenant on a un morphisme

$$(*_{\mathcal{B}} \times \bar{I}) \cup^{*_{\mathcal{B}} \times \{1\}} (*_{\mathcal{X}/X} \times \{1\}) \rightarrow A'$$

qui se prolonge le long de la cofibration triviale (pour la topologie grossière)

$$(*_{\mathcal{B}} \times \bar{I}) \cup^{*_{\mathcal{B}} \times \{1\}} (*_{\mathcal{X}/X} \times \{1\}) \hookrightarrow *_{\mathcal{X}/X} \times \bar{I},$$

en un morphisme dont la restriction à $*_{\mathcal{X}/X} \times \{0\}$ fournit l'extension de f cherchée.

(ii) \Leftrightarrow (iii) (\Leftrightarrow (iii')) est immédiat au vu de la définition de Γ .

(iii) \Leftrightarrow (iv) découle de la proposition 14.2 ci-dessous.

(i) \Leftrightarrow (v) (\Leftrightarrow (v')) On raisonne comme pour (i) \Leftrightarrow (ii) mais avec la structure HBKQ; cf. §5. Notons que la notion de classe d'homotopie d'applications est indépendante du choix de la structure de cmf et ne dépend que des équivalences faibles; en particulier dans (i) il s'agit des mêmes ensembles dans la structure de 3.1 ou dans la structure HBKQ 5.1.

On suppose maintenant que A est un préfaisceau de n -catégories de Segal. On a l'équivalence $Ho(nSeCat^{\mathcal{B}}) \cong Ho(nSePCh(\mathcal{B}^{\text{gro}})_f)$ car il y a une équivalence naturelle "remplacement fibrant" de $nSeCat^{\mathcal{B}}$ vers $nSePCh(\mathcal{B}^{\text{gro}})_f$. D'autre part on a l'équivalence $Ho(nSePCh(\mathcal{B}^{\text{gro}})_f) \cong Ho(nSePCh(\mathcal{B}^{\text{gro}}))$ ([83]). Ceci donne (i) \Leftrightarrow (viii). Pour les conditions (vi) et (vii), on choisit un remplacement fibrant $A \rightarrow A'$ pour la topologie grossière. Tout morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow A'$ admet donc une factorisation

$$*_{\mathcal{B}} \rightarrow E \rightarrow A'$$

où la première flèche est une cofibration triviale pour la topologie grossière et la deuxième une fibration pour la topologie grossière. Il existe une (unique) rétraction $E \rightarrow *_{\mathcal{B}}$ (on peut dire que $*_{\mathcal{B}}$ est fibrant pour la topologie grossière mais en fait il suffit de considérer les composantes connexes de C). Posons

$$C := E \times_{A'} A.$$

Le fait que les $A(Y)$ soient des n -catégories de Segal permet d'appliquer 3.8 pour obtenir que $C \rightarrow E$ est une équivalence objet-par-objet. Notons d'après 9.3 que les $C(Y)$ sont des

n -catégories de Segal. Ils'ensuit que tout élément de $[\ast_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$ provient d'un diagramme (de préfaisceaux de n -catégories de Segal)

$$\ast_{\mathcal{B}} \leftarrow C \rightarrow A$$

où le premier morphisme est une équivalence objet-par-objet. On laisse au lecteur de compléter la démonstration que (vi) et (vii) sont équivalentes aux autres conditions, en exprimant de la même façon la condition qu'un tel diagramme donne lieu à un élément de $[\ast_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$ qui provient de $[\ast, A(X)]$. \square

Critère principal

On a la caractérisation suivante des champs, qui est analogue à la définition de 1-champ dans Giraud [43] et Laumon-Moret-Bailly [68]. Les conditions (a) et (b) sont les analogues des deux conditions dans la définition de faisceau. Notons aussi que la condition (a) nous amène récursivement vers la condition (b).

Proposition 10.2 *Soit $n \geq 1$. Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} dont les valeurs sont des n -catégories de Segal. Alors A est un n -champ de Segal si et seulement si:*

- (a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout $x, y \in A_0(X)$ le $(n - 1)$ -préchamp de Segal $A_{1/}(x, y)$ sur \mathcal{X}/X est un $(n - 1)$ -champ de Segal; et*
- (b) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ dans un ensemble de cribles qui engendre la topologie, les données de descente pour A par rapport à \mathcal{B} sont effectives, voir la définition 10.1 ci-dessus.*

Preuve: Les conditions (a) et (b) sont évidemment nécessaires (pour (b) on utilise le fait que A' est \mathcal{G} -fibrant en vertu du Lemme 9.2). Supposons que (a) et (b) sont satisfaites et soit $A' \rightarrow A''$ une cofibration \mathcal{G} -triviale vers un n -préchamp de Segal \mathcal{G} -fibrant. Pour tout $X \in \mathcal{X}$ et $x, y \in A_0(X)$, le morphisme

$$A_{1/}(x, y) \rightarrow A''_{1/}(x, y)$$

est une cofibration \mathcal{G}_X -triviale de $(n - 1)$ -préchamps de Segal sur \mathcal{X}/X dont le but est \mathcal{G}_X -fibrant (Corollaire 6.3). La condition (a) implique que ce morphisme est une équivalence pour la topologie grossière, en particulier

$$A(X)_{1/}(x, y) \rightarrow A''(X)_{1/}(x, y)$$

est une équivalence. Il en est de même pour le morphisme

$$A'(X)_{1/}(x', y') \rightarrow A''(X)_{1/}(x', y')$$

pour tous $x', y' \in A'_0(X)$ car x' et y' sont équivalents à des objets provenant de $A_0(X)$. Ceci montre que $A' \rightarrow A''$ est pleinement fidèle objet-par-objet. Il reste à voir que $A' \rightarrow A''$ est essentiellement surjectif objet-par-objet. Pour cela, on peut choisir une factorisation

$$A' \rightarrow B \rightarrow A''$$

où le premier morphisme est une cofibration triviale pour la topologie grossière et le deuxième une fibration pour la topologie grossière. Quitte à remplacer A' par B , on peut dorénavant supposer que $A' \rightarrow A''$ est fibrant pour la topologie grossière.

Soit $X \in \mathcal{X}$ et $u \in A''_0(X)$, qu'on considère comme morphisme

$$u : *_X \rightarrow A''|_{\mathcal{X}/X}.$$

On pose

$$C := (A'|_{\mathcal{X}/X}) \times_{A''|_{\mathcal{X}/X}} *_X.$$

Le morphisme $C \rightarrow *_X$ est une fibration pour la topologie grossière et aussi une équivalence pour la topologie \mathcal{G} . De plus, comme $A' \rightarrow A''$ est pleinement fidèle, le morphisme $C \rightarrow *_X$ est pleinement fidèle. En particulier, C est 0-tronqué, et équivalent objet-par-objet à un préfaisceau de sous-ensembles de $*_X$. Comme notre morphisme est une équivalence pour la topologie \mathcal{G} , il existe un crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de la topologie (et même de l'ensemble générateur de cribles mentionné dans (b)) tel que $*_{\mathcal{B}}$ soit contenu dans ce sous-préfaisceau de $*_X$. En particulier, le morphisme

$$C \times_{*_X} *_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{B}}$$

est une équivalence objet-par-objet et, comme c'est aussi une fibration pour la topologie grossière, il existe une section $*_{\mathcal{B}} \rightarrow C$. On obtient ainsi un morphisme

$$*_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{X}/X}$$

qui, grâce à (b), s'étend en un morphisme

$$u' : *_X \rightarrow A'|_{\mathcal{X}/X}.$$

On obtient ainsi un élément $u' \in A'_0(X)$. Avec le même type d'argument on voit que l'image de u' dans $A''_0(X)$ est équivalente à u , ce qui prouve l'essentielle surjectivité. \square

Critère pour les 0-champs de Segal

On a un résultat analogue à 10.2 pour les 0-préchamps de Segal i.e. les préfaisceaux simpliciaux. Pour l'obtenir, on utilise le lemme suivant.

Lemme 10.3 *Soit $m, n \geq 0$ et soit A un préfaisceau de n -catégories de Segal. Alors A est un n -champ de Segal si et seulement si $\Pi_{m,Se} \circ A$ est un $n + m$ -champ de Segal.*

Preuve: D'abord on montre que si A est un n -champ de Segal, alors $\Pi_{m,Se} \circ A$ est un $n + m$ -champ de Segal. En raisonnant par récurrence sur m et en appliquant le critère 10.2, on se ramène au cas $n = 0$ et $m = 1$. Soit donc A un 0-champ de Segal. On peut supposer que A est \mathcal{G} -fibrant. On va prouver les conditions (a) et (b) de 10.2 pour $B = \Pi_{1,Se} \circ A$. Notons que A et $\mathfrak{R}_{\geq 0}B$ sont équivalents (objet-par-objet). Si X est un objet de \mathcal{X} et \mathcal{B} un crible couvrant X , tout morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow B$ induit un morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0}B$ et donc une donnée de descente pour A (i.e. un élément de $[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$). Maintenant, l'inclusion $*_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{X}/X}$ est une \mathcal{G} -équivalence et le fait que A soit \mathcal{G} -fibrant implique donc l'existence d'une extension de notre donnée de descente en un élément de $[*_{\mathcal{X}/X}, A(X)] = [*_{\mathcal{B}}, B(X)]$. Ceci prouve la condition (b) de 10.2 pour B . D'autre part, soient a et b dans $B_0(X)$. On a l'équivalence

$$B_{1/}(a, b) \cong \text{Path}^{a,b}(A) := * \times_{A|_{\mathcal{X}/X}} *,$$

et ce dernier préchamp est un 0-champ de Segal d'après 9.5. Ceci donne la condition (a) de 10.2, et donc, par 10.2, B est un 1-champ de Segal.

Pour l'autre direction, supposons que $\Pi_{m,Se} \circ A$ est un $n + m$ -champ de Segal. Choisissons un remplacement \mathcal{G} -fibrant $A \rightarrow A'$. On obtient un morphisme

$$\Pi_{m,Se} \circ A \rightarrow \Pi_{m,Se} \circ A',$$

dont le but est un $n + m$ -champ de Segal d'après le premier paragraphe. Par hypothèse la source est un $n + m$ -champ de Segal. Comme ce morphisme est une \mathcal{G} -équivalence faible, 9.1 implique que c'est une équivalence objet-par-objet. Ceci implique à son tour que $A \rightarrow A'$ est une équivalence objet-par-objet, et donc A est un n -champ de Segal. \square

On donne maintenant une version du critère adaptée aux 0-préchamps de Segal (ou préfaisceaux simpliciaux). Rappelons ici qu'un préfaisceau simpliciale U est un 0-champ de Segal, si et seulement si U est *flasque par rapport aux objets du site* au sens de Jardine [63], ou *de descente cohomologique* dans la terminologie de Thomason [100] [107].

Corollaire 10.4 *Si U est un préfaisceau simplicial au-dessus de \mathcal{X} , alors U est un 0-champ de Segal si et seulement si*

(a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tous $x, y \in U_0(X)$ le préfaisceau simplicial*

$Y \mapsto \text{Path}^{x|_Y, y|_Y}(U(Y))$ sur \mathcal{X}/X est un 0-champ de Segal; et

(b) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ (dans une famille de cribles qui engendre la topologie), les données de descente pour U sur \mathcal{B} sont effectives.*

Preuve: On observe, comme dans la démonstration précédente, que si $A := \Pi_{1, S_e} \circ U$ alors on a

$$(Y \mapsto \text{Path}^{x|_Y, y|_Y}(U(Y))) \cong A_{1/}(x, y)$$

et d'autre part, l'ensemble des données de descente (resp. effectives) pour U est isomorphe à l'ensemble des données de descente (resp. effectives) pour A . On conclut à l'aide de 10.2 et 10.3. \square

Dans la condition (a) de ce corollaire, $\text{Path}^{x|_Y, y|_Y}(U(Y))$ désigne l'ensemble simplicial des chemins entre $x|_Y$ et $y|_Y$ dans un remplacement de Kan de $U(Y)$.

Si U est un 0-champ de Segal k -tronqué (i.e. les $U(X)$ ont leurs groupes d'homotopie nuls en degré $> k$) alors le critère de 10.4 devient récursif puisque dans la condition (a)', $\text{Path}^{x|_Y, y|_Y}(U(Y))$ est $k - 1$ -tronqué. On peut convertir cette remarque en une version de la Proposition 10.2 adaptée aux k -champs (tout court et non de Segal).

Compatibilité avec la restriction aux \mathcal{X}/X

On revient aux n -champs de Segal; on peut enfin compléter les résultats du §4 concernant la topologie \mathcal{G} .

Lemme 10.5 *Soit \mathcal{X} un site dont on note \mathcal{G} la topologie de Grothendieck. Un n -préchamp de Segal A sur \mathcal{X} est un champ si et seulement si $A|_{\mathcal{X}/X}$ est un champ pour tout $X \in \mathcal{X}$. La restriction des n -préchamps de Segal*

$$p^* : A \mapsto A|_{\mathcal{X}/X}$$

préserve les \mathcal{G} -fibrations et les \mathcal{G} -fibrations triviales; pour la topologie \mathcal{G} , p^ est un foncteur de Quillen à la fois à gauche et à droite.*

Preuve: Il est évident d'après nos critères (10.2 et 10.4) que A est un champ si et seulement si $A|_{\mathcal{X}/X}$ est un champ pour tout $X \in \mathcal{X}$. En particulier la restriction p^* envoie les objets \mathcal{G} -fibrants sur des objets \mathcal{G} -fibrants (cf le lemme 9.2). Soit $f : A \rightarrow B$ une \mathcal{G} -fibration entre objets \mathcal{G} -fibrants. Alors $f|_{\mathcal{X}/X}$ est une fibration pour la topologie grossière (d'après 4.1) entre objets \mathcal{G} -fibrants. D'après le lemme 9.3, on a que $f|_{\mathcal{X}/X}$ est \mathcal{G} -fibrant.

Maintenant on sait que p^* transforme les fibrations entre objets fibrants en fibrations. Or, une cofibration dans une cmf est triviale si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement pour toutes les fibrations entre objets fibrants. Ceci implique que l'adjoint $p_!$ de p^* transforme les cofibrations triviales en cofibrations triviales (et on savait déjà que $p_!$ préserve les cofibrations). Donc $p_!$ est un foncteur de Quillen à gauche, et par suite p^* est un foncteur de Quillen à droite. \square

A propos de \emptyset

Habituellement dans un site \mathcal{X} on a un objet initial ι (généralement l'objet "vide" $\iota = \emptyset$), et les champs sur \mathcal{X} doivent satisfaire la condition $A(\iota) \cong *$, du moins lorsque la topologie \mathcal{G} admet le crible vide $\mathcal{B} = \emptyset \subset \mathcal{X}/\iota$ comme crible couvrant ι (ce qui sera le cas dans les exemples géométriques). En effet, sous cette hypothèse, si A est \mathcal{G} -fibrant, alors comme $E' \times_{*_{\iota}} \rightarrow E \times_{*_{\iota}}$ est une cofibration triviale, pour toute cofibration de n -précats de Segal $E' \subset E$, tout morphisme $E' \rightarrow A(\iota)$ s'étend en $E \rightarrow A(\iota)$ ce qui entraîne que $A(\iota) \rightarrow *$ est une fibration triviale.

Voyons ce que ça donne avec nos critères: puisque $\mathcal{B} = \emptyset \subset \mathcal{X}/\iota$ est un crible couvrant ι (\mathcal{B} ne contient même pas ι), le préchamp $*_{\mathcal{B}}$ est égal au vide \emptyset au-dessus de \mathcal{X}/ι donc il existe un unique morphisme $*_{\mathcal{B}} \rightarrow A'|_{\mathcal{X}/\iota}$. La condition (b) de nos critères implique donc que $A'(\iota)$ est non-vide. D'autre part, la condition (a) de nos critères implique (par récurrence sur n) que pour chaque paire d'objets de $A(\iota)$ la $n-1$ -catégorie de morphismes correspondante est $*$. D'où $A(\iota) = *$. Pour $n = 0$ le même argument (en remplaçant à chaque fois A par son $\Pi_{1,Se} \circ A$) montre par récurrence que tous les groupes d'homotopie de l'ensemble simplicial $A(\iota)$ s'annulent; c'est le cas initial de la récurrence pour $n > 0$. En revanche, pour ce qu'on appelle la "topologie grossière", on n'admet pas le crible vide $\emptyset \rightarrow \mathcal{X}/\iota$ comme crible couvrant. Dans ce cas on n'a pas la condition $A(\iota) \cong *$.

Dévissage

Pour $n > 0$ on peut dévisser la condition pour être un champ en termes des $k < n$, grâce au corollaire suivant. Rappelons encore qu'un préfaisceau simplicial U est un 0-champ de Segal, si et seulement si U est flasque par rapport aux objets du site (Jardine [63]), ou de descente cohomologique (Thomason [100] [107]). Cette condition est donc bien connue.

On rappelle (cf. §2) que si A est une n -catégorie de Segal, pour $k \leq n$, on dispose de l'*intérieur k -groupe* $A^{int,k}$ qui est une k -catégorie de Segal. Essentiellement cette construction consiste à ne garder que les i -flèches qui sont inversibles à équivalence près ($i > k$) et à considérer le résultat comme une k -catégorie de Segal. Pour $k = 0$, $A^{int,0}$ est donc un ensemble simplicial avec $\Pi_{n,Se} \circ A^{int,0}$ équivalent au plus grand n -groupeïde de Segal contenu dans A . Ces constructions s'étendent de manière évidente à des préfaisceaux de n -catégories de Segal.

Le corollaire suivant permet de dévisser la condition pour qu'un n -préchamp de Segal A soit un n -champ de Segal, en termes de la condition pour qu'un préfaisceau simplicial soit un 0-champ de Segal.

Corollaire 10.6 *Soit A un n -préchamp de Segal ($n \geq 1$) tel que $A(X)$ soit une n -catégorie de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$. Alors A est un n -champ de Segal si et seulement si:*

- (a) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d'objets $x, y \in A_0(X)$, le $n - 1$ -préchamp de Segal $A_1|_X(x, y)$ est un $n - 1$ -champ de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ; et
(b) $A^{int,0}$ est un 0-champ de Segal.

Preuve: On a

$$[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}} = [*_{\mathcal{B}}, A^{int,0}|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}},$$

et on applique 10.2 et 10.4. □

Corollaire 10.7 *Si A est un n -champ de Segal alors pour $0 \leq k < n$, $A^{int,k}$ est un k -champ de Segal.* □

En fait, le lecteur pourra se convaincre que le présent dévissage nous ramène à un nombre infini de conditions d'effectivité des données de descente, une pour les i -flèches pour chaque $i \geq 0$. Pour énoncer ceci plus précisément, introduisons des notations. Rappelons d'abord une notation de Tamsamani [98]: l'ensemble de i -flèches d'une n -catégorie A , noté $Fl^i(A)$, est l'ensemble A_{1^i} où $1^i = (1, \dots, 1) \in \Theta^n$ est la classe de $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \Delta^n$. On a les applications s ("source") et b ("but") de $Fl^i(A)$ vers $Fl^{i-1}(A)$. Dans notre situation, si A est une n -catégorie de Segal, on conviendra de dire que les i -flèches pour $i > n$ sont les i -flèches de $\Pi_{m,se} \circ A$ pour $m > i - n$. De façon plus systématique on pourrait définir (au vu de notre définition de $\tau_{\leq m}$ voir §2)

$$Fl^i(A) := Fl^i(\tau_{\leq i+1}A).$$

Soit $i \geq 1$ et soient $x, y \in Fl^{i-1}(A)$ avec $s(x) = s(y)$ et $b(x) = b(y)$. On définit alors la $(n - i)$ -catégorie de Segal $\underline{Fl}^i(A; x, y)$ comme la sous- $(n - i)$ -catégorie de Segal de A_{1^i} formée des objets dont la source est x et le but est y (ici, si $n - i$ est négatif, on le remplace par 0).¹⁶

Si A est un n -préchamp de Segal dont les valeurs $A(X)$ sont des n -catégories de Segal, alors pour tout $X \in \mathcal{X}$ et $x, y \in Fl^{i-1}(A(X))$ avec $s(x) = s(y)$ et $b(x) = b(y)$, on dispose du $n - i$ -préchamp de Segal $\underline{Fl}^i(A|_{\mathcal{X}/X}; x, y)$ qui à $Y \rightarrow X$ associe la $n - i$ -catégorie $\underline{Fl}^i(A(Y); x|_Y, y|_Y)$.

Proposition 10.8 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} tel que les $A(X)$ soient des n -catégories de Segal. Alors A est un n -champ de Segal si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ (dans une famille de cribles qui engendre la topologie), on a:*

- les données de descente pour A par rapport à \mathcal{B} sont effectives; et
- pour tout $1 \leq i < \infty$, pour tout $x, y \in Fl^{i-1}(A(X))$ avec $s(x) = s(y)$ et $b(x) = b(y)$, les données de descente pour $\underline{Fl}^i(A|_{\mathcal{X}/X}, x, y)$ sur \mathcal{B} sont effectives.

¹⁶Cette infélicité devrait disparaître à terme quand on pourra parler des ∞ -catégories.

La démonstration est laissée en exercice au lecteur. *Indication:* combiner le lemme 6.2, avec la remarque qu’il suffit, pour obtenir toutes les cofibrations triviales, de considérer des suites adéquates composées de cofibrations triviales pour la topologie grossière, ainsi que de cofibrations de la forme $\text{cof}(U \hookrightarrow U'; \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$ où $U' = h(1^i)$ représente les i -flèches, et U est son ”bord” qui représente les couples de $i - 1$ -flèches avec même source et but. \square

Le cas des 1-préchamps de Segal et préfaisceaux de catégories simpliciales

Dans la dernière partie du papier, on s’intéressera surtout au cas $n = 1$; pour cette raison, on recopie 10.6 pour les 1-catégories de Segal ainsi que pour les préfaisceaux de catégories simpliciales. On rappelle encore que les 0-champs de Segal sont exactement les préfaisceaux simpliciaux flasques par rapport aux objets du site [63] ou encore vérifiant la condition de descente cohomologique de [100] [107].

Corollaire 10.9 *Soit A un 1-préchamp de Segal tel que $A(X)$ soit une catégorie de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$. Alors A est un 1-champ de Segal (∞ -champ) si et seulement si:*

- (a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d’objets $x, y \in A_0(X)$, le préfaisceau simplicial $A_{1/}(x, y)$ au-dessus de \mathcal{X}/X est un 0-champ de Segal; et*
- (b) *le préfaisceau simplicial $A^{\text{int},0}$ est un 0-champ de Segal.*

\square

Si B est une catégorie simpliciale, on peut calculer l’ensemble simplicial $B^{\text{int},0}$ de la façon suivante: soit WB la sous-catégorie simpliciale où on ne garde que les flèches qui sont inversibles à homotopie près; soit νWB son ”nerf”, i.e. l’ensemble bisimplicial associé (c’est aussi la 1-précat de Segal associée). Alors, si $d(\nu WB)$ est l’ensemble simplicial diagonal correspondant, on a $d(\nu WB) \cong B^{\text{int},0}$. Cette discussion s’étend de façon évidente aux préfaisceaux de catégories simpliciales (qui donnent lieu à des 1-préchamps de Segal qu’on note avec la même lettre).

Corollaire 10.10 *Soit B un préfaisceau de catégories simpliciales. Alors B est un 1-champ de Segal si et seulement si:*

- (a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d’objets $x, y \in \text{Ob}(B)(X)$, le préfaisceau simplicial $\text{Mor}_B(x, y)$ au-dessus de \mathcal{X}/X est un 0-champ de Segal, et*
- (b) *le préfaisceau simplicial $d(\nu WB) = B^{\text{int},0}$ est un 0-champ de Segal.*

\square

Une variante du critère

On donne ici un énoncé très légèrement différent de 10.2. On remarque d'abord que si A' est un n -préchamp de Segal fibrant pour la topologie grossière, alors $A'|_{\mathcal{X}/X}$ est aussi fibrant pour la topologie grossière, ainsi que $A'|_{\mathcal{B}}$ pour tout crible \mathcal{B} couvrant \mathcal{X}/X (voir §4). Par ailleurs, on observe que le morphisme

$$\Gamma(\mathcal{X}/X, A'|_{\mathcal{X}/X}) \rightarrow A'(X)$$

est un isomorphisme de n -catégories de Segal, car X est l'objet final de la catégorie \mathcal{X}/X et Γ est simplement le foncteur des sections globales pour les préfaisceaux.

Proposition 10.11 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} dont les valeurs sont des n -catégories de Segal. Fixons une cofibration triviale pour la topologie grossière $A \rightarrow A'$ avec A' fibrant pour la topologie grossière. Alors A est un n -champ de Segal si et seulement si: (c) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de la topologie, le morphisme*

$$A'(X) = \Gamma(\mathcal{X}/X, A'|_{\mathcal{X}/X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{B}, A'|_{\mathcal{B}})$$

est une équivalence de n -catégories de Segal.

Preuve: Supposons que A est un n -champ de Segal. Quitte à remplacer A par A' , on peut aussi supposer que A est fibrant pour la topologie grossière, et donc même \mathcal{G} -fibrant (voir 9.3). On va montrer que, dans ce cas, le morphisme de (c) est une fibration triviale; pour cela on montrera qu'il possède la propriété de relèvement par rapport à toute cofibration $E \rightarrow E'$ de n -précats de Segal.

On commence par observer que si un morphisme $U \rightarrow V$ de n -préchamps de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X est une équivalence au-dessus de chaque objet d'un crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ couvrant X , alors c'est une \mathcal{G} -équivalence faible. En effet, c'est facile à voir pour $n = 0$ et pour $n > 0$ on peut procéder par récurrence sur n en utilisant directement la définition de \mathcal{G} -équivalence faible (§3). On applique cela au morphisme

$$j : E'_{\mathcal{B}} \cup^{E_{\mathcal{B}}} E_{\mathcal{X}/X} \rightarrow E'_{\mathcal{X}/X},$$

où $E \hookrightarrow E'$ est la cofibration triviale de n -précats de Segal donnée, et $E_{\mathcal{B}}$ est le n -préchamp obtenu en appliquant $p_!$ au n -préchamp de Segal constant à valeurs E sur \mathcal{B} , p désignant l'inclusion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}/X$. On obtient ainsi que j est une cofibration \mathcal{G} -triviale. La propriété de relèvement de $A \rightarrow *$ pour le morphisme j se traduit en la propriété de relèvement du morphisme

$$\Gamma(\mathcal{X}/X, A|_{\mathcal{X}/X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{B}, A|_{\mathcal{B}})$$

par rapport à la cofibration $E \rightarrow E'$. Ceci prouve que le morphisme en question est une fibration triviale, ce qui donne la condition (c) pour A .

Pour l'autre sens, supposons que A satisfait la condition (c). On note que si A est fibrant pour la topologie grossière, la condition (c) implique que A possède la propriété de relèvement pour toute cofibration de la forme $\text{cof}(U \hookrightarrow U', \mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X)$ (voir la définition juste avant la proposition 6.1). D'après le lemme 6.2, ceci implique que A possède la propriété de relèvement pour toute cofibration \mathcal{G} -triviale, i.e. que A est \mathcal{G} -fibrant. La condition (c) implique donc que A est un n -champ de Segal. \square

Remarques: On indique ici un argument alternatif de récurrence sur n qui permet facilement de réduire la proposition au cas $n = 0$. Supposons que $n \geq 1$ et qu'on a déjà démontré la proposition pour les $n - 1$ -préchamps de Segal. Si \mathcal{B} est un crible couvrant \mathcal{X}/X , alors pour tous $x, y \in A'_0(X)$ on a

$$\Gamma(\mathcal{B}, A'_{1/}(x, y)|_{\mathcal{B}}) = \Gamma(\mathcal{B}, A'|_{\mathcal{B}})_{1/}(x, y).$$

Au vu de la définition de léquivalence entre n -catégories de Segal, la condition (c) pour A' est manifestement équivalente à la conjonction de la condition (b) de 10.2 avec la condition (c) pour les $A'_{1/}(x, y)$. Par hypothèse de récurrence, cette dernière est équivalente à la condition (a) de 10.2. On obtient donc bien que la condition (c) est équivalente aux conditions (a) plus (b) de 10.2.

Pour $n = 0$ i.e. pour les préfaisceaux simpliciaux, on peut en plus remarquer que s'il s'agit de préfaisceaux simpliciaux m -tronqués on peut les considérer comme m -champs (non de Segal) et, en combinant la récurrence ci-dessus avec un argument évident pour les préfaisceaux d'ensembles, on obtient une preuve facile de la proposition. La difficulté provient donc des groupes d'homotopie de degré arbitrairement grand: il y a de la cohomologie de tout degré qui peut contribuer aux données de descente. Dans ce cas ($n = 0$), le fait que la condition (c) est nécessaire a fait l'objet d'une note de Toen [103]. Pour le fait qu'elle est aussi suffisante dans le cas non-tronqué, il semble inévitable d'utiliser 6.2.

Les protochamps

Pour les 1-champs ordinaires (non de Segal), il apparaît chez Giraud [43] et Laumon-Moret-Bailly [68] une notion de "préchamp": en leur sens, un préchamp est un de nos préchamps qui satisfait en outre la condition (a) de 10.2. Dans le cas des préfaisceaux, ceci correspond à exiger la première des deux conditions de la définition habituelle des faisceaux (Houzel appelait ça des semi-faisceaux mais "semi-champ" ne sonne pas bien) et la terminologie de [43] [68] n'est donc pas compatible avec la terminologie habituelle concernant les préfaisceaux; c'est pour cela que nous avons préféré garder le terme "préchamp" pour des objets dépourvus de relation avec la topologie \mathcal{G} . Cependant, la notion de préchamp satisfaisant la condition (a) de 10.2 est utile, et nous adoptons la définition suivante:

Définition 10.12 Soit $n \geq 1$. Un n -préchamp de Segal A sera appelé protochamp si les $A(X)$ sont des n -catégories de Segal, et si A satisfait la condition (a) de 10.2, à savoir que pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tous $x, y \in A(X)_0$, le $n - 1$ -préchamp de Segal $A_{1/}(x, y)$ est un $n - 1$ -champ de Segal sur \mathcal{X}/X .

Lemme 10.13 Soit A un n -préchamp de Segal dont les valeurs $A(X)$ sont des n -catégories de Segal. Soit $f : A \rightarrow A'$ un champ associé (§9). Alors A est un protochamp si et seulement si le morphisme f est pleinement fidèle (objet-par-objet).

Preuve: Si f est pleinement fidèle alors, comme les $A'_{1/}(fx, fy)$ sont des $n - 1$ -champs de Segal, il en est de même des $A_{1/}(x, y)$. Dans l'autre sens, supposons que A est un protochamp, et soient $x, y \in A(X)_0$. Alors le morphisme $A_{1/}(x, y) \rightarrow A'_{1/}(fx, fy)$ est une \mathcal{G}_X -équivalence faible entre $n - 1$ -champs de Segal sur \mathcal{X}/X , donc par 9.1, c'est une équivalence objet-par-objet. Donc f est pleinement fidèle. \square

La prochaine proposition est l'analogue d'un résultat de [91]. On laisse la démonstration en "exercice" au lecteur.

Proposition 10.14 Soit F un n -protochamp de Segal sur \mathcal{X} , et définissons un n -préchamp de Segal G par

$$G(X) := \operatorname{colim}_{\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X} \left(\lim_{\leftarrow, \mathcal{B}^o} F|_{\mathcal{B}} \right)$$

(ici on utilise les limites et colimites de [95], voir §14 pour comment les calculer; la colimite est prise sur l'ensemble filtrant des cribles couvrant X). Alors $F \rightarrow G$ est le champ associé. \square

Rappelons qu'on peut considérer une n -catégorie comme n -catégorie de Segal en considérant les ensembles de n -morphisms comme des ensembles simpliciaux 0-tronqués. Les n -catégories de Segal qui correspondent ainsi aux n -catégories sont exactement celles qui sont n -tronqués i.e. pour lesquelles on a $A \cong A^{int, n} \cong \tau_{\leq n} A$. Le lemme suivant indique qu'on peut utiliser cette correspondance pour traduire les résultats sur les n -préchamps de Segal en résultats sur les n -préchamps (non de Segal). Dans ce lemme, l'hypothèse selon laquelle les $A(X)$ doivent être des n -catégories de Segal est bien nécessaire (car l'opération *SeCat* ne conserve pas la propriété d'être tronqué).

Corollaire 10.15 Si A est un préfaisceau de n -catégories de Segal qui est n -tronqué (i.e. $A \cong \tau_{\leq n} A$) et si $A \rightarrow A'$ est un champ associé, alors A' est aussi n -tronqué.

Preuve: Ce serait une conséquence immédiate de la proposition 10.14. Comme on n'a pas fourni de preuve de cette proposition, on indique ici une démonstration alternative du corollaire. On peut supposer qu'on a développé parallèlement à notre discussion des n -préchamps de Segal, une discussion analogue pour les n -préchamps non de Segal. Par exemple, pour un n -préchamp non de Segal T , on peut définir le n -champ associé $f : T \rightarrow T'$. Ce morphisme est une \mathcal{G} -équivalence faible de n -préchamps. Notons $Ind(T)$ (resp. $Ind(T')$) les n -préchamps de Segal induits. Supposons que les $T(X)$ sont des n -catégories. Le fait que f soit une \mathcal{G} -équivalence de n -préchamps implique que $Ind(f)$ est une \mathcal{G} -équivalence de n -préchamps de Segal. D'autre part, d'après 10.2 et son analogue pour les n -préchamps non de Segal, $Ind(A')$ est un n -champ de Segal. En effet, avec la condition (a) on se réduit par récurrence au cas où $n = 0$; pour celui-ci, la question est de savoir si un faisceau d'ensembles est un 0-champ de Segal, ce qui est le cas (on peut le voir en appliquant encore deux fois 10.4). Ceci démontre que $Ind(A')$ est un n -champ de Segal. Alors par définition c'est le n -champ de Segal associé à $Ind(A)$. Dans la situation du corollaire, on part d'un n -préchamp de Segal A qui est objet-par-objet n -tronqué. Il s'ensuit que A est équivalent à un préchamp $Ind(T)$ où T est un n -préchamp non de Segal (et dont les valeurs sont des n -catégories) et la discussion précédente prouve le corollaire. \square

Exercice: Si A est un n -préchamp non de Segal (ou de Segal mais n -tronqué) alors on obtient le champ associé A' à partir de A par application $n + 2$ fois de la construction de la proposition 10.14.

11. Catégories de modèles internes

Nous voulons construire le $n+1$ -préchamp de Segal de modules des n -champs de Segal. Pour ceci on utilise la notion suivante de *catégorie de modèles fermée interne*. Soit M une catégorie de modèles fermée. On dira que M est *interne* si elle vérifie les axiomes suivants:

IM(a)— M admet un \underline{Hom} interne, i.e. le foncteur $X \mapsto M_1(X \times A, B)$ est représentable par un objet $\underline{Hom}(A, B)$;

IM(b)—le produit direct commute aux colimites finies, en particulier $A \times \emptyset = \emptyset$ pour l'objet initial \emptyset ;

IM(c)—si $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$ sont des cofibrations alors le morphisme naturel

$$\operatorname{colim} \left(\begin{array}{ccc} A \times B & \rightarrow & A' \times B \\ \downarrow & & \\ A \times B' & & \end{array} \right) \rightarrow A' \times B'$$

est aussi une cofibration; et

IM(d)—l'équivalence faible est stable par produit direct.

Ces axiomes sont très proches des axiomes d'une *catégorie de modèles fermée monoïdale* au sens de Hovey [61]. Essentiellement, on demande que le produit direct définisse une structure monoïdale au sens de [61], et on demande en outre que le \underline{Hom} interne existe. Cette dernière condition est plus ou moins équivalente à l'existence d'une certaine colimite, mais cette colimite n'est peut-être pas “petite” (i.e. indexée par un ensemble et non une classe) et nous ne savons pas si la simple condition d'existence des (petites) colimites suffit pour garantir IM(a).

La proposition suivante redonne les axiomes IM1-IM4 de [94] §11, et nous considérons désormais les axiomes IM(a)–IM(d) comme constituant la version “officielle” de la notion de cmf interne.

Proposition 11.1 *Soit M une catégorie de modèles fermée interne.*

- (1) *Si A est cofibrant et B fibrant alors $\underline{Hom}(A, B)$ est fibrant;*
- (2) *Si $A \rightarrow A'$ est une cofibration (resp. cofibration triviale) d'objets cofibrants, et si $B' \rightarrow B$ est une fibration (resp. fibration triviale) entre objets fibrants, alors le morphisme*

$$\underline{Hom}(A', B') \rightarrow \underline{Hom}(A', B) \times_{\underline{Hom}(A, B)} \underline{Hom}(A, B')$$

est une fibration (resp. fibration triviale);

- (3) *Le \underline{Hom} interne transforme tout coproduit cofibrant dans son premier argument (resp. produit fibré fibrant dans son second argument) en un produit fibré fibrant.*

La preuve est facile et laissée au lecteur (les arguments se trouvent au §7 de [94]). \square

On a une version “homotopique” de la notion de Hom interne. Soit A une catégorie simpliciale, et soient $x, y \in A$. On suppose que A admet des produits directs homotopiques; soit $h \in A$ et $f : h \times x \rightarrow y$ un morphisme (i.e. on choisit un objet $h \times x$ muni de morphismes vers h et x qui représente le produit direct). On dit que (h, f) est un Hom interne homotopique de x à y , si le morphisme (essentiellement bien défini)

$$A_{1/}(u, h) \rightarrow A_{1/}(u \times x, y)$$

est une équivalence (ici encore on choisit un objet $u \times x$).

Proposition 11.2 *Soit M une catégorie de modèles fermée interne. Alors la catégorie simpliciale $L(M)$ admet un Hom interne au sens homotopique ci-dessus.*

Preuve: On utilise la technique des résolutions cosimpliciales cofibrantes pour calculer les complexes de fonctions (cf [59] [30] [33] [46] [86]). Fixons $x, y \in M$ avec x cofibrant et y fibrant, et notons $h := \underline{Hom}(x, y)$ le \underline{Hom} interne de M (IM(a)). On a un morphisme $h \times x \rightarrow y$. Ici et plus loin il convient de remarquer que le produit direct d’objets de M est aussi le produit direct homotopique dans $L(M)$, d’après IM(d). Fixons $u \in M$ et choisissons une résolution cosimpliciale cofibrante de Reedy $\mathbf{u} \rightarrow u$ (cf [59] [30] [33] [46] [86]). On a alors l’égalité entre ensembles simpliciaux

$$M_{1/}(\mathbf{u}, h) = M_{1/}(x \times \mathbf{u}, y).$$

Or, comme h est fibrant (Proposition 11.1 (1)), on a aussi (d’après *loc cit.*)

$$M_{1/}(\mathbf{u}, h) \cong L(M)_{1/}(u, h).$$

D’autre part, les axiomes IM(b) et IM(c) impliquent que $x \times \mathbf{u}$ est une résolution cosimpliciale cofibrante de Reedy pour $x \times u$, donc (encore d’après *loc cit.*) on a l’équivalence

$$M_{1/}(x \times \mathbf{u}, y) \cong L(M)_{1/}(x \times u, y).$$

Ces deux équivalences impliquent par définition que h est un Hom interne homotopique de x à y . \square

La catégorie M_f -enrichie associée

Soit M une catégorie de modèles fermée interne. Notons $*$ son objet final. On obtient un foncteur $\sigma : M \rightarrow Sets$ en posant $\sigma(X) := M_1(*, X)$. Cette construction commute aux produits directs. On a la formule tautologique

$$M_1(A, B) = \sigma \underline{Hom}(A, B).$$

Le \underline{Hom} interne permet de munir M_{cf} d'une structure de catégorie enrichie dans M_f , via le foncteur σ . Autrement dit, pour tous $A, B \in M_{cf}$ on a $\underline{Hom}(A, B) \in M_f$ et $M_{cf}(A, B) = \sigma(\underline{Hom}(A, B))$; pour tous A, B, C on a une composition

$$\underline{Hom}(A, B) \times \underline{Hom}(B, C) \rightarrow \underline{Hom}(A, C)$$

qui est associative (nous négligeons ici les problèmes liés aux contraintes d'associativité qui sont des isomorphismes naturels). Cette composition est transformée par σ en la composition de M_{cf} .

Si on sait en outre que les $\underline{Hom}(A, B)$ sont cofibrants (c'est par exemple le cas quand les cofibrations de M sont les injections), alors M_{cf} est auto-enrichie par son Hom interne. En particulier, la structure $INT(M_{cf})$ ne dépend que de la catégorie M_{cf} dans ce cas.

On obtient aussi ce qu'on pourrait appeler une M_f -catégorie de Segal stricte et qu'on notera par $INT(M_{cf})$, en posant

$$INT(M_{cf})_{p/}(A_0, \dots, A_p) := \underline{Hom}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{Hom}(A_{p-1}, A_p).$$

Cet objet consiste plus précisément en un ensemble $INT(M_{cf})_0$ d'objets, et pour toute suite A_0, \dots, A_p d'objets, un objet $INT(M_{cf})_{p/}(A_0, \dots, A_p)$ de M_f (avec les morphismes habituels de functorialité) tel que les morphismes de Segal soient des isomorphismes. Ceci est équivalent bien sûr à la donnée d'une catégorie M_f -enrichie, et nous allons utiliser la notation $INT(M_{cf})$ indifféremment pour la catégorie M_f -enrichie ou pour la M_f -catégorie de Segal stricte.

Structure interne pour les n -catégories de Segal

Dans le cas où M est une catégorie de préfaisceaux d'ensembles sur une certaine catégorie, et si les cofibrations sont les morphismes injectifs (ou même seulement injectifs au-dessus d'un sous-ensemble d'objets dans la catégorie de base) alors les axiomes IM(a), IM(b) et IM(c) sont automatiquement vérifiés. Tel est le cas de la catégorie de modèles fermée des n -précats de [94] ou sa variante pour les n -précats de Segal définie plus haut dans le présent travail 3.1. Tel est aussi le cas pour la catégorie de modèles fermée des n -préchamps de Segal 2.3, car un n -préchamp de Segal n'est rien d'autre qu'un préfaisceau d'ensembles sur $\Theta^{n+1} \times \mathcal{X}$ (et les cofibrations sont les injections de préfaisceaux). La seule difficulté dans ces exemples consiste à vérifier IM(d).

Ceci a été fait pour les n -précats dans [94] Theorem 5.1. Comme pour l'existence de la structure de catégorie de modèles fermée, on peut soit recopier la démonstration, soit utiliser ce résultat via $A \mapsto \Pi_m \circ A$, pour obtenir le même résultat pour les n -précats de Segal. On obtient:

Lemme 11.3 *La cmf $nSePC$ des n -précats de Segal de 3.1 est interne.*

□

Si on applique la discussion précédente à la catégorie de modèles fermée $nSePC$ des n -précats de Segal on obtient une 1-catégorie stricte $INT(nSePC_{cf})$ enrichie sur $nSePC_f$; et en prenant le nerf de celle-ci on obtient une $nSePC_f$ -catégorie de Segal, i.e. une $n + 1$ -catégorie de Segal qu'on note

$$nSeCAT := INT(nSePC_{cf}).$$

Insistons bien sur le fait que les objets de $nSeCAT$ sont les n -catégories de Segal fibrantes, et pour toute suite d'objets A_0, \dots, A_p on a

$$nSeCAT_p(A_0, \dots, A_p) := \underline{Hom}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{Hom}(A_{p-1}, A_p).$$

La même construction pour la $n + 1$ -catégorie $nCAT$ des n -catégories fibrantes, a été donnée dans [94] §7.

On observe que $nSeCAT$ (resp. $nCAT$) n'est pas fibrante, et on utilisera souvent un remplacement fibrant qu'on notera $nSeCAT'$ (resp. $nCAT'$).

Remarque ensembliste: Les objets de $(nSeCAT)_0$ forment une classe, et techniquement parlant, $nSeCAT$ n'est pas une $n + 1$ -catégorie. Pour contourner ce problème, on convient de fixer un ensemble (très grand!) et de ne retenir comme objet de $nSeCAT$ que les n -catégories dont l'ensemble sous-jacent (i.e. réunion des A_M) est contenu dans cet ensemble. Avec cette convention, le remplacement fibrant $nSeCAT'$ existe. Le lecteur vérifiera que nos constructions ne nous éloignent pas de ce cadre: quand on parle de limites ou colimites, par exemple, elles sont toujours prises suivant un ensemble d'indices dont on peut borner à l'avance la puissance; il suffit donc de choisir notre ensemble de départ suffisamment grand pour que toutes les limites et colimites qu'on va prendre, existent; de façon similaire, quand on utilise l'argument du petit objet, on connaît toujours à l'avance une borne transfinie du nombre d'étapes nécessaires.

Structure interne pour les n -champs de Segal

On va maintenant adapter aux n -champs de Segal la construction vue pour les n -catégories de Segal.

Lemme 11.4 *La cmf $nSePCh$ des n -préchamps de Segal sur un site \mathcal{X} , est interne.*

Preuve: comme on l'a remarqué plus haut, la seule difficulté concerne IM(d) qu'on prouve par récurrence sur n . Pour $n = 0$ la propriété en question résulte facilement de la définition de l'équivalence d'Illusie (en notant que le passage au faisceau associé est compatible avec le produit direct des préfaisceaux d'ensembles, voir par exemple [87]). On suppose donc

$n \geq 1$ et le résultat connu pour $n - 1$. Soit $f : A \rightarrow A'$ une \mathcal{G} -équivalence de n -préchamps de Segal, et soit B un n -préchamp de Segal. On peut supposer (grâce au résultat correspondant pour les n -précats de Segal) que les $A(X)$, $A'(X)$ et $B(X)$ sont des n -catégories de Segal. On a

$$\tau_{\leq 0}(A \times B) = \tau_{\leq 0}(A) \times \tau_{\leq 0}(B)$$

(et de même pour A') donc le morphisme

$$\tau_{\leq 0}(A \times B) \rightarrow \tau_{\leq 0}(A' \times B)$$

induit une surjection sur les faisceaux d'ensembles associés. D'autre part, pour (x, a) et (y, b) dans $(A \times B)_0(X)$, on a

$$(A \times B)_{1/}((x, a), (y, b)) = A_{1/}(x, y) \times B_{1/}(a, b)$$

et de même pour A' ; on obtient donc (à partir du résultat pour $n - 1$) que le morphisme induit par f

$$(A \times B)_{1/}((x, a), (y, b)) \rightarrow (A' \times B)_{1/}((fx, a), (fy, b))$$

est une \mathcal{G} -équivalence. Par définition (voir §3) cela veut dire que f est une \mathcal{G} -équivalence. Ceci donne IM(d). \square

Maintenant, à partir de $M = nSePCh$, on peut construire le $n + 1$ -préchamp de Segal des n -champs de Segal fibrants, noté

$$nSe\text{CHAMP}(\mathcal{X}) := INT(nSePCh_{cf}).$$

Les objets de $nSe\text{CHAMP}(\mathcal{X})$ au-dessus de $X \in \mathcal{X}$ sont les n -préchamps de Segal fibrants sur \mathcal{X}/X . Si A_0, \dots, A_p sont de tels objets, alors on définit sur \mathcal{X}/X le n -préchamp de Segal

$$nSe\text{CHAMP}(\mathcal{X})_{p/}(A_0, \dots, A_p) = \underline{Hom}(A_0, A_1) \times \dots \times \underline{Hom}(A_{p-1}, A_p).$$

En appliquant le foncteur des sections globales Γ à $nSe\text{CHAMP}(\mathcal{X})$, on obtient la $n + 1$ -catégorie de Segal des n -champs de Segal sur \mathcal{X} , qu'on pourrait noter

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}).$$

En fait, si on analyse la phrase précédente, on constate que les objets de $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ sont les n -préchamps de Segal A tels que $A|_{\mathcal{X}/X}$ soit fibrant pour tout $X \in \mathcal{X}$. Si \mathcal{X} n'a pas d'objet final, cette condition peut être différente que la condition (plus forte) que A soit fibrant (noter le contre-exemple dans §6), et nous allons légèrement modifier la

définition pour ne garder dans $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ que les seuls objets qui sont fibrants sur \mathcal{X} .

En conclusion, on préfère noter $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ la $n + 1$ -catégorie dont les objets sont les n -préchamps de Segal \mathcal{G} -fibrants sur le site \mathcal{X} . Si A_0, \dots, A_p sont de tels objets, alors on prend comme précédemment pour $nSeCHAMP(\mathcal{X})_{p/}(A_0, \dots, A_p)$ le produit de n -précats $\Gamma\underline{Hom}(A_0, A_1) \times \dots \times \Gamma\underline{Hom}(A_{p-1}, A_p)$.

Il convient de rappeler, pour comprendre cette définition, que $\Gamma\underline{Hom}(A, B)$ peut être défini comme le représentant du foncteur $nSePC \rightarrow Ens$

$$E \mapsto Hom_{nSePCh}(A \times \underline{E}, B),$$

où \underline{E} est le n -préchamp de Segal constant à valeurs E .

Il est immédiat que pour tout $X \in \mathcal{X}$, on a

$$nSe\underline{CHAMP}(\mathcal{X})(X) = nSeCHAMP(\mathcal{X}/X),$$

et ceci pourrait servir de définition de $nSe\underline{CHAMP}(\mathcal{X})$.

Enfin, on peut faire ici la même “remarque ensembliste” que plus haut (qui explique pourquoi on se permet de prendre des remplacements fibrants $nSe\underline{CHAMP}(\mathcal{X})'$).

Calcul avec la structure de type HBKQ

Nous indiquons ici comment utiliser la structure du théorème 5.1 pour calculer $\Gamma\underline{Hom}$ et \underline{Hom} (ce dernier dans le cas où \mathcal{X} admet des produits fibrés).

Lemme 11.5 *Si le site \mathcal{X} admet des produits directs, alors la cmf de type HBKQ de 5.1 est interne.*

Preuve: Il suffit de remarquer que le produit de deux additions libres de cellules au-dessus de X et de Y , est une addition libre au-dessus de $X \times Y$. \square

Remarque: Si on veut appliquer ce lemme sur les sites \mathcal{X}/X alors il faut que ceux-ci admettent des produits directs, i.e. que \mathcal{X} admet des produits fibrés.

Au vu de ce lemme, on pourrait, dans le cas où \mathcal{X} admet des produits directs, définir une version HBKQ de $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ et $nSe\underline{CHAMP}(\mathcal{X})$. On signale maintenant qu'on obtiendrait essentiellement les mêmes objets que plus haut.

On commencera par montrer une propriété valide même si \mathcal{X} n'admet pas tous les produits directs.

Soit E est une n -précat de Segal, et notons \underline{E} le n -préchamp de Segal constant sur \mathcal{X} de valeur E . Si $A \rightarrow A'$ est la cofibration engendrée librement par l'addition d'une cellule au-dessus de $X \in \mathcal{X}$ (i.e. engendrée par une cofibration de n -précats de Segal

$A(X) \rightarrow C$) alors $A \times \underline{E} \rightarrow A' \times \underline{E}$ est aussi engendrée librement par addition de la cellule $A(X) \times E \rightarrow C \times E$. Il s'ensuit (du fait que le produit direct avec \underline{E} préserve les compositions transfinies et les rétractions) que si

$$A \rightarrow A'$$

est une cofibration pour la structure de HBKQ, alors il en est de même de

$$A \times \underline{E} \rightarrow A' \times \underline{E}.$$

Soit maintenant A cofibrant et B fibrant pour la structure de HBKQ (Théorème 5.1). La n -précat de Segal $\Gamma \underline{Hom}(A, B)$ représente le foncteur $nSePC \rightarrow Ens$

$$E \mapsto Hom_{nSePCh}(A \times \underline{E}, B).$$

Le fait que les $A \times \underline{E}$ soient cofibrants (pour 5.1) implique que si $B \rightarrow B'$ est une équivalence entre deux n -préchamps de Segal fibrants pour 5.1, alors le morphisme induit

$$\Gamma \underline{Hom}(A, B) \rightarrow \Gamma \underline{Hom}(A, B')$$

est une équivalence de n -précats de Segal (les deux sont des n -précats de Segal fibrantes). En particulier on peut choisir B' fibrant par rapport à la structure du théorème 3.1, auquel cas on obtient la “bonne” n -catégorie de Segal des morphismes de A vers B . La conclusion est le lemme suivant, qui dit que A et B peuvent être utilisés pour calculer les n -catégories de Segal de morphismes dans $nSeCHAMP(\mathcal{X})$.

Notons avant d'énoncer le lemme, que B est fibrant pour la structure 5.1 si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{X}$, $B(X)$ est fibrant. Ceci est donc une condition ponctuelle (vérifiée par exemple par tout foncteur $\mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT$).

Lemme 11.6 *Soient A cofibrant et B fibrant pour la structure de HBKQ (Théorème 5.1). Soient A' et B' leurs remplacements fibrants pour la structure de 3.1. Alors il y a une équivalence de n -catégories de Segal*

$$nSeCHAMP(\mathcal{X})_{1/}(A', B') = \Gamma \underline{Hom}(A', B') \cong \Gamma \underline{Hom}(A, B).$$

□

Signalons qu'on peut calculer de la même façon les n -préchamps de Segal de morphismes dans $nSeCHAMP(\mathcal{X})$, à condition que \mathcal{X} admette des produits fibrés; grâce au lemme 11.5:

Lemme 11.7 *Supposons que le site \mathcal{X} admet des produits fibrés. Soient A cofibrant et B fibrant pour la structure de HBKQ (Théorème 5.1). Soient A' et B' leurs remplacements fibrants pour la structure de 3.1. Alors il y a une équivalence de n -catégories de Segal*

$$nSe\mathbf{CHAMP}(\mathcal{X})_{1/}(A', B') = \underline{Hom}(A', B') \cong \underline{Hom}(A, B).$$

□

Le lemme 11.6 nous aide à expliciter la notion de “donnée de descente”. Soit $X \in \mathcal{X}$ et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible couvrant X . Soit

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{B}}$$

le morphisme de n -préchamps de Segal (qui peuvent être considérés comme au-dessus de \mathcal{X}/X ou \mathcal{B}) construit au §5. Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} fibrant pour la structure 5.1, i.e. un préfaisceau sur \mathcal{X} à valeurs dans la catégorie $nSePC_f$ des n -catégories de Segal fibrantes. Soit $A \rightarrow A'$ un remplacement fibrant pour la structure de 3.1 pour la topologie grossière. Alors on a l'équivalence

$$\Gamma \underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, A'|_{\mathcal{B}}) \cong \Gamma \underline{Hom}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}).$$

En particulier en prenant $\tau_{\leq 0}$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 11.8 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} fibrant pour la structure 5.1, i.e. un préfaisceau sur \mathcal{X} à valeurs dans la catégorie $nSePC_f$ des n -catégories de Segal fibrantes. Soit $X \in \mathcal{X}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ un crible couvrant X , et soit*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \rightarrow *_{\mathcal{B}}$$

la “résolution” construite au §5. Alors l'ensemble “des données de descente”

$$[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}}$$

se calcule comme l'ensemble de morphismes (dans $nSePCh$) de $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ vers A , modulo la relation qui identifie deux morphismes s'ils sont liés par un morphisme $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \times \bar{I} \rightarrow A$.

Preuve: Soit $A \rightarrow A'$ un remplacement fibrant pour la structure de 3.1 pour \mathcal{X}^{gro} . L'ensemble des données de descente se calcule comme

$$[*_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}^{\text{gro}}} = \tau_{\leq 0} \Gamma \underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, A'|_{\mathcal{B}}).$$

Par l'équivalence ci-dessus ceci est isomorphe à

$$\tau_{\leq 0} \Gamma \underline{Hom}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}}).$$

Comme $\Gamma \underline{Hom}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}, A|_{\mathcal{B}})$ est une n -précat de Segal fibrante, sa troncation $\tau_{\leq 0}$ se calcule comme l'ensemble des objets modulo la relation qui identifie deux objets liés par un morphisme de source \bar{I} . □

Relation avec la structure simpliciale

D'après Dwyer-Kan [33], la "structure simpliciale" d'une catégorie de modèles fermée est bien définie à homotopie près, et on voudrait la comparer à la structure interne quand cette dernière existe. Il serait possible de formuler cette question en toute généralité mais par commodité (et du fait que cela suffit pour nos applications) nous allons seulement regarder le cas d'une catégorie de modèles fermée interne avec structure simpliciale compatible. On commence par la définition: si M est une catégorie de modèles fermée interne, une *structure simpliciale compatible* est un foncteur $R : \Delta \rightarrow M$ tel que la catégorie simpliciale M_* définie par

$$Hom_{M_k}(x, y) := Hom_M(R(k) \times x, y)$$

soit une catégorie de modèles simpliciale au sens de Quillen. On peut aussi écrire

$$Hom_{M_*}(x, y) = (k \mapsto Hom_M(R(k) \times x, y)).$$

Le foncteur R s'étend par passage aux limites finies en un foncteur (qu'on notera encore R) de la catégorie des ensembles simpliciaux n'ayant qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés vers M . Dans les notations introduites par Quillen pour la structure simpliciale, on a

$$K \otimes x = R(K) \times x,$$

et

$$Hom(K, y) = \underline{Hom}(R(K), y)$$

(\underline{Hom} est le Hom interne de M). On peut aussi prendre ces formules comme définition alternative de la structure simpliciale associée à R (ce point de vue correspond à la définition de catégorie de modèles simpliciale donnée par Goerss-Jardine [46]).

Si (M, R) est une catégorie de modèles fermée interne avec structure simpliciale compatible, on obtient un foncteur $\Xi : M \rightarrow EnsSpl$ de M vers les ensembles simpliciaux, en posant pour $x \in M$,

$$\Xi(x)_p := Hom_M(R(p), x),$$

ou en termes de foncteurs représentables,

$$Hom_{EnsSpl}(K, \Xi(x)) := Hom_M(R(K), x).$$

En d'autres termes $\Xi(x)$ est l'ensemble simplicial $Hom_{M_*}(*, x)$ où $*$ est l'objet final de M . Le foncteur Ξ est compatible aux produits directs. De ce fait, à partir d'une catégorie M -enrichie C , on peut fabriquer la catégorie $\Xi \circ C$ qui est enrichie sur les ensembles simpliciaux.

Lemme 11.9 *Soit (M, R) une catégorie de modèles fermée interne avec structure simpliciale compatible, et soit $INT(M_{cf})$ la catégorie M_f -enrichie construite plus haut. D'autre part, soit $M_{cf,*}$ la catégorie simpliciale des objets cofibrants et fibrants avec sa structure simpliciale déterminée par R . Alors on a un isomorphisme de catégories simpliciales*

$$M_{cf,*} = \Xi \circ INT(M_{cf}).$$

Par conséquent, si $L(M)$ est la localisée de Dwyer-Kan de M par rapport aux équivalences faibles, on a une équivalence de catégories simpliciales

$$L(M) \cong \Xi \circ INT(M_{cf}).$$

Preuve: Les objets de $M_{cf,*}$ et de $INT(M_{cf})$ sont les objets cofibrants et fibrants de M . Pour deux tels objets x, y , on a par définition

$$INT(M_{cf})_{1/}(x, y) := \underline{Hom}(x, y),$$

et donc

$$\begin{aligned} (\Xi \circ INT(M_{cf}))_{1/}(x, y) &:= \Xi(INT(M_{cf})_{1/}(x, y)) = (p \mapsto Hom(R(p), \underline{Hom}(x, y))) \\ &= (p \mapsto Hom(R(p) \times x, y)) = Hom_{M_{cf,*}}(x, y). \end{aligned}$$

Ceci donne l'isomorphisme souhaité. La deuxième partie est conséquence de l'équivalence $L(M) \cong M_{cf,*}$ voir [32]. \square

On va appliquer tout ceci aux n -catégories et n -champs de Segal. On vérifie facilement qu'on peut munir la catégorie de modèles fermée interne $nSePC$ des n -précats de Segal d'une structure simpliciale compatible en prenant pour $R(p)$ la catégorie $\bar{I}^{(p)}$ ayant $p+1$ objets $0', \dots, p'$ et un seul isomorphisme entre chaque paire d'objets. Soit $\Xi : nSePC \rightarrow EnsSpl$ le foncteur correspondant.

Lemme 11.10 *Si A est une n -catégorie de Segal fibrante (et automatiquement cofibrante) alors il y a une équivalence naturelle d'ensembles simpliciaux*

$$\Xi(A) \xrightarrow{\cong} A^{int,0}.$$

Preuve: On a un morphisme de n -précats de Segal

$$R\Xi(A) \rightarrow A.$$

En notant que $SeCat(R\Xi(A))$ est un n -groupeïde de Segal (comme colimite homotopique de n -groupeïdes de Segal), et en utilisant la notation $A^{int,0'}$ du §2, on obtient l'équivalence

$$R\Xi(A) \xrightarrow{\cong} SeCat(R\Xi(A))^{int,0'} \rightarrow A^{int,0'}$$

(il faut choisir une rétraction $SeCat(A) \rightarrow A$, ce qui est possible parce que A est fibrante). Le composé est le morphisme ci-dessus. Si \mathfrak{R} est la réalisation comme ensemble simplicial, on a par définition $A^{int,0} := \mathfrak{R}A^{int,0'}$, d'où un morphisme

$$\mathfrak{R}(R\Xi(A)) \rightarrow A^{int,0}.$$

Si on note $I^{(p)}$ la catégorie avec $p + 1$ objets $0', \dots, p'$ et un morphisme $i' \rightarrow j'$ pour tout $i \leq j$, alors l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{R}(I^{(p)}) = h(p)$$

est le p -simplexe standard, et l'inclusion $I^{(p)} \subset \bar{I}^{(p)}$ fournit donc un morphisme

$$h(p) \rightarrow \mathfrak{R}(R(p))$$

qui s'étend par passage aux colimites en un morphisme $K \rightarrow \mathfrak{R}(R(K))$ pour tout ensemble simplicial K . En particulier, on a un morphisme

$$\Xi(A) \rightarrow \mathfrak{R}(R\Xi(A)),$$

lequel composé avec le morphisme ci-dessus donne

$$\Xi(A) \rightarrow A^{int,0}.$$

Il nous faut que c'est une équivalence.

La construction Ξ respecte les équivalences entre objets fibrants. En utilisant l'égalité $\Xi(A) = \Xi(A^{int,0'})$, on peut—quitte à remplacer A par $A^{int,0'}$ —supposer que A est un n -groupeïde de Segal. Ce dernier correspond à un espace topologique d'après le travail de Tamsamani [98] (les techniques de Tamsamani s'appliquent directement au cadre “de Segal” car il travaille de fait dans ce cadre, et n'opère la troncation qu'à la fin de l'argument). On peut donc supposer qu'il existe un espace topologique Y avec $A = \Pi_{n,Se}(Y)$. On note que ce dernier est automatiquement fibrant. On a une équivalence faible d'espaces $|\mathfrak{R}(A)| \rightarrow Y$ (encore grâce à [98]). Par ailleurs, l'ensemble simplicial $\Xi(A)$ est une variante du “complexe singulier” de Y , correspondant au foncteur $\Delta \rightarrow Top$ qui à $p \in \Delta$ associe $\mathfrak{R}(R(p))$. Il s'ensuit que $|\Xi(A)| \rightarrow Y$ est une équivalence faible. On obtient que le morphisme d'espaces topologiques

$$|\Xi(A)| \rightarrow |\mathfrak{R}(A)|$$

est une équivalence faible, ce qui implique que

$$\Xi(A) \rightarrow \mathfrak{R}(A) = A^{int,0}$$

est une équivalence d'ensembles simpliciaux. □

Théorème 11.11 *Il y a une équivalence naturelle de 1-catégories de Segal*

$$nSeCAT^{int,1} \cong L(nSePC).$$

De plus, si \mathcal{X} est un site, il y a une équivalence naturelle (et fonctorielle en \mathcal{X})

$$nSeCHAMP(\mathcal{X})^{int,1} \cong L(nSePCh(\mathcal{X})).$$

Ici les $L()$ sont les localisées de Dwyer-Kan des catégories de modèles par rapport aux équivalences faibles.

Preuve: D'abord $nSeCAT^{int,1}$ s'obtient à partir de $nSeCAT$ en prenant l'intérieur $()^{int,0}$ des n -catégories de Segal $nSeCAT_{1/}(A, B)$ qui sont fibrantes. D'après le lemme 11.10, on obtient l'intérieur d'un objet en appliquant la construction Ξ . On a donc une équivalence

$$nSeCAT^{int,1} \cong \Xi \circ nSeCAT,$$

et le lemme 11.9 donne l'équivalence avec $L(nSePC)$.

Le foncteur $\underline{R} : \Delta \rightarrow nSePCh$ qui à p associe le préfaisceau constant de valeur $R(p) \in nSePC$, définit une structure simpliciale compatible sur la catégorie de modèles fermée interne $nSePCh$. Si on note $\Xi_{\underline{R}}$ la construction Ξ associée à cette structure (et Ξ_R celle associée à la structure R sur $nSePC$), on a, pour tout n -préchamp de Segal fibrant A ,

$$\Xi_{\underline{R}}(A) = \Xi_R(\Gamma(\mathcal{X}, A)).$$

Rappelons qu'on a posé

$$nSe\underline{CHAMP} := INT(nSePCh_{cf}),$$

et

$$nSeCHAMP_{1/}(A, B) := \Gamma(\mathcal{X}, nSe\underline{CHAMP}_{1/}(A, B)).$$

On obtient l'égalité

$$(\Xi_{\underline{R}} \circ nSe\underline{CHAMP})_{1/}(A, B) = (\Xi_R \circ nSeCHAMP)_{1/}(A, B),$$

autrement dit

$$\Xi_{\underline{R}} \circ INT(nSePCh_{cf}) = \Xi_{\underline{R}} \circ nSe\underline{CHAMP} = \Xi_R \circ nSeCHAMP.$$

Le lemme 11.9 donne alors l'équivalence

$$L(nSePCh) \cong \Xi_R \circ nSeCHAMP.$$

Comme pour la première partie du théorème, en utilisant que les $nSeCHAMP_{1/}(A, B)$ sont fibrants et en leur appliquant le lemme 11.10, on obtient l'équivalence

$$\Xi_R \circ nSeCHAMP \cong nSeCHAMP^{int,1}.$$

Ces deux équivalences donnent la deuxième partie du théorème. □

Le Hom interne relatif

On présente ici une extension souvent utile de la notion de Hom interne: il s'agit du Hom “fibre par fibre” pour un morphisme $f : A \rightarrow B$, qu'on notera $\underline{Hom}(A/B, C) \rightarrow B$. Il n'existera que sous certaines conditions sur le morphisme f .

Soit M une catégorie de préfaisceaux (i.e. on suppose qu'il existe une autre catégorie \mathcal{Y} telle que M soit équivalente à la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur \mathcal{Y}). Soient $A, B, C \in M$ avec une flèche $f : A \rightarrow B$. Posons, pour $E \in M$,

$$H(E) := \{E \rightarrow B, E \times_B A \rightarrow C\}.$$

Nous affirmons que ce foncteur est représenté par un objet $\underline{Hom}(A/B, C)$ de M . En effet, $H(-)$ transforme les colimites en limites, ce qui suffit pour garantir sa représentabilité.

Supposons de plus que M est une cmf interne. On dira qu'une fibration $f : A \rightarrow B$ est *compatible aux changements de base (ccb)* si, pour tout diagramme

$$B' \xrightarrow{a} B'' \rightarrow B$$

où a est une équivalence faible, on a que

$$A \times_B B' \rightarrow A \times_B B''$$

est aussi une équivalence faible. On note que si M est propre (e.g. pour $M = 0SePC$ ou $M = 0SePCh$) alors toute fibration est compatible aux changements de base—c'est la définition de “propre”.

Lemme 11.12 *Si*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

est un diagramme avec f et f' des fibrations et les flèches verticales des équivalences, alors:

- si f' est ccb alors f est ccb;
- si $B \rightarrow B'$ est une fibration et f est ccb alors f' est ccb; et
- si B et B' sont fibrants et f est ccb alors f' est ccb.

Preuve: Laisée au lecteur (dans le troisième cas on peut choisir deux fibrations $B \leftarrow B'' \rightarrow B'$ et appliquer le deuxième cas). □

La proposition suivante établit la relation entre la condition “ccb” et le Hom interne relatif: pour que ce dernier ait un sens homotopique il faut que le morphisme $f : A \rightarrow B$ soit ccb.

Proposition 11.13 *Soit M une cmf interne qui est une catégorie de préfaisceaux. On suppose en outre que $\text{cof} \subset M$ est la catégorie des injections des préfaisceaux. Soit $f : A \rightarrow B$ une fibration compatible aux changements de base. Alors le foncteur*

$$C \mapsto \underline{\text{Hom}}(A/B, C)$$

transforme fibrations en fibrations, en particulier si C est fibrant alors le morphisme structurel $\underline{\text{Hom}}(A/B, C) \rightarrow B$ est une fibration. Cette construction est—à équivalence près—invariante par équivalence en les variables A et C (ces invariances sont soumises à la condition que la flèche f reste une fibration ccb et que C reste fibrant). Si

$$\begin{array}{ccc} A' & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \rightarrow & B \end{array}$$

est un diagramme cartésien alors on a la formule

$$\underline{\text{Hom}}(A'/B', C) = \underline{\text{Hom}}(A/B, C) \times_B B'.$$

Si les flèches verticales sont des fibrations ccb et le morphisme $B \rightarrow B'$ est soit une fibration triviale soit une équivalence entre deux objets fibrants, alors le morphisme induit

$$\underline{\text{Hom}}(A'/B', C) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A/B, C)$$

est une équivalence.

Preuve: Soit $g : C' \rightarrow C$ une fibration; montrons que la flèche $\underline{\text{Hom}}(A/B, g)$ satisfait la propriété de relèvement pour une cofibration triviale $E \rightarrow E'$. Cette propriété revient à la propriété de relèvement pour g par rapport au morphisme

$$j : A \times_B E \rightarrow A \times_B E'.$$

Le fait que cof est compatible aux produits fibrés implique que j est une cofibration; et la propriété ccb pour f implique que j est une équivalence faible; d'où la propriété de relèvement voulue.

On note de la même façon que si $g : C' \rightarrow C$ est une fibration triviale alors g induit une fibration triviale $\underline{\text{Hom}}(A/B, g)$. Ceci implique l'invariance de la construction par équivalence en l'argument fibrant C (en effet toute équivalence entre dans un triangle—commutatif à une rétraction près—où les deux autres cotés sont des fibrations triviales).

Soit $A \xrightarrow{\cong} A' \rightarrow B$ un diagramme où les deux morphismes $f : A \rightarrow B$ et $f' : A' \rightarrow B$ sont des fibrations ccb. Dans ce cas, pour C fibrant, le morphisme

$$\underline{\text{Hom}}(A'/B, C) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A/B, C)$$

est une fibration triviale: pour une cofibration $E \rightarrow E'$ il s'agit de voir que

$$A \times_B E' \cup^{A \times_B E} A' \times_B E \rightarrow A' \times_B E'$$

est une cofibration triviale, ce qui est le cas grâce au fait que

$$A \times_B E \rightarrow A' \times_B E \quad \text{et} \quad A \times_B E' \rightarrow A' \times_B E'$$

sont des cofibrations triviales (pour cela on n'a pas besoin de la propriété ccb). Il s'ensuit que la formation de $\underline{Hom}(A/B, C)$ est invariante à équivalence près par équivalence en la variable A (à condition que f reste fibrant et ccb et que C soit fibrant).

Enfin, la formule en cas de changement de base $B \rightarrow B'$ est une conséquence immédiate de la définition du \underline{Hom} interne relatif comme foncteur représentable. Si le morphisme $B' \rightarrow B$ est une fibration triviale, le produit fibré avec celui-ci induit encore une fibration triviale. Si cette flèche est une équivalence entre objets fibrants on peut se réduire (en introduisant un B'' comme au début de la démonstration) au cas d'une fibration triviale, ce qui donne l'énoncé d'invariance par changement de B . \square

Question: Si $f : A \rightarrow B$ est ccb, en est-il de même pour $\underline{Hom}(A/B, C) \rightarrow B$?

Lemme 11.14 *Soit M une cmf comme dans la proposition ci-dessus. Soit $f : A \rightarrow B$ une fibration compatible aux changements de base et soit C un objet fibrant. Pour tout morphisme $B' \rightarrow B$, on a*

$$Sect(B', \underline{Hom}(A/B, C) \times_B B') = \underline{Hom}(A \times_B B', C).$$

Ici $Sect(U, V)$ désigne, pour un morphisme donné $V \rightarrow U$, la fibre de $\underline{Hom}(U, V)$ au-dessus de $1_U \in \underline{Hom}(U, U)$.

Preuve: Utiliser la propriété définissant $\underline{Hom}(A/B, C)$. Un morphisme

$$E \rightarrow Sect(B', \underline{Hom}(A/B, C) \times_B B')$$

est un morphisme $E \times B' \rightarrow \underline{Hom}(A/B, C)$ dont le composé vers B se factorise à travers B' . Ou encore un morphisme

$$E \times (B' \times_B A) = (E \times B') \times_B A \rightarrow C,$$

i.e. un morphisme $E \rightarrow \underline{Hom}(A \times_B B', C)$. \square

Si la réponse à la question précédente est affirmative, ou bien si B et B' sont fibrants, ou bien si toute fibration de base B est ccb (cf le lemme ci-dessous par exemple), alors la propriété universelle de ce lemme est aussi une propriété universelle homotopique car les

morphismes rentrent en jeu dans les produits fibrés sont fibrants, les produits fibrés en question sont invariants sous équivalence, et les sections sont prises le long d'un morphisme fibrant.

On applique maintenant cette discussion à nos exemples $M = nSePC$ et $M = nSePCh$. En fait il suffira de traiter l'exemple des n -préchamps de Segal $M = nSePCh$ car on récupère le cas des n -précats de Segal ($M = nSePC$) comme le cas "ponctuel" i.e. le cas où le site sous-jacent est $\mathcal{X} = *$.

On note d'abord que si $n = 0$ (i.e. dans le cas des préfaisceaux simpliciaux) alors M est propre et toute fibration f est ccb. Pour $n > 0$ on obtient que les objets qui sont essentiellement des 0-préchamps de Segal, i.e. les objets 0-groupiques ou n -groupoïdes de Segal, se comportent comme des préfaisceaux simpliciaux. On obtient en outre une petite amélioration, à savoir qu'il suffit que la base B soit 0-groupique.

Lemme 11.15 *Dans la cmf $M = nSePCh$ des n -préchamps de Segal 2.3, une fibration $f : A \rightarrow B$ de base B telle que chaque $B(X)$ soit une n -catégorie de Segal 0-groupique (i.e. un n -groupoïde de Segal), est compatible aux changements de base.*

Preuve: On peut supposer que B est fibrant (à cause de l'invariance par changement de A). Au vu de l'énoncé partiel de propriété 3.8, il suffit de voir la compatibilité aux changements de base de la forme

$$B' \rightarrow SeCat(B') \rightarrow B.$$

Pour cela il suffit de voir la compatibilité sous les mêmes changements de base au-dessus de chaque objet $X \in \mathcal{X}$. On est donc ramené au cas ponctuel $\mathcal{X} = *$. Rappelons que dans ce cas l'opération $SeCat$ peut être vue comme composée transfinie de coproduits avec des cofibrations standards notées $\Sigma \rightarrow h(M)$ dans [94] (ici $h(M)$ est la n -précat de Segal représenté par $M \in \Theta^{n+1}$). On peut donc réduire au cas d'un changement de base de la forme

$$\Sigma \rightarrow h(M) \rightarrow B.$$

Soit $\overline{h(M)}$ le "complété 0-groupique" de $h(M)$, obtenu par exemple en prenant le $\Pi_{n,Se}$ de la réalisation topologique de $h(M)$. Le fait que B soit 0-groupique et fibrant implique l'existence d'une factorisation de la forme

$$\Sigma \rightarrow h(M) \rightarrow \overline{h(M)} \rightarrow B.$$

On peut donc se réduire au cas $B = \overline{h(M)}$. Maintenant le morphisme $B \rightarrow *$ est une fibration triviale donc, si

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \rightarrow & * \end{array}$$

est une factorisation de $A \rightarrow *$ avec A' fibrant, la propriété ccb pour $A \rightarrow B$ est équivalente à cette propriété pour $A' \rightarrow *$. Or la propriété ccb pour $A' \rightarrow *$ résulte de la stabilité des équivalences faibles par produit direct, qui n'est autre que IM(d) pour $M = nSePC$ (on rappelle qu'on a fait référence, pour sa démonstration, à la même propriété pour les n -précats non de Segal, qui à son tour était l'une des étapes principales de [94]). \square

En conséquence de ce lemme, pour toute fibration $f : A \rightarrow B$ de n -préchamps de Segal avec B 0-groupique, et pour tout n -préchamp de Segal fibrant C , le morphisme

$$\underline{Hom}(A/B, C) \rightarrow B$$

est une fibration possédant la propriété 11.14 qui est une propriété universelle homotopique.

Le contre-exemple à la propriété donné dans [94] est le morphisme

$$a_{02} : A = I \rightarrow I^{(2)} = B$$

où B est la catégorie avec trois objets $0, 1, 2$ et des flèches $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, et a_{02} est l'inclusion de la flèche $0 \rightarrow 2$. Ce morphisme est une fibration mais n'est pas compatible aux changements de base. Cet exemple montre qu'il n'existe pas toujours un \underline{Hom} interne relatif de la forme $\underline{Hom}(A/B, C)$ satisfaisant à la propriété universelle homotopique voulue, est obstruée.

12. La famille universelle

Soit pour le moment \mathcal{X} une catégorie munie de la topologie grossière. On a un morphisme de $n + 1$ -préchamps

$$\Psi : nSeCHAMP(\mathcal{X}) \times \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT.$$

Ce morphisme peut être vu comme la *famille universelle* de n -catégories au-dessus de $nSeCHAMP(\mathcal{X}) \times \mathcal{X}$. On définit Ψ en posant

$$\Psi(A, X) := A(X);$$

et pour $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{X} on utilise le morphisme naturel

$$\Gamma \underline{Hom}(A, B) \times \{f\} \rightarrow \underline{Hom}(A(Y), B(X))$$

pour définir l'action de Ψ sur les morphismes. A gauche, il s'agit du Hom interne des n -préchamps de Segal; et, à droite, il s'agit du Hom interne des n -précats de Segal.

Soit $nSeCAT'$ le remplacement fibrant de $nSeCAT$. Par composition on obtient un morphisme

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}) \times \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT',$$

qui correspond, par définition du Hom interne (des $n+1$ -précats de Segal), à un morphisme

$$\Phi : nSeCHAMP(\mathcal{X}) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

Le résultat suivant fait le lien entre ces définitions et les notions de champs proposées dans [95].

Théorème 12.1 *Soit $nSeCAT'$ un remplacement fibrant de $nSeCAT$. Si la topologie de \mathcal{X} est grossière alors le morphisme Φ induit une équivalence entre $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ et la $n + 1$ -catégorie de Segal $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$.*

Si \mathcal{X} est muni d'une autre topologie \mathcal{G} alors Φ induit une équivalence entre $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ et la sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$ formée des morphismes $F : \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ qui satisfont à la condition de descente de [95] 6.3 à savoir que la flèche

$$\lim_{\leftarrow} F|_{\mathcal{X}/X} \rightarrow \lim_{\leftarrow} F|_{\mathcal{B}}$$

est une équivalence pour tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de \mathcal{G} .

Dans cette section (Proposition 12.2 ci-dessous) nous allons seulement démontrer que Φ est pleinement fidèle. La surjectivité essentielle de Φ dans le premier cas du théorème sera le théorème 18.5 plus bas. Le deuxième cas résultera alors (une fois admis le théorème 18.5) du Corollaire 14.4.

On note d'abord que si \mathcal{G} désigne la topologie de \mathcal{X} , alors les n -pré champs \mathcal{G} -fibrants sont en particulier fibrants pour la topologie grossière, tandis que la définition des morphismes dans $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$ ne fait pas intervenir \mathcal{G} . Donc $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$ est une sous-catégorie pleine de $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{gro})$ où \mathcal{X}^{gro} est la catégorie \mathcal{X} avec la topologie grossière. Ainsi la propriété que Φ soit pleinement fidèle se réduit au cas de la topologie grossière et nous pouvons ignorer la topologie \mathcal{G} pour le reste de cette section.

Pour insister sur le fait qu'on ne considère pas la topologie, on change la notation pour \mathcal{X} en \mathcal{Y} : on considère donc une catégorie \mathcal{Y} avec sa topologie grossière.

Rappelons que les objets de $nSeCHAMP(\mathcal{Y})$ sont les n -pré champs de Segal fibrants sur \mathcal{X} , et que si A et B sont deux tels objets, on a,

$$nSeCHAMP(\mathcal{Y})_{1/}(A, B) := \Gamma \underline{Hom}(A, B).$$

Cette n -précat de Segal fibrante représente le foncteur qui à une n -précat de Segal E associe l'ensemble $Hom(A \times \underline{E}, B)$. D'autre part si A est fibrant alors les valeurs $A(X)$ sont fibrantes, i.e. objets de $nSeCAT$. Le n -pré champ de Segal fibrant A induit donc un morphisme $\mathcal{Y}^o \rightarrow nSeCAT$ qu'on peut composer avec le remplacement fibrant pour obtenir un morphisme $\mathcal{Y}^o \rightarrow nSeCAT'$. Si E est une n -précat de Segal E , se donner un morphisme

$$E \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT')_{1/}(A, B)$$

revient à se donner un morphisme

$$F : \mathcal{Y}^o \times \Upsilon(E) \rightarrow nSeCAT'$$

avec

$$F|_{\mathcal{Y}^o \times \{0\}} = A, \quad F|_{\mathcal{Y}^o \times \{1\}} = B.$$

(Voir [95] pour la notation Υ .) Or, la donnée d'un tel morphisme strict (i.e. à valeurs dans $nSeCAT$ au lieu de $nSeCAT'$)

$$F : \mathcal{Y}^o \times \Upsilon(E) \rightarrow nSeCAT$$

avec

$$F|_{\mathcal{Y}^o \times \{0\}} = A, \quad F|_{\mathcal{Y}^o \times \{1\}} = B$$

revient à la donnée, pour tout $y \in \mathcal{Y}$, d'un morphisme $E \times A(y) \rightarrow B(y)$ telle que pour $y \rightarrow z$ dans \mathcal{Y} , ces morphismes soient strictement compatibles avec les restrictions dans A et B . Autrement dit, on obtient l'égalité

$$\underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT)_{1/}(A, B) = \Gamma \underline{Hom}(A, B).$$

Par suite l'inclusion $nSeCAT \rightarrow nSeCAT'$ induit un morphisme

$$\Gamma \underline{Hom}(A, B) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT')_{1/}(A, B),$$

et la pleine fidélité du foncteur Φ est équivalente à la proposition suivante.

Proposition 12.2 *Soient A et B deux n -préchamps de Segal fibrants sur \mathcal{Y} . Alors le morphisme*

$$\Gamma \underline{Hom}(A, B) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT')_{1/}(A, B).$$

est une équivalence de n -catégories de Segal.

Preuve: On introduit d'abord quelques notations. Soit Y une $n + 1$ -catégorie de Segal et E une n -précat de Segal. On définit la $n + 1$ -précat de Segal $Y^{\otimes E}$ qui a les mêmes objets que Y en posant (pour $p \geq 1$)

$$Y_{p/}^{\otimes E}(y_0, \dots, y_p) := Y_p(y_0, \dots, y_p) \times E.$$

On s'intéresse à cette construction surtout quand Y est notre 1-catégorie de base \mathcal{Y} , ou bien encore pour $Y = \mathcal{Y} \times I$.

Si $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ est une inclusion de 1-catégories ayant les mêmes objets, si C' est une $n + 1$ -catégorie fibrante, et si $A : \mathcal{Z} \rightarrow C'$ est un morphisme, on introduit la n -catégorie de Segal fibrante $Diag(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, A; C')$, dont les objets sont les prolongements de A à \mathcal{Y} , et qui est caractérisée par la formule

$$Hom_{nSePC}(E, Diag(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, A; C')) = \{f : \mathcal{Y}^{\otimes E} \rightarrow C', \quad f|_{\mathcal{Z}^{\otimes E}} = A|_{\mathcal{Z}^{\otimes E}}\}.$$

En effet, on vérifie que le membre de droite définit un foncteur en E qui transforme colimites en limites. Ce foncteur est donc représentable par une n -précat de Segal qu'on note $Diag(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, A; C')$. Comme C' est fibrante, notre foncteur a la propriété d'extension pour les cofibrations triviales $E \subset E'$, et donc $Diag(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, A; C')$ est fibrante.

Soient $\nu(\mathcal{Z}) \subset \nu(\mathcal{Y})$ et $\nu(C')$ les nerfs de ces 1- ou $n + 1$ -catégories de Segal, considérées comme n -préchamps de Segal au-dessus de Δ . On note que $\nu(C')$ est fibrant au-dessus de Δ . On peut vérifier que la n -catégorie de Segal $Diag(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, A; C')$ est la fibre du morphisme

$$\underline{Hom}(\nu(\mathcal{Y}), \nu(C')) \rightarrow \underline{Hom}(\nu(\mathcal{Z}), \nu(C'))$$

au-dessus de A . Il s'agit ici des \underline{Hom} internes de n -préchamps de Segal au-dessus de Δ .

Soient maintenant $A, B : \mathcal{Y} \rightarrow C'$ et notons $A \sqcup B$ le morphisme correspondant

$$A \sqcup B : \mathcal{Y} \times \{0, 1\} = \mathcal{Y} \sqcup \mathcal{Y} \rightarrow C'.$$

On a la formule

$$\underline{Hom}(\mathcal{Y}, C')_{1/}(A, B) = \text{Diag}(\mathcal{Y} \times I, \mathcal{Y} \times \{0, 1\}, A \sqcup B; C').$$

Pour prouver la pleine fidélité, nous allons appliquer cette formule avec $C' = n\text{SeCAT}'$.

On va d'abord modifier légèrement les choses. Dans la situation du paragraphe précédent, soit \mathcal{U} la catégorie dont les objets sont les paires de suites $(y_0, \dots, y_p; z_0, \dots, z_q)$ munies de morphismes $y_i \rightarrow y_{i+1}$, $z_i \rightarrow z_{i+1}$ et aussi $y_p \rightarrow z_0$; et où les morphismes sont les inclusions et les dégénérescences de suites. Autrement dit, \mathcal{U} est la *catégorie des simplexes de $\mathcal{Y} \times I$* qui ne sont ni dans $\mathcal{Y} \times \{0\}$ ni dans $\mathcal{Y} \times \{1\}$. Remarquons qu'on dispose d'un foncteur d'oubli

$$(y_0, \dots, y_p; z_0, \dots, z_q) \mapsto [\{0, \dots, p\}, \{0, \dots, q\}]$$

de \mathcal{U} vers $\Delta \times \Delta$. On peut définir un n -préchamp $F = F(A, B; C')$ sur \mathcal{U} en prenant pour $F(y_0, \dots, y_p, z_0, \dots, z_q)$ la fibre au-dessus de (f, g) du morphisme

$$\begin{aligned} C'_{p+q+1/}(A(y_0), \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q)) \rightarrow \\ C'_{p/}(A(y_0), \dots, A(y_p)) \times C'_{q/}(B(z_0), \dots, B(z_q)) \end{aligned}$$

où f (resp. g) est l'image de l'élément (y_0, \dots, y_p) (resp. (z_0, \dots, z_q)) du nerf de \mathcal{Y} par le morphisme A (resp. B).

Observons ici la propriété suivante:

(*) : pour tout (y_0, \dots, z_q) , le morphisme de restriction

$$F(y_0, \dots, y_p, z_0, \dots, z_q) \rightarrow F(y_p, z_0) = C'_{1/}(A(y_p), B(z_0))$$

correspondant à la flèche

$$(y_p; z_0) \rightarrow (y_0, \dots, y_p; z_0, \dots, z_q)$$

de \mathcal{U} , est une équivalence de n -catégories de Segal.

Pour le voir, il faut utiliser l'hypothèse que C' est fibrant, ce qui fait que le produit fibré dans la définition de F est aussi un produit fibré homotopique.

Nous allons finir la démonstration en cours en admettant que F est fibrant au-dessus de \mathcal{U} , et nous consacrerons la fin de la présente section à ce problème. Observons maintenant qu'on a

$$\text{Diag}(\mathcal{Y} \times I, \mathcal{Y} \times \{0, 1\}, A \sqcup B; C') = \Gamma(\mathcal{U}, F).$$

En effet, si E est une n -précat de Segal, la donnée d'un morphisme $E \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, F)$ est équivalente à la donnée, pour tout objet $(y_0, \dots, y_p, z_0, \dots, z_q)$ de \mathcal{U} , d'un morphisme

$$E \rightarrow C'_{p+q+1/}(A(y_0), \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q))$$

compatible aux restrictions et dégénérescences de suites, et compatible aux morphismes de transition de A et B sur les suites (y_0, \dots, y_p) et (z_0, \dots, z_q) . Une telle donnée est encore équivalente à celle d'un morphisme $(\mathcal{Y} \times I)^{\otimes E} \rightarrow C'$ compatible avec $A \sqcup B$, d'où la formule.

Soit $Arr(\mathcal{Y})$ la catégorie dont les objets sont les flèches $x \rightarrow y$ de \mathcal{Y} et dont les morphismes de $x \rightarrow y$ vers $x' \rightarrow y'$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & x' \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \leftarrow & y'. \end{array}$$

On a un foncteur $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow Arr(\mathcal{Y})$ défini par

$$\varphi : (y_0, \dots, y_p, z_0, \dots, z_q) \mapsto (y_p \rightarrow z_0).$$

On fixe dorénavant $C' = nSeCAT'$, et on supprime la référence à C' dans $Diag$. Par ailleurs on pose $F := F(A, B; nSeCAT')$, où A et B sont désormais des foncteurs stricts $\mathcal{Y} \rightarrow nSeCAT$, i.e. des n -préchamps de Segal sur \mathcal{Y}^o avec B fibrant en tant que n -préchamp sur \mathcal{Y}^o .

Soit $\overline{hom}(A, B)$ le n -préchamp sur $Arr(\mathcal{Y})$ qui à $y \rightarrow z$ associe la n -catégorie $\underline{Hom}(A(y), B(z))$ (compte-tenu de notre définition des morphismes de $Arr(\mathcal{Y})$) c'est bien un foncteur contravariant sur $Arr(\mathcal{Y})$. On a choisi la notation \overline{hom} pour suggérer qu'il s'agit là d'une sorte de "Hom externe".

Si on avait défini F avec $nSeCAT$ au lieu de $nSeCAT'$ on aurait eu

$$F(A, B, nSeCAT) = \varphi^*(\overline{hom}(A, B)).$$

Au lieu de cela, avec $F := F(A, B; nSeCAT')$ et l'inclusion $nSeCAT \rightarrow nSeCAT'$ on a un morphisme

$$\varphi^*(\overline{hom}(A, B)) \rightarrow F,$$

qui est, objet-par-objet au dessus de \mathcal{U} , une équivalence de n -catégories de Segal (grâce à l'équivalence $(*)$ vue plus haut). Par adjonction on obtient un morphisme

$$\overline{hom}(A, B) \rightarrow \varphi_*(F).$$

D'autre part on a les formules

$$\underline{Hom}(\mathcal{Y}, nSeCAT')_{1/}(A, B) = \Gamma(\mathcal{U}, F) = \Gamma(Arr(\mathcal{Y}), \varphi_*(F))$$

et

$$\Gamma \underline{Hom}(A, B) = \Gamma(Arr(\mathcal{Y}), \overline{hom}(A, B)),$$

qui induisent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \underline{Hom}(A, B) & = & \Gamma(Arr(\mathcal{Y}), \overline{hom}(A, B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Hom}(\mathcal{Y}, nSeCAT')_{1/}(A, B) & = & \Gamma(Arr(\mathcal{Y}), \varphi_*(F)). \end{array}$$

Pour obtenir la proposition i.e. que la flèche verticale de gauche est une équivalence, il suffit de montrer que la flèche verticale de droite en est une. Pour ceci, il suffirait (compte-tenu du fait que $\varphi_*(F)$ est fibrant sur $Arr(\mathcal{Y})$ cf §4) de montrer les deux choses suivantes:

- (i) le morphisme $\overline{hom}(A, B) \rightarrow \varphi_*(F)$ est une équivalence objet-par-objet sur $Arr(\mathcal{Y})$; et
- (ii) $\overline{hom}(A, B)$ est fibrant sur $Arr(\mathcal{Y})$.

En fait nous ne savons pas si (b) est vrai mais on va en montrer une variante plus faible:

- (ii)' pour tout A il existe une équivalence $A' \rightarrow A$ tel que $\overline{hom}(A', B)$ soit fibrant sur $Arr(\mathcal{Y})$.

Les conditions (i)+(ii)' suffisent pour prouver le résultat voulu. En effet, elles entraînent que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \underline{Hom}(A, B) & \rightarrow & \underline{Hom}(\mathcal{Y}, nSeCAT')_{1/}(A, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma \underline{Hom}(A', B) & \rightarrow & \underline{Hom}(\mathcal{Y}, nSeCAT')_{1/}(A', B) \end{array}$$

la flèche du bas est une équivalence; or on sait que les deux flèches verticales sont des équivalences et par conséquent il en est de même de la flèche du haut.

Pour prouver (i) fixons $\alpha : y \rightarrow z$ dans $Arr(\mathcal{Y})$ et notons φ/α la catégorie des (y_0, \dots, z_q) dans \mathcal{U} munis d'un morphisme de $(y_p \rightarrow z_0)$ vers α dans $Arr(\mathcal{Y})$. Par définition on a

$$\varphi_*(F)(\alpha) = \lim_{\leftarrow, (y, z) \in \varphi/\alpha} F(y, z).$$

Or on va voir que la catégorie φ/α s'obtient par le même procédé que \mathcal{U} mais avec d'autres arguments pour *Diag*. Soit \mathcal{Z} la catégorie qui contient la réunion disjointe de \mathcal{Y}/y et z/\mathcal{Y} et qui, en plus des flèches de ces catégories, a une flèche et une seule partant de chaque objet de \mathcal{Y}/y vers chaque objet de z/\mathcal{Y} . On a un morphisme de 1-précats de Segal

$$\mathcal{Y}/y \sqcup^{\{y\}} I \sqcup^{\{z\}} z/\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$$

et on peut vérifier que ce morphisme est une équivalence faible. En particulier on a la cofibration

$$\mathcal{Y}/y \sqcup z/\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Z},$$

et $A|_{\mathcal{Y}/y} \sqcup B|_{z/\mathcal{Z}}$ fournit un morphisme

$$\mathcal{Y}/y \sqcup z/\mathcal{Y} \rightarrow nSeCAT'.$$

Maintenant, par un argument analogue à celui donné plus haut pour \mathcal{U} , $Diag(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}/y \sqcup z/\mathcal{Y}, A|_{\mathcal{Y}/y} \sqcup B|_{z/\mathcal{Z}})$ est égale à $\Gamma(\varphi/\alpha, F|_{\varphi/\alpha})$. Par définition des limites, on a

$$\lim_{(y,z) \in \varphi/\alpha} F(y, z) = \Gamma(\varphi/\alpha, F|_{\varphi/\alpha}).$$

D'où l'égalité

$$\varphi_*(F)(\alpha) = Diag(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}/y \sqcup z/\mathcal{Y}, A|_{\mathcal{Y}/y} \sqcup B|_{z/\mathcal{Z}}).$$

Par ailleurs, l'équivalence faible

$$\mathcal{Y}/y \sqcup^{\{y\}} I \sqcup^{\{z\}} z/\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$$

nous donne

$$Diag(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}/y \sqcup z/\mathcal{Y}, A|_{\mathcal{Y}/y} \sqcup B|_{z/\mathcal{Z}}) \xrightarrow{\cong} Diag(I, \{0, 1\}, A(y) \sqcup B(z)).$$

Ce dernier terme s'identifie à $\overline{hom}(A, B)(\alpha)$ (de façon compatible avec les morphismes de source $\overline{hom}(A, B)(\alpha)$). Ceci prouve que le morphisme

$$\overline{hom}(A, B)(\alpha) \rightarrow \varphi_*(F)(\alpha)$$

est une équivalence de n -catégories de Segal, c'est-à-dire (i).

Pour prouver (ii)', on va montrer l'énoncé (ii)" le foncteur

$$A \mapsto \overline{hom}(A, B)$$

transforme les cofibrations de la structure de type HBKQ, en fibrations.

Avec ce résultat, pour A quelconque, on pourra choisir un remplacement HBKQ-cofibrant $A' \rightarrow A$, et $\overline{hom}(A', B)$ sera fibrant ce qui donne (ii)'. Pour montrer (ii)" il suffit de considérer une cellule élémentaire, i.e. une cofibration de la forme

$$h(X) \times N \rightarrow h(X) \times N'$$

où $N \rightarrow N'$ est une cofibration de n -précats de Segal, et où $h(X)$ est le foncteur représenté par X à savoir $h(X)(Y) = \{X \rightarrow Y\}$. On doit montrer que

$$\overline{hom}(h(X) \times N', B) \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N, B)$$

est une fibration de n -préchamps de Segal au-dessus de $Arr(\mathcal{Y})$. Autrement dit, on doit montrer que si $U \rightarrow U'$ est une cofibration triviale de n -préchamps de Segal au-dessus de $Arr(\mathcal{Y})$, et si on a des morphismes

$$U \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N', B)$$

et

$$U' \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N, B)$$

qui donnent le même morphisme $U \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N, B)$, alors ces morphismes se factorisent à travers un même relèvement: $U' \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N', B)$.

De façon générale, un morphisme $U \rightarrow \overline{hom}(A, B)$ est la donnée, pour tout objet $x \rightarrow y$ de $Arr(\mathcal{Y})$, d'un morphisme

$$U(x \rightarrow y) \times A(x) \rightarrow B(y),$$

telle que, pour tout morphisme $(x \rightarrow y) \rightarrow (x' \rightarrow y')$ de $Arr(\mathcal{Y})$ (cf ci-dessus), les deux morphismes induits

$$U(x' \rightarrow y') \times A(x) \rightarrow B(y),$$

soient égaux.

Notons $U(X \rightarrow ?)$ le n -préchamp de Segal image inverse de U par le morphisme $(X/\mathcal{Y})^\circ \rightarrow Arr(\mathcal{Y})$; c'est un n -préchamp de Segal sur $(X/\mathcal{Y})^\circ$. Il ressort de la description du paragraphe précédent qu'un morphisme

$$U \rightarrow \overline{hom}(h(X) \times N, B)$$

n'est rien d'autre qu'un morphisme de n -préchamps de Segal sur $(X/\mathcal{Y})^\circ$

$$U(X \rightarrow ?) \times N \rightarrow B|_{(X/\mathcal{Y})^\circ}.$$

Notre problème devient donc: étant donnés deux morphismes

$$U(X \rightarrow ?) \times N' \rightarrow B|_{(X/\mathcal{Y})^\circ}$$

et

$$U'(X \rightarrow ?) \times N \rightarrow B|_{(X/\mathcal{Y})^\circ}$$

qui coïncident sur $U(X \rightarrow ?) \times N$, admettent-ils un relèvement commun à $U'(X \rightarrow ?) \times N'$?

Le fait que B soit fibrant sur \mathcal{Y}° implique que $B|_{(X/\mathcal{Y})^\circ}$ est fibrant (grâce à l'égalité $(X/\mathcal{Y})^\circ = \mathcal{Y}^\circ/X$ et au corollaire 4.2). Étant donnée une cofibration quelconque $N \rightarrow N'$ et une cofibration triviale $U \rightarrow U'$, le morphisme associé $U(X \rightarrow ?) \rightarrow U'(X \rightarrow ?)$ est aussi une cofibration triviale et on obtient une cofibration triviale

$$U(X \rightarrow ?) \times N' \cup^{U(X \rightarrow ?) \times N} U'(X \rightarrow ?) \times N \rightarrow U'(X \rightarrow ?) \times N',$$

ce qui (du fait que $B|_{(X/\mathcal{Y})^\circ}$ est fibrant) donne la propriété de relèvement voulue. \square

Analyse de $F(A, B; C')$ sur \mathcal{U}

Dans la démonstration ci-dessus on a laissé de côté le problème de montrer que $F(A, B; C')$ est fibrant sur \mathcal{U} , que nous traitons maintenant. Pour cela nous utilisons la notion de *catégories de Reedy* pour laquelle nous ne donnerons (au §17) qu’une présentation très brève: le lecteur devra donc se reporter aux références (Reedy [86], Bousfield-Kan [15] p. 274, Dwyer-Kan [33], Jardine-Goerss [46], Dwyer-Hirschhorn-Kan [30], Hirschhorn [59] Chapter 16). On ne donne ci-dessous qu’un argument rapide et cette section s’adresse donc plutôt au lecteur intrépide qui connaît déjà ces références.

La catégorie \mathcal{U} est une catégorie de Reedy pour le degré défini par

$$\text{deg}(y_0, \dots, y_p; z_0, \dots, z_q) := p + q;$$

les morphismes “directs” sont les applications “faces” qui correspondent à des inclusions de suites, et les morphismes “inverses” sont les morphismes de dégénérescence qui correspondent à des surjections dans $\Delta \times \Delta$. La catégorie opposé \mathcal{U}^o est une catégorie de Reedy avec la même fonction de degré: l’opposé d’un morphisme direct est inverse et vice-versa.

En particulier, pour toute cmf M la catégorie $M^{\mathcal{U}^o}$ des préfaisceaux d’objets de M au-dessus de \mathcal{U} , admet une structure de cmf qu’on appelle “structure de Reedy”, voir [59]. La catégorie de Reedy \mathcal{U} (c’est essentiellement l’exemple 16.1.10 de [59]) a la propriété suivante, analogue d’une propriété de Δ (voir [59] Corollary 16.4.7): tout préfaisceau d’ensembles est cofibrant pour la structure de Reedy, et en fait toute injection de préfaisceaux d’ensembles sur \mathcal{U} est une cofibration de Reedy (on laisse la démonstration au lecteur). Il s’ensuit la même propriété pour les \mathcal{U} -diagrammes dans M si M est une cmf de préfaisceaux d’ensembles dont les cofibrations sont les injections. Tel est en particulier le cas pour $M = nSePC$.¹⁷

La catégorie sous-jacente à la cmf de Reedy $nSePC^{\mathcal{U}}$ est exactement $nSePCh(\mathcal{U})$; et les équivalences faibles (objet-par-objet) sont les mêmes. La propriété énoncée au paragraphe précédent dit que les cofibrations sont les mêmes; donc ([83]) les fibrations sont les mêmes et en fait *la structure de Reedy sur $nSePC^{\mathcal{U}}$ s’identifie à la structure de cmf de 3.1 sur $nSePCh(\mathcal{U})$* .

En particulier, pour vérifier que $F = F(A, B; C')$ est fibrant dans $nSePCh(\mathcal{U})$ il suffit de vérifier que F est fibrant pour la structure de Reedy. Rappelons ce que cela veut dire ([59] Definition 16.3.2 (3)). Pour un objet $(y, z) = (y_0, \dots, y_p; z_0, \dots, z_q)$ de \mathcal{U} , on fabrique un (gigantesque) produit fibré dont les termes principaux (correspondant à des

¹⁷On pourrait aussi s’intéresser à la cmf nPC des n -précats non de Segal, définie dans [94]. Dans ce cas, les cofibrations sont les morphismes qui sont injectifs sur les objets de Θ^n de longueur non-maximale; donc notre remarque s’applique et tout morphisme de \mathcal{U} -diagrammes dans nPC qui est une cofibration objet-par-objet est une cofibration de Reedy.

sous-suites de (y, z) de longueur $p + q - 1$ sont les

$$C'_{p+q-1/}(A(y_0), \dots, \widehat{A(y_i)}, \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q))$$

et

$$C'_{p+q-1/}(A(y_0), \dots, \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, \widehat{B(z_j)}, \dots, B(z_q)),$$

qu'on multiplie entre eux au-dessus des produits fibrés analogues pour les sous-suites de longueur $p + q - 2$ (plus précisément, l'objet en question s'exprime comme une limite sur la "catégorie appariante" ("matching category") de $(y, z) \in \mathcal{U}$). Notons $Match((y, z); C')$ cette (gigantesque) n -précat de Segal. On a un morphisme naturel

$$C'_{p+q/}(A(y_0), \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q)) \rightarrow Match((y, z); C').$$

Dire que l'objet qui nous intéresse, à savoir

$$(y, z) \mapsto C'_{p+q/}(A(y_0), \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q)),$$

est fibrant pour la structure de Reedy, revient exactement à dire que le morphisme précédent est une fibration.

Notons O l'ensemble des objets de C' et ΔO la catégorie des suites d'objets dans O , i.e. des (x_0, \dots, x_k) avec $x_i \in O$ (c'est la catégorie des simplexes de la catégorie ayant O pour ensemble d'objets et un isomorphisme entre chaque paire d'objets). L'application

$$\nu_O(C') : (x_0, \dots, x_k) \mapsto C'_{k/}(x_0, \dots, x_k)$$

définit un n -préchamp de Segal au-dessus de ΔO et il est facile de voir que si C' est fibrante, alors $\nu_O(C')$ est fibrant. D'autre part ΔO est aussi une catégorie de Reedy et (comme pour \mathcal{U}) la structure de Reedy coïncide avec la structure de 3.1 sur $nSePCh(\Delta O)$. Donc $\nu_O(C')$ est fibrant pour la structure de Reedy. L'objet $Match((y, z); C')$ est essentiellement le même que l'objet appariant pour $\nu_O(C')$ (du moins si $p > 0$ et $q > 0$ —si $p = 0$ ou $q = 0$ il y a une face manquante tandis que si $p = q = 0$ tout est trivial), donc le fait que $\nu_O(C')$ soit fibrant implique que le morphisme

$$C'_{p+q/}(A(y_0), \dots, A(y_p), B(z_0), \dots, B(z_q)) \rightarrow Match((y, z); C')$$

est fibrant.

Rappelons que F est défini par le diagramme cartésien suivant (où les notations sont abrégées):

$$\begin{array}{ccc} F(y, z) & \rightarrow & C'_{p+q/}(Ay, Bz) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \rightarrow & C'_{p/}(Ay) \times C'_{q/}(Bz). \end{array}$$

Pour montrer que F est fibrant il nous faut voir que le morphisme de n -préchamps de Segal au-dessus de \mathcal{U}

$$C'_{p+q/}(Ay, Bz) \rightarrow C'_{p/}(Ay) \times C'_{q/}(Bz)$$

est une fibration de Reedy; pour cela il convient de remplacer l'objet appariant

$$Match((y, z); C')$$

ci-dessus, par *l'objet appariant relatif* ("relative matching object") ([59] Definition 16.2.22) qu'on notera (à défaut d'une meilleure notation)

$$Match((y, z); C'(Ay, Bz) \rightarrow C'(Ay) \times C'(Bz)).$$

On renvoie le lecteur à [59] Definition 16.2.22 pour la définition que nous n'écrivons pas plus explicitement (ce serait trop long). On remarque seulement que l'application appariante relative

$$C'(Ay, Bz) \rightarrow Match((y, z); C'(Ay, Bz) \rightarrow C'(Ay) \times C'(Bz))$$

est identique à l'application

$$C'(Ay, Bz) \rightarrow Match((y, z); C')$$

pour $p > 0$ et $q > 0$; tandis que pour $p = 0$ ou $q = 0$, dans l'objet appariant relatif on retrouve exactement la face manquante ci-dessus et l'application

$$C'(Ay, Bz) \rightarrow Match((y, z); C'(Ay, Bz) \rightarrow C'(Ay) \times C'(Bz))$$

est égale à l'application appariante en (Ay, Bz) pour $\nu_O(C')$ sur ΔO . Dans tous les cas on obtient que l'application appariante relative pour $C'(Ay, Bz) \rightarrow C'(Ay) \times C'(Bz)$ est une fibration. Ceci prouve que ce morphisme est une fibration pour la structure de Reedy, donc une fibration pour la structure 3.1 sur $nSePCh(\mathcal{U})$, et donc que sa fibre F est un objet fibrant.

13. Le champ associé à un préchamp

La construction du faisceau associé à un préfaisceau joue un rôle central dans la théorie des faisceaux. Le faisceau associé est défini par une propriété universelle. On commence par faire la même chose pour le champ associé à un préchamp. Il faut se rappeler, en lisant cette section, que l'analogie de la distinction faisceau/préfaisceau, est la distinction entre les n -champs de Segal pour la topologie \mathcal{G} , et les n -champs de Segal pour la topologie grossière. Ces derniers sont simplement les préfaisceaux de n -catégories de Segal (la seule des conditions du §9 qui entre en jeu pour la topologie grossière est la condition que chaque fibre soit une n -catégorie).

Lemme 13.1 *Soit A un n -préchamp de Segal et $A \rightarrow A'$ un choix de champ associé. Si B est un n -préchamp de Segal \mathcal{G} -fibrant, alors le morphisme*

$$\underline{Hom}(A', B) \rightarrow \underline{Hom}(A, B)$$

est une équivalence.

Preuve: Cela résulte de la proposition 11.1 pour la catégorie de modèles interne $nSePSh(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$, puisque $A \rightarrow A'$ est une \mathcal{G} -équivalence faible (par définition). \square

On rappelle que les objets de $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})$ sont les n -champs de Segal fibrants pour la topologie grossière, et que

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}) \subset nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})$$

est la sous-catégorie enrichie pleine des objets qui sont \mathcal{G} -fibrants, qui est (par 9.2) aussi la sous-catégorie enrichie pleine des objets qui sont des champs. Dans ce contexte, si $A \in nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})_0$ est un objet, un *champ associé* à A est un remplacement \mathcal{G} -fibrant $A \rightarrow A'$ (on exige donc que A' soit \mathcal{G} -fibrant, et non pas seulement un champ, car on veut que A' soit dans la sous-catégorie ci-dessus). Autrement dit, un tel champ associé est un morphisme de A vers A' dans $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})$, i.e. un objet de la n -catégorie de Segal $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})_{1/}(A, A')$. Dans ce cadre on a la propriété universelle suivante:

Lemme 13.2 *Soit $u : A \rightarrow A'$ un champ associé au sens du paragraphe précédent. Pour tout $B \in nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$, la composition avec u induit une équivalence*

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})_{1/}(A', B) \xrightarrow{\cong} nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})_{1/}(A, B).$$

Preuve: Au vu des définitions des catégories nPC -enrichies $nSeCHAMP(\dots)$ et de l'égalité

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})_{1/}(A', B) = nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})_{1/}(A', B),$$

c'est une simple transcription du lemme 13.1. \square

Considérons maintenant des familles faibles de n -catégories de Segal au-dessus de \mathcal{X}^o , qu'on voit comme morphismes $\mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ ou comme objets de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$. Rappelons qu'on a l'équivalence du théorème 12.1

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}}) \cong \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

Si $F : \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ on appellera *champ associé* à F tout couple (F^{ch}, f) où $F^{\text{ch}} : \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ est un champ i.e. satisfait la condition du deuxième paragraphe de 12.1, et où $f : F \rightarrow F^{\text{ch}}$ est, dans la $n + 1$ -catégorie de Segal $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$, un 1-morphisme équivalent, via l'équivalence de 12.1 rappelée ci-dessus, à une \mathcal{G} -équivalence faible $A \rightarrow A'$. Dans ces conditions F est équivalent à A et F^{ch} équivalent à A' (en tant qu'objets de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$). En outre $A \rightarrow A'$ est un "champ associé" au sens du paragraphe précédent. Ceci nous permet, à partir de 13.2, de démontrer la propriété universelle du lemme suivant.

Avant de l'énoncer, rappelons qu'un 1-morphisme f de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')$ est un morphisme

$$I = \Upsilon(*) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT'),$$

autrement dit, un morphisme

$$f : I \times \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'.$$

Sa source est la restriction $f|_{\{0\} \times \mathcal{X}^o}$ et son but est la restriction $f|_{\{1\} \times \mathcal{X}^o}$. Si f est un morphisme de source F et but F^{ch} et si $G : \mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ est une autre famille, on peut construire un morphisme "composition avec f " essentiellement bien défini

$$- \circ f : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F^{\text{ch}}, G) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, G).$$

Pour en donner une définition précise, on note

$$\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch}}, G; f)$$

la fibre de

$$r_{01} : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch}}, G) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, F^{\text{ch}})$$

au-dessus de f ; cette fibre vient avec deux morphismes (le premier desquels est une équivalence)

$$r_{12} : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch}}, G; f) \xrightarrow{\cong} \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F^{\text{ch}}, G)$$

et

$$r_{02} : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch}}, G; f) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, G).$$

On obtient le morphisme $- \circ f$ en choisissant un inverse de r_{12} à équivalence près (ceci est possible car toutes les n -catégories de Segal considérées sont fibrantes) et en le composant avec r_{02} .

Lemme 13.3 *Soit $F \in \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_0$ et soit (F^{ch}, f) un champ associé au sens précédemment défini. Alors pour tout champ G , i.e. objet de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_0$ vérifiant la propriété du deuxième paragraphe de 12.1, le morphisme “composition avec f ” défini ci-dessus est une équivalence de n -catégories de Segal*

$$- \circ f : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F^{\text{ch}}, G) \xrightarrow{\cong} \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, G).$$

Preuve: Par définition, f est équivalent à un morphisme $u : A \rightarrow A'$ dans la $n + 1$ -catégorie de Segal $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})$ qui est un champ associé pour la topologie \mathcal{G} , i.e. une \mathcal{G} -équivalence faible vers un objet \mathcal{G} -fibrant. On peut aussi supposer par 12.1 que G provient d'un objet de $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$. Le morphisme “composition avec f ” est alors équivalent via l'équivalence de 12.1

$$\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT') \cong nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}}),$$

au morphisme “composition avec u ” (ce dernier étant bien défini car $nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}})$ est une catégorie enrichie sur $nSeCat$). Le lemme 13.2 permet de conclure. \square

Si $(F^{\text{ch},1}, f^1)$ et $(F^{\text{ch},2}, f^2)$ sont deux champs associés à F , soit

$$\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch},1}, F^{\text{ch},2}; f^1, f^2) := (r_{01}, r_{02})^{-1}(f^1, f^2)$$

la fibre de

$$(r_{01}, r_{02}) : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F, F^{\text{ch},1}, F^{\text{ch},2}) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, F^{\text{ch},1}) \times \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F, F^{\text{ch},2})$$

au-dessus de (f^1, f^2) . On voit grâce au lemme 13.3 que cette fibre $(r_{01}, r_{02})^{-1}(f^1, f^2)$ est contractile i.e. équivalente (en tant que n -catégorie de Segal) à $*$. Pour cela il faut observer que le morphisme (r_{01}, r_{02}) est une fibration de n -précats de Segal. On obtient donc un morphisme essentiellement bien défini entre $(F^{\text{ch},1}, f^1)$ et $(F^{\text{ch},2}, f^2)$. On peut montrer la

même chose dans l’autre sens (et aussi la même chose pour les diagrammes de dimension deux entre $F^{\text{ch},1}$, $F^{\text{ch},2}$, $F^{\text{ch},1}$ ou $F^{\text{ch},2}$, $F^{\text{ch},1}$, $F^{\text{ch},2}$) ce qui montre que le morphisme qu’on a construit est une équivalence. Ceci donne l’unicité essentielle du “champ associé à F ”.

On veut maintenant recoller ces champs associés en un foncteur “faible”

$$n\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\text{gro}}) \rightarrow n\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}),$$

autrement dit un foncteur vers le remplacement fibrant $n\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})'$. En fait, on va construire un diagramme

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{X}^o, n\text{SeCAT}') \leftarrow C \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{X}^o, n\text{SeCAT}'),$$

où le premier morphisme est une équivalence, et le deuxième prend ses valeurs dans la sous- $n + 1$ -catégorie de Segal pleine des champs. Ceci donnera (par 12.1 et les arguments habituels) un vrai morphisme, essentiellement bien défini, vers le remplacement fibrant voulu. On va utiliser librement les notations *Diag* cf §12, et Υ^k cf [95].

On définit C de la façon suivante. Les objets de C sont les objets de $n\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\text{gro}})$, i.e. les n -préchamps de Segal fibrants pour la topologie grossière. On choisit pour chaque objet $F \in C_0$ un morphisme $\eta_F : F \rightarrow F'$ vers un remplacement \mathcal{G} -fibrant. Ensuite si F_0, \dots, F_p sont des objets, on définit (avec les notations du §12)

$$C_{p/}(F_0, \dots, F_p) := \text{Diag}(\mathcal{X}^o \times I^{(k)} \times I, \mathcal{X}^o \times \{0, \dots, p\} \times I; \eta_{F_0} \sqcup \dots \sqcup \eta_{F_p}; n\text{SeCAT}').$$

C’est la n -catégorie de Segal des diagrammes dans $n\text{SeCAT}'$ qui ont la forme d’un rectangle $p \times 1$, se restreignant à $\{i\} \times I$, pour tout i , en le morphisme $\eta_{F_i} : F_i \rightarrow F'_i$ vu comme morphisme $I \rightarrow n\text{SeCAT}'$.

En divisant—à cofibration triviale près—le rectangle en coproduit de carrés 1×1 et en utilisant le fait que $n\text{SeCAT}'$ est fibrante, on obtient que l’application de Segal

$$C_{p/}(F_0, \dots, F_p) \rightarrow C_{1/}(F_0, F_1) \times \dots \times C_{1/}(F_{p-1}, F_p)$$

est une équivalence; donc C est une $n + 1$ -catégorie de Segal. Ensuite, en divisant un carré 1×1 en deux triangles, on voit qu’un morphisme

$$E \rightarrow \text{Diag}(\mathcal{X}^o \times I \times I, \mathcal{X}^o \times \{0, 1\} \times I; \eta_{F_0} \sqcup \eta_{F_1}; n\text{SeCAT}')$$

n’est rien d’autre qu’une paire de morphismes

$$u : \mathcal{X}^o \times \Upsilon^2(*, E) \rightarrow n\text{SeCAT}', \quad v : \mathcal{X}^o \times \Upsilon^2(E, *) \rightarrow n\text{SeCAT}',$$

avec

$$r_{01}(u) = \eta_{F_0}, \quad r_{12}(v) = \eta_{F_1}, \quad r_{02}(u) = r_{02}(v).$$

Si on note par exemple $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F'_0, F'_1; \eta_{F_0}, -)$ la fibre de

$$r_{01} : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F'_0, F'_1) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F_0, F'_0)$$

au-dessus de η_{F_0} , alors on obtient

$$\begin{aligned} & \text{Diag}(\mathcal{X}^o \times I \times I, \mathcal{X}^o \times \{0, 1\} \times I; \eta_{F_0} \sqcup \eta_{F_1}; nSeCAT') = \\ & \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F'_0, F'_1; \eta_{F_0}, -) \times \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F_0, F'_1) \\ & \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F_1, F'_1; -, \eta_{F_1}). \end{aligned}$$

La propriété universelle pour le morphisme η_{F_0} , et le fait que F'_1 soit \mathcal{G} -fibrant (i.e. un champ), impliquent que le morphisme

$$u \mapsto r_{02}(u)$$

est une fibration triviale de n -précats de Segal,

$$r_{02} : \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F'_0, F'_1; \eta_{F_0}, -) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F_0, F'_1).$$

D'autre part, le fait que

$$\Upsilon(E) \sqcup^{\{1\}} \Upsilon(*) \rightarrow \Upsilon^2(E, *)$$

soit une cofibration triviale implique que le morphisme

$$\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{2/}(F_0, F_1, F'_1; -, \eta_{F_1}) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F_0, F_1)$$

est une équivalence. On obtient que le morphisme

$$\begin{aligned} C_{1/}(F_0, F_1) &= \text{Diag}(\mathcal{X}^o \times I \times I, \mathcal{X}^o \times \{0, 1\} \times I; \eta_{F_0} \sqcup \eta_{F_1}; nSeCAT') \\ &\rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{1/}(F_0, F_1) \end{aligned}$$

est une équivalence.

La restriction des diagrammes de $I^{(p)} \times I$ sur $I^{(p)} \times \{0\}$ fournit un morphisme

$$C_{p/}(F_0, \dots, F_p) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{p/}(F_0, \dots, F_p),$$

donc un morphisme de $n + 1$ -catégories de Segal

$$R_0 : C \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

On a montré que ce morphisme est pleinement fidèle; et il est essentiellement surjectif par construction grâce à 12.1.

D'autre part, la restriction des diagrammes de $I^{(p)} \times I$ sur $I^{(p)} \times \{1\}$ fournit un morphisme

$$C_{p/}(F_0, \dots, F_p) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{p/}(F_0, \dots, F_p),$$

d'où un morphisme

$$R_1 : C \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

Ces deux morphismes forment le diagramme cherché:

$$\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT') \xleftarrow{R_0} C \xrightarrow{R_1} \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

Observons qu'on a $R_0(F) = F$ et $R_1(F) = F'$. On dira que ce diagramme est le "foncteur champ associé", encore noté **ch** et on écrira aussi $F' = \mathbf{ch}(F)$.

Il reste maintenant à construire une transformation naturelle entre l'identité et le foncteur qu'on a construit ci-dessus. Ce doit être un diagramme

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{gro}) \xleftarrow{T_0} C \times I \xrightarrow{T_1} nSeCHAMP(\mathcal{X}^{gro}).$$

On prend $T_0 := R_0 \circ pr_1$ et on veut construire un morphisme T_1 qui donne R_0 sur $C \times \{0\}$ et R_1 sur $C \times \{1\}$. Pour cela, rappelons que les objets de $C \times I$ sont les couples (F, ϵ) où F est un objet de C et ϵ est 0 ou 1. On observe que

$$(C \times I)_{p/}((F_0, \epsilon_0), \dots, (F_p, \epsilon_p))$$

est vide sauf si $\epsilon_0, \dots, \epsilon_p$ est une suite non-décroissante, auquel cas, c'est tout simplement $C_{p/}(F_0, \dots, F_p)$. A toute suite non-décroissante $\epsilon_0, \dots, \epsilon_p$ on associe le morphisme

$$i_\epsilon : I^{(p)} \rightarrow I^{(p)} \times I$$

défini par $i_\epsilon(k) := (k, \epsilon_k)$.

L'image inverse par ce morphisme fournit donc pour chaque suite ϵ un morphisme

$$i_\epsilon^* : C_{p/}(F_0, \dots, F_p) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{p/}(F_0^{(\epsilon_0)}, \dots, F_p^{(\epsilon_p)}).$$

Ici $F^{(0)}$ et $F^{(1)}$ désignent respectivement F et F' .

Pour $\epsilon = (0, \dots, 0)$, on retrouve le morphisme de restriction qu'on a utilisé pour définir R_0 , tandis que pour $\epsilon = (1, \dots, 1)$ on retrouve celui qu'on a utilisé pour définir R_1 . Pour toute suite d'objets $(F_0, \epsilon_0), \dots, (F_p, \epsilon_p)$ on définit à l'aide de i_ϵ^* le morphisme

$$(C \times I)_{p/}((F_0, \epsilon_0), \dots, (F_p, \epsilon_p)) \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT')_{p/}(F_0^{(\epsilon_0)}, \dots, F_p^{(\epsilon_p)});$$

ce qui permet de définir le morphisme cherché

$$T_1 : C \times I \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nSeCAT').$$

On peut vérifier que $T_1|_{\{F\} \times I}$ est bien le morphisme $F \rightarrow F'$. Le diagramme (T_0, T_1) constitue donc bien une transformation naturelle

$$1 \rightarrow \mathbf{ch}$$

entre un préchamp et son champ associé.

Théorème 13.4 *Avec cette transformation naturelle, le foncteur “champ associé” \mathbf{ch} est homotopiquement adjoint à l’inclusion*

$$nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}) \subset nSeCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}}).$$

Preuve: L’équivalence nécessaire est une conséquence de la propriété universelle de $\mathbf{ch}(F)$, 13.2 par exemple. \square

Calcul des morphismes dans le champ associé

On a la formule suivante:

Lemme 13.5 *Pour un n -prechamp de Segal F dont les valeurs sont des n -catégories de Segal ($n \geq 1$), et pour $x, y \in F(X)$, il y a une équivalence objet-par-objet au-dessus de \mathcal{X}/X ,*

$$(\mathbf{ch}(F))_{1/}(x, y) \cong \mathbf{ch}(F_{1/}(x, y)).$$

Preuve: Notons que $(\mathbf{ch}(F))_{1/}(x, y)$ est un $n - 1$ -champ de Segal par 10.2. Puisque $F \rightarrow \mathbf{ch}(F)$ est une \mathcal{G} -équivalence faible, par définition (§3)

$$F_{1/}(x, y) \rightarrow (\mathbf{ch}(F))_{1/}(x, y)$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible. Alors par définition (§9) $(\mathbf{ch}(F))_{1/}(x, y)$ est le $n - 1$ -champ de Segal associé à $F_{1/}(x, y)$. \square

Version élémentaire

Il semble difficile d’obtenir le foncteur \mathbf{ch} directement en utilisant la structure de catégorie de modèles interne, car le foncteur “remplacement \mathcal{G} -fibrant” n’est pas strictement compatible aux produits directs. On peut cependant remarquer que la théorie de la localisation de Dwyer-Kan donne immédiatement

$$L(nSePCh, W^{\text{gro}}) \rightarrow L(nSePCh, W^{\mathcal{G}}),$$

où $W^{\text{gro}} \subset n\text{SePCh}$ est la sous-catégorie des équivalences faibles pour la topologie grossière, et $W^{\mathcal{G}} \subset W^{\text{gro}}$ est sa sous-catégorie des \mathcal{G} -équivalences faibles. Le fait que W^{gro} est contenu dans $W^{\mathcal{G}}$ donne directement le morphisme ci-dessus. Maintenant le résultat du théorème 11.11 montre que le morphisme précédent est équivalent à un morphisme

$$n\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\text{gro}})^{\text{int},1} \rightarrow n\text{SeCHAMP}'(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})^{\text{int},1}$$

(on a pris un remplacement fibrant noté $n\text{SeCHAMP}'$ à l'arrivée). Ce morphisme est la restriction de \mathbf{ch} à l'intérieur 1-groupe. Dans le cas $n = 0$ i.e. des préfaceaux simpliciaux, on a

$$0\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\text{gro}})^{\text{int},1} = 0\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\text{gro}})$$

et

$$0\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})^{\text{int},1} = 0\text{SeCHAMP}(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$$

et on obtient ainsi (i.e. avec la localisée de Dwyer-Kan) une définition élémentaire du foncteur \mathbf{ch} .

14. Limites

Dans cette section, on fait quelques rappels concernant les limites. Dans [95] on définit les notions de limite et colimite dans une n -catégorie. On peut donner les mêmes définitions *mutatis mutandis* dans une n -catégorie de Segal. On renvoie le lecteur à [95], 3.1 et 3.2 pour ces définitions. En transcrivant les démonstrations de [95] dans le cadre des n -catégories de Segal, on obtient:

Théorème 14.1 *La $n + 1$ -catégorie de Segal $nSeCAT'$ admet toutes les limites et colimites indexées par des (petites) $n + 1$ -catégories de Segal.*

Rappelons comment calculer concrètement une limite (c'est la construction utilisée dans [95] 4.1). Si \mathcal{Y} est une $n + 1$ -catégorie munie d'un morphisme $F : \mathcal{Y} \rightarrow nSeCAT'$, alors on a ([95] 4.1.2)

$$\lim_{\leftarrow, \mathcal{Y}} F = \underline{Hom}(\mathcal{Y}, nSeCAT')_{1/}(*_{\mathcal{Y}}, F).$$

D'autre part, on dispose des notions de limite et colimite homotopique (*holim* et *hocolim*) pour les diagrammes (indexés par une petite 1-catégorie) dans une cmf essentiellement arbitraire. Ces notions sont dues à Bousfield et Kan [15], voir aussi Hirschhorn [59], Dwyer-Hirschhorn-Kan [30].

Normalement nous utiliserons la notation *holim* pour les constructions de type Bousfield-Kan, et la notation \lim pour les limites selon [95]. Heureusement, les deux notions coïncident pour les limites de n -catégories de Segal indexées par des 1-catégories. C'est essentiellement une conséquence de la proposition suivante. On laisse au lecteur le soin de faire la comparaison analogue avec le *holim* de [59] pour la cmf $nSePC$.

Proposition 14.2 *Supposons que \mathcal{Y} est une catégorie et F un n -préchamp de Segal au-dessus de \mathcal{Y} , qu'on peut aussi voir comme morphisme $\mathcal{Y}^o \rightarrow nSeCAT$. Soit $F \rightarrow F'$ une équivalence faible objet-par-objet vers un n -préchamp de Segal fibrant pour la topologie grossière. Alors on a des équivalences de n -catégories de Segal*

$$\Gamma(\mathcal{Y}, F') \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow, \mathcal{Y}^o} F' \cong \lim_{\leftarrow, \mathcal{Y}^o} F.$$

Ici les limites sont celles définies suivant [95].

Preuve: On a l'égalité $\Gamma(\mathcal{Y}, F') = \Gamma \underline{Hom}(*_{\mathcal{Y}}, F')$ car les deux membres représentent le même foncteur sur la catégorie des n -précats de Segal. En particulier, on a

$$\Gamma(\mathcal{Y}, F') = nSeCHAMP(\mathcal{Y})_{1/}(*, F').$$

D'autre part, d'après ([95] 4.0.1 et 4.1.2), on a

$$\lim_{\leftarrow, \mathcal{Y}^o} F' = \underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT')_{1/}(*_{\mathcal{Y}}, F').$$

Maintenant le fait que le foncteur Φ du Théorème 12.1 soit pleinement fidèle (cf Proposition 12.2) signifie exactement que

$$nSeCHAMP(\mathcal{Y})_{1/}(*, F') \rightarrow \underline{Hom}(\mathcal{Y}^o, nSeCAT')_{1/}(*_{\mathcal{Y}}, F')$$

est une équivalence. Enfin l'équivalence entre les limites de F et F' résulte des propriétés d'invariance de la notion de limite [95]. \square

On a une caractérisation similaire pour les colimites, qui utilise la structure de type HBKQ (§5). On l'énonce ci-dessous bien qu'on n'en ait pas besoin. Cette proposition peut aussi être vue comme un énoncé de compatibilité entre la définition de *hocolim* de Bousfield-Kan, et la construction de [95].

Proposition 14.3 *Soient \mathcal{Y} une catégorie et F un n -préchamp de Segal au-dessus de \mathcal{Y} , vu aussi comme morphisme $\mathcal{Y}^o \rightarrow nSeCAT$. Soit $F' \rightarrow F$ une équivalence faible objet-par-objet avec F' cofibrant pour la structure de cmf de type HBKQ, pour la topologie grossière. Alors on a des équivalences de n -catégories de Segal*

$$\begin{aligned} colim_{nSePC}(F') &\xrightarrow{\cong} \\ \lim_{\rightarrow, \mathcal{Y}^o} F' &\xrightarrow{\cong} \lim_{\rightarrow, \mathcal{Y}^o} F \end{aligned}$$

où $colim_{nSePC}(F')$ est la colimite standard du foncteur $\mathcal{Y} \rightarrow nSePC$ de \mathcal{Y} vers la catégorie des n -précats de Segal, tandis que les autres colimites sont les colimites définies suivant [95]. \square

Grâce à la Proposition 14.2 on obtient une version de nos critères qui utilise les limites de [95]. Cette version de la définition des champs a été suggérée dans [95].

Corollaire 14.4 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} dont les valeurs sont des $n + 1$ -catégories de Segal, qui correspond à un morphisme $\mathcal{X} \rightarrow nSeCAT$. Alors pour que A*

soit un n -champ de Segal il faut et il suffit que:

(a) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout $x, y \in A_0(X)$ le $n - 1$ -préchamp de Segal $A_1/(x, y)$ sur \mathcal{X}/X soit un $n - 1$ -champ de Segal (resp. $\text{Path}^{x,y}A$ soit un 0-champ de Segal, dans le cas $n = 0$); et

(b) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de la topologie, le morphisme

$$A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \mathcal{B}^o} A|_{\mathcal{B}}$$

soit essentiellement surjectif.

Ou encore, pour que A soit un n -champ de Segal il faut et il suffit que:

(c) pour tout $X \in \mathcal{X}$ et tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de la topologie, le morphisme

$$A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \mathcal{B}^o} A|_{\mathcal{B}}$$

soit une équivalence de n -catégories de Segal.

Preuve: Au vu de la proposition 14.2, la condition (b) est équivalente à celle de 10.2 ou 10.4 (les conditions (a) sont identiques). De même la condition (c) est équivalente à celle de 10.11. \square

Démonstration de la deuxième partie du théorème 12.1: si on suppose connue l'essentielle surjectivité de Φ pour la première partie de 12.1 (qui sera démontrée en 18.5 ci-dessous), la deuxième partie de 12.1 découle maintenant de la condition (c) du corollaire ci-dessus.

15. Un peu plus sur la condition de descente

On voudrait avoir une version un peu plus explicite des limites qui entrent dans la caractérisation 14.4.

On suppose ici que le site \mathcal{X} admet des produits fibrés.

On dira que le site \mathcal{X} admet *suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés* s'il existe un ordinal β tel que les cribles correspondant aux familles couvrantes de taille strictement plus petite que β engendrent la topologie (i.e. sont cofinaux parmi tous les cribles), et si les sommes disjointes à moins de β éléments existent dans \mathcal{X} et sont compatibles aux produits fibrés (i.e. qu'on a la formule de distributivité pour le produit fibré de deux sommes disjointes au-dessus d'un objet de X).

Par exemple si \mathcal{X} est quasi-compact, on peut prendre $\beta = \omega$ et la condition est qu'il existe des sommes disjointes finies. Pour le site des espaces paracompacts on prendrait $\beta = \omega + 1$.

Par ailleurs, on dira que *les sommes disjointes sont couvrantes* si pour toute famille \mathcal{U} dont la somme disjointe X existe, la famille \mathcal{U} est une famille couvrant X .

Remarque 15.1 *Dans les sites considérés ici, il suffit pour la condition (b) de 10.2 ou 14.4 de prendre en compte les cribles engendrés par les familles couvrantes à moins de β éléments.*

En effet, ces cribles engendrent la topologie.

Supposons maintenant que $\mathcal{U} = \{U_\alpha \rightarrow X\}$ est une famille couvrante $X \in \mathcal{X}$, ayant moins de β éléments. On pose

$$\coprod \mathcal{U} := \coprod_\alpha U_\alpha.$$

C'est un objet de \mathcal{X}/X . Cependant, le crible engendré par cet objet est plus grand que le crible engendré par \mathcal{U} et en fait les cribles engendrés par les $\coprod \mathcal{U}$ ne forment pas en général une famille cofinale.

On a donc besoin de la définition suivante.

Définition 15.2 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} dont les valeurs $A(U)$ sont fibrantes. On dira que A est compatible aux sommes disjointes si pour toute famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ telle que $\coprod \mathcal{U}$ existe, le morphisme naturel*

$$A(\coprod \mathcal{U}) \rightarrow \prod_\alpha A(U_\alpha)$$

est une équivalence faible.

Dans notre cadre où l'ordinal β est fixé on dira juste “compatible aux sommes disjointes” sans préciser qu'il s'agit seulement des sommes disjointes à moins de β éléments.

On note en particulier que la somme disjointe de la famille vide (i.e. la famille indexée par \emptyset) est un objet initial ι du site \mathcal{X} (généralement l'objet vide $\iota = \emptyset$ si \mathcal{X} est un site d'objets géométriques), et la condition que A soit compatible aux sommes disjointes entraîne $A(\iota) = *$.

On peut comprendre la condition 15.2 à l'aide de la topologie suivante: on appelle *topologie des composantes connexes* la topologie engendrée par les familles $\mathcal{U} \rightarrow X$ vérifiant $X = \coprod \mathcal{U}$ (cette condition a un sens sans qu'on suppose l'existence de toutes les sommes disjointes: elle signifie que X est une somme disjointe des éléments de \mathcal{U}). L'existence de produits fibrés et la compatibilité de ceux-ci avec les sommes disjointes garantit qu'on définit bien ainsi une topologie.

Remarque 15.3 *Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} dont les valeurs $A(U)$ sont fibrantes. Alors A est compatible aux sommes disjointes si et seulement si A est un champ pour la topologie des composantes connexes.*

En effet, la condition 15.2 est la même que la condition (c) de 14.4: la limite de A sur le crible engendré par \mathcal{U} est équivalente à $\prod_{\alpha} A(U_{\alpha})$ et, d'après la remarque 15.1, il suffit de considérer les cribles engendrés par les familles couvrantes.

On va maintenant montrer que si A est compatible aux sommes disjointes, alors dans la condition (b) de 10.2 ou 14.4, il suffit de considérer les cribles engendrés par une famille couvrante avec 1 élément. Plus précisément on montre:

Lemme 15.4 *Supposons que \mathcal{X} admet suffisamment de sommes disjointes. Soit A un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X} fibrant objet-par-objet. Supposons que A est compatible aux sommes disjointes (15.2) et satisfait la condition (a) de 14.4, ainsi que la condition (b) pour les cribles engendrés par les familles couvrantes à 1 élément. Alors A est un n -champ de Segal.*

Preuve: On peut supposer A fibrant pour la topologie grossière. Par la remarque 15.3, A est aussi fibrant pour la topologie des composantes connexes. Soit \mathcal{B} un crible engendré par une famille couvrante $\mathcal{U} \rightarrow X$. Soit \mathcal{B}' le crible engendré par $\coprod \mathcal{U}$; on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Le morphisme

$$*\mathcal{B} \rightarrow *\mathcal{B}'$$

est une cofibration triviale pour la topologie des composantes connexes. Donc si $f : *\mathcal{B} \rightarrow A$ est un morphisme, il en existe une extension en $f' : *\mathcal{B}' \rightarrow A$. On dispose de la condition (b) de 14.4 pour \mathcal{B}' , qui implique celle de 10.2, et il s'ensuit que ce morphisme f' s'étend en un morphisme $*\mathcal{X}/X \rightarrow A$. On obtient ainsi la condition (b) pour tout crible \mathcal{B} engendré par une famille couvrante, ce qui suffit (d'après la remarque 15.1). \square

On suppose toujours que \mathcal{X} admet des produits directs et suffisamment de sommes disjointes. On fixe dorénavant $X \in \mathcal{X}$ et une famille couvrante \mathcal{U} qui consiste en un élément $U \rightarrow X$. On note \mathcal{B} le crible engendré par \mathcal{U} . On définit un foncteur

$$\rho(\mathcal{U}) : \Delta^o \rightarrow \mathcal{X}$$

par

$$\rho(\mathcal{U})(p) := U \times \dots \times U \quad p + 1 \text{ fois.}$$

On va encore réécrire la condition (b) de 14.4. On suppose que A est un n -préchamp de Segal, et on a $\rho(\mathcal{U})^*A$ qui est un n -préchamp de Segal sur Δ^o , i.e. une n -précat de Segal cosimpliciale ou encore un foncteur de Δ vers les n -précats de Segal. D'autre part, soit

$$t : \rho(\mathcal{U}) \rightarrow \underline{X}$$

la transformation naturelle de foncteurs $\Delta^o \rightarrow \mathcal{X}$ vers le foncteur constant à valeurs X , qui provient des projections $\mathcal{U} \times_X \dots \times_X \mathcal{U} \rightarrow X$. Si on note $c^*A(X)$ la n -précat de Segal cosimpliciale constante (i.e. le foncteur constant de Δ dans les n -précats de Segal et de valeur $A(X)$) alors t induit un morphisme

$$t^* : c^*A(X) \rightarrow \rho(\mathcal{U})^*A$$

de n -précats de Segal cosimpliciales.

En particulier, t induit un morphisme

$$t^* : A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^*A.$$

Ici la limite est celle suivant [95]. D'après la construction de [95] rappelée au §14 ci-haut, on peut écrire

$$\lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^*A = \underline{Hom}(\Delta, nSeCAT')_{1/}(*, \rho(\mathcal{U})^*A).$$

Ici $nSeCAT'$ désigne un remplacement fibrant de $nSeCAT$.

Corollaire 15.5 *Soit $\rho(\mathcal{U})^*A \rightarrow B$ une équivalence faible objet-par-objet vers un n -préchamp de Segal au-dessus de Δ^o fibrant pour la topologie grossière. Alors $\lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^*A$ est équivalente à la n -précat de Segal $\Gamma(\Delta^o, B)$ des sections globales du préfaisceau B .*

Preuve: C'est une conséquence directe de la proposition 14.2. □

Nous avons appris le lemme suivant dans le livre de Dwyer-Hirschhorn-Kan [30], mais il est dû à Bousfield-Kan ([15] Ch. XI §9). Nous en donnons une version un peu plus faible que ce qu'on trouve dans [15] [30]. On dira qu'un foncteur $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ est *fortement initial*, si pour tout objet $Z \in \mathcal{Z}$, la catégorie f/Z est filtrante (à titre de comparaison, dans *loc cit.* f est dit *initial* si les f/Z sont à nerf contractile).

Lemme 15.6 *Si $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ est un foncteur de 1-catégories qui est fortement initial, alors pour tout foncteur $G : \mathcal{Z} \rightarrow n\text{SeCAT}'$ le morphisme naturel*

$$\lim_{\leftarrow, \mathcal{Z}} G \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow, \mathcal{Y}} f^*G$$

est une équivalence de n -catégories de Segal.

Preuve: D'après 18.5 ¹⁸ on peut supposer que G provient d'un n -préchamp de Segal fibrant pour la topologie grossière de \mathcal{Z} .

Le remonté f^*G est alors fibrant pour la topologie grossière de \mathcal{Y} . En effet, il suffit de montrer que $f_!$ préserve les cofibrations triviales. On a la formule

$$f_!(U)(Z) = \lim_{\rightarrow, f/Z} U|_{f/Z},$$

et comme par hypothèse f/Z est filtrante, cette colimite préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.

On prouve le lemme d'abord pour $n = 0$ i.e. pour les 0-catégories de Segal ou ensembles simpliciaux. Dans ce cas, d'après la Proposition 14.2, les limites en question sont égales à $\Gamma(\mathcal{Z}, G)$ et $\Gamma(\mathcal{Y}, f^*G)$ respectivement. Or celles-ci sont équivalentes aux $\text{holim}_{\mathcal{Z}}(G)$ et $\text{holim}_{\mathcal{Y}}(f^*G)$ de Bousfield-Kan [15]. La propriété en question pour ces holim ([15] Ch. XI théorème 9.2) donne l'énoncé.

Pour n quelconque on peut dire exactement la même chose en utilisant l'extension de Dwyer-Hirschhorn-Kan du holim de Bousfield-Kan, à une catégorie de modèles plus générale en l'occurrence la catégorie des n -précats de Segal.

Une autre façon de compléter l'argument pour n quelconque est de noter qu'on a

$$\Gamma(\mathcal{Z}, G)^{\text{int},0} = \Gamma(\mathcal{Z}, G^{\text{int},0})$$

et de même

$$\Gamma(\mathcal{Y}, f^*G)^{\text{int},0} = \Gamma(\mathcal{Y}, (f^*G)^{\text{int},0});$$

il s'ensuit que

$$\Gamma(\mathcal{Z}, G)^{\text{int},0} \rightarrow \Gamma(\mathcal{Y}, f^*G)^{\text{int},0}$$

est une équivalence. En particulier le foncteur en question est essentiellement surjectif.

D'autre part pour $x, y \in \Gamma(\mathcal{Z}, G)$ on a

$$\Gamma(\mathcal{Z}, G)_{1/}(x, y) = \Gamma(\mathcal{Z}, G_{1/}(x, y))$$

¹⁸Il n'y a pas ici de circularité dans la mesure où si on utilise ce lemme avant la démonstration de 18.5, ce sera sur un G qui est déjà strict.

et $G_{1/}(x, y)$ est un $n - 1$ -préchamp fibrant sur \mathcal{Z} (car la propriété de relèvement pour $G_{1/}(x, y)$ vis-à-vis d'une cofibration triviale $E \rightarrow E'$, est impliquée par la même propriété pour G vis-à-vis de la cofibration triviale $\Upsilon(E) \rightarrow \Upsilon(E')$); et de même pour $(f^*G)_{1/}(f^*x, f^*y)$. Par récurrence, on peut supposer connu le lemme pour les $n - 1$ -précats de Segal, d'où on obtient que

$$\Gamma(\mathcal{Z}, G_{1/}(x, y)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Y}, (f^*G)_{1/}(f^*x, f^*y))$$

est une équivalence, ce qui entraîne que

$$\Gamma(\mathcal{Z}, G)_{1/}(x, y) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Y}, f^*G)_{1/}(f^*x, f^*y)$$

est une équivalence et le foncteur en question est pleinement fidèle. \square

Remarque-Question: Bousfield-Kan et Dwyer-Hirschhorn-Kan donnent le même énoncé pour les colimites dans une catégorie de modèles fermée M , avec seulement l'hypothèse que f est initial i.e. les f/Z ont leur nerf contractile. Peut-on obtenir le même énoncé ici? Dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé la condition "fortement initial" pour dire que $f_!$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales.

Corollaire 15.7 *Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés. Soit A un n -préchamp de Segal, et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ le crible associé à une famille couvrante $\mathcal{U} \rightarrow X$. Alors on a une équivalence naturelle*

$$\lim_{\leftarrow, \mathcal{B}^o} A|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^* A.$$

Preuve: D'après le lemme, il suffit de vérifier que le morphisme

$$\rho(\mathcal{U}) : \Delta \rightarrow \mathcal{B}^o$$

est initial. Pour $Y \in \mathcal{B}^o$, la catégorie $\rho(\mathcal{U})/Y$ est égale à la catégorie

$$\{(n, f) : n \in \Delta, f : Y \rightarrow P_n(\mathcal{U})\}.$$

Un morphisme $f : Y \rightarrow P_n(\mathcal{U})$ est la même chose qu'un $n + 1$ -uplet de morphismes $Y \rightarrow \mathcal{U}$ au-dessus de X . Soit $H := \text{Hom}(Y, \mathcal{U})$ l'ensemble des morphismes $Y \rightarrow \mathcal{U}$ au-dessus de X , et adoptons la notation $P_n(H)$ pour le produit de $n + 1$ copies de H (ce qui définit un ensemble simplicial $P.(H)$ qui est le nerf de la catégorie ayant H pour ensemble d'objets et un isomorphisme entre chaque paire d'objets). La catégorie $\rho(\mathcal{U})/Y$ est donc égale à

$$\{(n, h) : n \in \Delta, h \in P_n(H)\},$$

autrement dit c'est la catégorie totale associée à l'ensemble simplicial $P.(H)$, qui est contractile car H est non-vide (la condition $H \neq \emptyset$ est équivalente à la condition $Y \in \mathcal{B}$, c'est la définition du crible \mathcal{B} associé à \mathcal{U}). Par le lemme, on obtient l'équivalence entre limites cherchée. \square

Proposition 15.8 *Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés, et suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés. Soit A un n -préchamp de Segal tel que $A(X)$ soit une n -catégorie de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$. Alors A est un champ si et seulement si:*

- (a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d'objets $x, y \in A_0(X)$, le $n - 1$ -préchamp de Segal $A_{1/}(x, y)$ est un $n - 1$ -champ de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ; et*
- (b) *A est compatible aux sommes disjointes (définition 15.2), et pour tout X et toute famille couvrante $\mathcal{U} \rightarrow X$ à un élément, le morphisme*

$$t^* : A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^* A$$

défini ci-dessus, est essentiellement surjectif.

La condition (b) peut être remplacée par la même condition pour n'importe lequel des $A^{int, k}$.

Le fait que A soit un champ est aussi équivalent à la condition

- (c) *A est compatible aux sommes disjointes (définition 15.2), et pour tout X et toute famille couvrante $\mathcal{U} \rightarrow X$ à un élément, le morphisme*

$$t^* : A(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^* A$$

est une équivalence de n -catégories de Segal.

Preuve: Combiner les Corollaires 14.4 et 15.7. □

Si on remplace la condition (b) par la même pour le préfaisceau simplicial $A^{int, 0}$, alors la limite en question est la même que la *holim* de Bousfield-Kan. On peut donc réécrire:

Corollaire 15.9 *Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés, et suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés. Soit A un n -préchamp de Segal tel que $A(X)$ soit une n -catégorie de Segal pour tout $X \in \mathcal{X}$. Alors A est un champ si et seulement si:*

- (a) *pour tout $X \in \mathcal{X}$ et toute paire d'objets $x, y \in A_0(X)$, le $n - 1$ -préchamp de Segal $A_{1/}(x, y)$ est un $n - 1$ -champ de Segal au-dessus de \mathcal{X}/X ; et*
- (b) *A est compatible aux sommes disjointes (définition 15.2), et pour tout X et toute famille couvrante $\mathcal{U} \rightarrow X$ à un élément, le morphisme*

$$t^* : A^{int, 0}(X) \rightarrow \text{holim}_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^* A^{int, 0}$$

induit une surjection sur les π_0 .

Si A est un champ alors le morphisme de (b) est une équivalence faible. □

Ce critère permet—par récurrence sur n — d'appréhender la condition pour être un champ, en termes de préfaisceaux simpliciaux uniquement, et dans ce cadre la notion est déjà bien connue.

16. La construction de Grothendieck

On indique ici comment on peut construire une “ n -catégorie fibrée” au-dessus d’une 1-catégorie Y , à partir d’un préfaisceau de n -catégories au-dessus de Y^o ; c’est l’analogie de la construction de SGA1 [51].

Il serait intéressant d’avoir une définition de n -catégorie fibrée et une construction allant dans l’autre sens (pour obtenir l’analogie de toute la théorie de SGA1); mais nous ne traitons pas cette question ici.

Soit Y une 1-catégorie et A un n -préchamp de Segal au-dessus de Y^o . (cette covariance est mieux adaptée pour certains aspects de la discussion qui suit).¹⁹ On considère A comme un foncteur covariant $\mathcal{Y} \rightarrow nSePC_f$ (i.e. chaque $A(y)$ est supposé fibrant) et on va définir une n -précat de Segal munie d’un foncteur vers Y

$$\int_Y A \rightarrow Y.$$

Ceci généralise la *construction de Grothendieck* (cf [99] et [32]) qui concerne le cas où A est un préfaisceau de 1-catégories.

Les objets de $\int_Y A$ sont les couples (y, a) avec $y \in Y$ et $a \in A(y)$. Pour une suite $(y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p)$ et une suite de flèches $\varphi_i : y_{i-1} \rightarrow y_i$ de Y on construira la $n - 1$ -catégorie

$$\left(\int_Y A\right)_p / ((y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p); \varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

qui sera l’image inverse de

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in Y_p(y_0, \dots, y_p).$$

On fait cette construction par récurrence sur p ; en supposant que c’est fait pour $p - 1$ on pose (*)

$$\begin{aligned} & \left(\int_Y A\right)_p / ((y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p); \varphi_1, \dots, \varphi_p) := \\ & \left(\int_Y A\right)_{p-1} / ((y_0, a_0), \dots, (y_{p-1}, a_{p-1}); \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}) \\ & \times_{A(y_p)_{p-1} / (\phi_0(a_0), \dots, \phi_{p-1}(a_{p-1}))} A(y_p)_p / (\phi_0(a_0), \dots, \phi_p(a_p)) \end{aligned}$$

où les

$$\phi_i : A(y_i) \rightarrow A(y_p)$$

¹⁹En fait il y a un choix à faire quant à la direction des flèches, comme la distinction de SGA 1 entre “catégorie fibrée” et “catégorie cofibrée” et nous ne considérons qu’une des deux possibilités. L’autre s’en déduit par conjugaison avec l’opération “catégorie opposée”.

sont les morphismes composés des $res_{\varphi_p} \cdots res_{\varphi_{i+1}}$. Ici par ailleurs, on a par construction un morphisme

$$\left(\int_Y A\right)_{p/}((y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p); \varphi_1, \dots, \varphi_p) \rightarrow A(y_p)_{p/}(\phi_0(a_0), \dots, \phi_p(a_p))$$

et le premier morphisme dans le produit fibré $(*)$ est ce morphisme pour $p - 1$, composé avec res_{φ_p} pour passer de $A(y_{p-1})_{p-1/}$ à $A(y_p)_{p-1/}$.

Maintenant on pose

$$\left(\int_Y A\right)_{p/}((y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p)) := \coprod_{\varphi_1, \dots, \varphi_p} \left(\int_Y A\right)_{p/}((y_0, a_0), \dots, (y_p, a_p); \varphi_1, \dots, \varphi_p),$$

où le coproduit est pris sur tous les

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in Y_p(y_0, \dots, y_p).$$

Ceci définit bien la n -précat de Segal $\int_Y A$ avec une application tautologique vers Y .

On vérifie que $\int_Y A$ est une n -catégorie de Segal avec

$$\left(\int_Y A\right)_{1/}((y_0, a_0), (y_1, a_1)) = \coprod_{\varphi_1: y_0 \rightarrow y_1} A(y_1)_{1/}(\varphi_1(a_0), a_1).$$

Le fait que $\int_Y A$ est une n -catégorie de Segal utilise le fait que chaque $A(y_p)$ est fibrant, et plus particulièrement le fait qu'en conséquence le deuxième morphisme dans le produit fibré $(*)$ est fibrant.

Si A est un préfaisceau de 1-catégories sur Y° (les $A(y)$ sont dans ce cas fibrants) alors $\int_A Y$ est la catégorie dont les objets sont les couples (y, a) et les morphismes de (y, a) vers (z, b) sont les couples (f, r) où $f : y \rightarrow z$ dans Y et $r : f(a) \rightarrow b$ dans $A(z)$. C'est la *construction de Grothendieck* [51] [99] [32].

Une première utilisation de cette construction est la *subdivision barycentrique*, suivant le point de vue de Thomason [99]. Soit X un ensemble simplicial et posons

$$B := \int_{\Delta^\circ} X.$$

C'est une catégorie, qui est aussi la *catégorie des simplexes de X* notée ΔX dans [59] [30]. Son nerf νB s'explique de la façon suivante: les éléments de νB_p sont les

$$(n, \sigma, x) = (n_0, \dots, n_p; \sigma_1, \dots, \sigma_p; x)$$

où $n_i \in \Delta$, $\sigma_i : n_{i-1} \rightarrow n_i$ dans Δ , et $x \in X(n_p)$. On note

$$g(n, \sigma) : p \rightarrow n_p$$

le morphisme qui à $i' \in p$ associe l'image

$$g(n, \sigma)(i') := \sigma_p \cdots \sigma_{i+1}(n'_i)$$

où $n'_i \in n_i$ est le dernier élément (on utilise ici le “prime” pour distinguer entre les éléments des ensembles ordonnés, et les ensembles qui sont eux-mêmes objets de Δ). On a un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\psi : \nu B \rightarrow X$$

défini par

$$\psi(n, \sigma, x) := g(n, \sigma)^*(x) \in X(p).$$

D'autre part, soit Δ^r la sous-catégorie de Δ où les morphismes sont seulement ceux qui envoient le dernier élément sur le dernier élément. On pose

$$D := \int_{\Delta^r} X|_{(\Delta^r)^\circ} \subset B.$$

Les éléments de νD_p sont les (n, σ, x) tels que $\sigma_i(n'_{i-1}) = n'_i$. En particulier, le morphisme $g(n, \sigma)$ se factorise à travers la projection $p \rightarrow 0$ via l'inclusion $0 \rightarrow n_p$ correspondant au dernier élément n'_p . On a la factorisation

$$\nu D \rightarrow X_0 \rightarrow X.$$

Par conséquent le morphisme ψ s'étend directement en un morphisme

$$L\psi : 1SeL(B, D) \rightarrow X$$

car tout morphisme $I \rightarrow D$ s'envoie dans X sur un objet $\{x\}$, et s'étend donc automatiquement en $\bar{I} \rightarrow \{x\}$.

Le lemme suivant doit en réalité être dû à Thomason [99] (en tout cas, il montre que le morphisme sur les complétés groupiques, est une équivalence).

Lemme 16.1 *Pour tout ensemble simplicial X , le morphisme $L\psi : 1SeL(B, D) \rightarrow X$ ci-dessus est une équivalence faible de 1-précats de Segal.*

Preuve: La formation de B , D , $1SeL(B, D)$ et des morphismes ψ et $L\psi$ est compatible aux colimites. Comme tout ensemble simplicial est colimite d'ensembles simpliciaux de la forme $h(m)$ (le préfaisceau représenté par m , i.e. le m -simplexe standard), il suffit de prouver le lemme pour $X = h(m)$. Dans ce cas $B = \Delta/m$ et D est la sous-catégorie des objets de Δ^r au-dessus (par rapport à Δ) de m , notée i/m où $i : \Delta^r \rightarrow \Delta$ est l'inclusion. Soit $I^{(m)}$ la catégorie avec pour objets $0'', \dots, m''$ et un morphisme $i'' \rightarrow j''$

pour $i \leq j$. On a une équivalence faible de 1-précats de Segal $h(m) \rightarrow I^{(m)}$. On a un foncteur $a : I^{(m)} \rightarrow B$ qui à i'' associe l'objet $i \rightarrow m$ où ce morphisme envoie $j' \in i$ sur $j' \in m$ (ici encore, on note avec un "prime" les éléments des $p \in \Delta$). D'autre part on a un foncteur $b : B \rightarrow I^{(m)}$ qui à un objet $p \rightarrow m$ de B , associe $i'' \in I^{(m)}$ où (pour le même i) le dernier élément dans l'image de $p \rightarrow m$ est i' . On note que b se factorise à travers le morphisme de 1-précats de Segal $B \rightarrow h(m)$ via l'inclusion $h(m) \rightarrow I^{(m)}$. Aussi, b envoie les morphismes de D sur les identités de $I^{(m)}$. Pour prouver le lemme, il suffit donc de prouver que b induit une équivalence entre $1SeL(B, D)$ et $I^{(m)}$. Or, d'après la proposition 8.7, il suffit de prouver que b induit une équivalence entre $L(B, D)$ et $I^{(m)}$. Pour ceci, on applique le Corollaire 3.6 de [32] sous la forme du lemme 8.1 ci-dessus: on a que ba est l'identité de $I^{(m)}$, et il y a une transformation naturelle $\eta : 1 \rightarrow ab$ dont la valeur sur $p \rightarrow m$ (objet de Δ/m) est le morphisme $p \rightarrow i \rightarrow m$ où i' est le dernier élément dans l'image de $p \rightarrow m$ et $i \rightarrow m$ est $a(i'')$, l'injection qui envoie j' sur j' pour $j' \in i$. On note que les $\eta_{p \rightarrow m}$ sont des morphismes dans D , donc cette transformation naturelle induit une déformation-rétraction de $L(B, D)$ sur $I^{(m)}$. \square

Lorsqu'il sera question d'appliquer cette construction à plusieurs ensembles simpliciaux X , on notera $\beta(X) := B$ et $\delta(X) := D \subset \beta(X)$. Le lemme dit qu'on a une équivalence faible

$$1SeL(\beta(X), \delta(X)) \xrightarrow{\cong} X.$$

On donne maintenant une variante qui peut être utile. Cette variante entre dans le cadre plus général de la théorie des "catégories-test" envisagée par Grothendieck dans [49]. Ici on utilise un exemple qui provient des travaux de Thomason [99] [101]; le deuxième auteur remercie G. Maltsiniotis et A. Bruguières de lui avoir expliqué cette idée.

Pour $p \in \Delta$ soit $\text{poset}(p)$ l'ensemble partiellement ordonné des hyperfaces dans le p -simplexe standard (incluant le p -simplexe lui-même). On considère $\text{poset}(p)$ comme une catégorie. Pour ce qu'on en fera, la direction des flèches n'est pas importante; on peut fixer un choix en disant que le p -simplexe est l'objet initial de $\text{poset}(p)$. On obtient un foncteur

$$\text{poset} : \Delta \rightarrow \text{Cat}.$$

On définit aussi la sous-catégorie $\text{Dposet}(p) \subset \text{poset}(p)$ constituée des hyperfaces contenant le premier sommet. On a d'autre part le foncteur $p \mapsto I^{(p)}$ où $I^{(p)}$ est la catégorie avec $p+1$ objets $0', \dots, p'$ et un morphisme $i' \rightarrow j'$ pour $i \leq j$. On notera $\text{std} : \Delta \rightarrow \text{Cat}$ ce foncteur. Le foncteur

$$\text{poset}(p) \rightarrow \text{std}(p) = I^{(p)}$$

qui envoie un hyper-face du p -simplexe sur son premier sommet considéré comme objet de $I^{(p)}$, donne une transformation naturelle

$$\text{poset} \rightarrow \text{std}.$$

de foncteurs $\Delta \rightarrow \text{Cat}$. Cette transformation naturelle envoie la sous-catégorie Dposet sur les identités dans std et le morphisme de 1-précats de Segal

$$1\text{SeL}(\text{poset}(p), \text{Dposet}(p)) \rightarrow \text{std}(p) = I^{(p)}$$

est une équivalence faible.

Si X est un ensemble simplicial alors X peut être vu comme le coproduit de ses simplexes, et on peut écrire

$$X = \coprod_p \coprod_{x \in X_p} \nu I^{(p)} / \sim .$$

Si on effectue le même coproduit, mais avec les $\nu \text{poset}(p)$ (resp. $\nu \text{Dposet}(p)$) comme facteurs, on obtient un ensemble simplicial

$$\beta^{\text{poset}}(X) := \coprod_p \coprod_{x \in X_p} \text{poset}(p) / \sim$$

(resp.

$$\delta^{\text{poset}}(X) := \coprod_p \coprod_{x \in X_p} \text{Dposet}(p) / \sim)$$

et le morphisme

$$1\text{SeL}(\beta^{\text{poset}}(X), \delta^{\text{poset}}(X)) \rightarrow X$$

est une équivalence faible de 1-précats de Segal. Par contre, on peut remarquer que $\beta^{\text{poset}}(X)$ est le nerf de la catégorie sous-jacente à un ensemble partiellement ordonné, et $\delta^{\text{poset}}(X)$ une sous-catégorie. Ceci donne la variante suivante du lemme 16.1.

Lemme 16.2 *Pour tout ensemble simplicial X , il y a une catégorie $\beta^{\text{poset}}(X)$ sous-jacente à un ensemble partiellement ordonné, avec une sous-catégorie $\delta^{\text{poset}}(X)$ et une équivalence faible de 1-précats de Segal*

$$1\text{SeL}(\beta^{\text{poset}}(X), \delta^{\text{poset}}(X)) \xrightarrow{\cong} X.$$

□

On appliquera cela au nerf X d'une 1-catégorie Y . Dans ce cas le morphisme

$$\beta^{\text{poset}}(X) \rightarrow Y$$

est un morphisme de catégories et le lemme implique que le morphisme

$$L(\beta^{\text{poset}}(X), \delta^{\text{poset}}(X)) \xrightarrow{\cong} Y$$

est une équivalence de catégories simpliciales.

Sections de l'intégrale

Si $F \rightarrow Y$ est un morphisme (supposé fibrant) d'une n -catégorie de Segal vers une 1-catégorie Y , on note $Sect(Y, F)$ la n -catégorie de Segal des sections. Si F est une 1-catégorie alors $Sect(Y, F)$ est une 1-catégorie. Les objets sont les sections $\sigma : Y \rightarrow F$ et les morphismes entre sections sont les transformations naturelles qui se projettent sur la transformation naturelle identité du foncteur identité de Y .

Si A est un n -préchamp de Segal au-dessus de Y on dispose donc de la n -précat de Segal

$$Sect(Y, \int_Y A).$$

Celle-ci pourrait ne pas avoir les propriétés escomptées. On commence donc par choisir un remplacement fibrant (au-dessus de Y), de la forme

$$\int_Y A \rightarrow \int'_Y A \rightarrow Y$$

où la première flèche est une équivalence et la deuxième est une fibration; et on considère plutôt $Sect(Y, \int'_Y A)$ qui est une n -catégorie de Segal fibrante.

Lemme 16.3 *Avec les notations précédentes, pour tout $y \in Y$, soit $A'(y)$ la fibre de $\int'_Y A$ (i.e. le produit fibré de ce dernier avec $*$ = $\{y\}$ au-dessus de Y). Alors le morphisme*

$$g : \int_Y A \rightarrow \int'_Y A$$

induit une équivalence $g(y) : A(y) \xrightarrow{\cong} A'(y)$.

Preuve: Le fait que g est (par hypothèse) une équivalence implique directement que le morphisme $g(y) : A(y) \rightarrow A'(y)$ est pleinement fidèle. On montre que $g(y)$ est essentiellement surjectif. Si $(y, a) \in A'(y)$ alors il y a une équivalence dans $\int'_Y A$ entre (y, a) et un objet $(z, b) \in A(z)$ pour un autre $z \in Y$. Cet équivalence qu'on notera $I \rightarrow \int'_Y A$ s'étend en $\eta : \bar{I} \rightarrow \int'_Y A$ qui se projette donc vers un morphisme $\psi : \bar{I} \rightarrow Y$ qui correspond à un isomorphisme entre y et z . Maintenant on peut relever ceci en un morphisme "horizontal" (voir les descriptifs dans 16.5 et 16.6 ci-dessous) $h : \bar{I} \rightarrow \int_Y A$. Soit maintenant $\bar{I}^{(2)}$ la catégorie avec pour objets 0, 1, 2 et un isomorphisme entre chaque paire d'objets, contenant des sous-catégories équivalentes à \bar{I} qu'on notera $\bar{I}^{01}, \bar{I}^{12}, \bar{I}^{02}$. Toutes ces catégories sont contractiles i.e. équivalentes à $*$. On a d'autre part une projection

$$p_{0,12} : \bar{I}^{(2)} \rightarrow \bar{I}$$

qui envoie 0 sur 0 et 1, 2 sur 1. Avec ceci on obtient un morphisme

$$\psi \circ p_{0,12} : \bar{T}^{(2)} \rightarrow Y,$$

avec relèvement partiel sur la réunion $\bar{T}^{01} \cup \bar{T}^{02}$ en un morphisme

$$\eta \sqcup^{(z,b)} h : \bar{T}^{01} \cup \bar{T}^{02} \rightarrow \int_Y A.$$

Ce dernier envoie 0 sur (z, b) , envoie \bar{T}^{01} via η , et envoie \bar{T}^{02} via h . Comme l'inclusion

$$\bar{T}^{01} \cup \bar{T}^{02} \subset \bar{T}^{(2)}$$

est une équivalence (donc une cofibration triviale), il y a un relèvement et extension en un morphisme

$$H : \bar{T}^{(2)} \rightarrow \int_Y A.$$

La restriction H^{12} de H à \bar{T}^{12} reste au-dessus de la sous-catégorie $\{y\} \subset Y$ (contenant l'objet y et l'identité comme seul morphisme), donc on peut écrire

$$H^{12} : \bar{T}^{12} \rightarrow A'(y).$$

Aussi H^{12} envoie le sommet 1 sur $\eta(1) = (y, a)$, et envoie le sommet 2 sur un objet de $A(y)$. On obtient donc que (y, a) est équivalent à un objet de $A(y)$ ce qui prouve l'essentielle surjectivité de $g(y)$. \square

Corollaire 16.4 *La formation de $\int_Y A$ commute au changement de base: si $f : Z \rightarrow Y$ alors $(\int_Y A) \times_Y Z$ est un choix possible pour $\int_Z (A|_Z)$.*

Preuve: Le morphisme $(\int_Y A) \times_Y Z \rightarrow Z$ est fibrant, et il ne reste qu'à prouver que

$$\int_Z (A|_Z) \rightarrow (\int_Y A) \times_Y Z$$

est une équivalence. Au vu du lemme, ce morphisme est essentiellement surjectif. Si $\varphi : u \rightarrow v$ est une flèche de Z (qui donne une flèche $f\varphi : fu \rightarrow fv$ de Y), alors, pour $a \in A(fu)$ et $b \in A(fv)$,

$$\begin{aligned} \left(\int_Z A|_Z\right)_1 / ((u, a), (v, b); \varphi) &= A(fv)_1 / (res_{f\varphi}(a), b) \\ &= \left(\int_Y A\right)_1 / ((fu, a), (fv, b); f\varphi) \\ &= \left(\left(\int_Y A\right) \times_Y Z\right)_1 / (((fu, a), u), ((fv, b), v); \varphi) \\ &\xrightarrow{\cong} \left(\left(\int_Y A\right) \times_Y Z\right)_1 / (((fu, a), u), ((fv, b), v); \varphi). \end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait que $f_Y A \rightarrow f'_Y A$ est une équivalence. Ceci montre que le morphisme

$$\int_Z (A|_Z) \rightarrow \left(\int_Y A \right) \times_Y Z$$

est pleinement fidèle. \square

On retourne maintenant à la considération des sections de $f'_Y A$. Un objet de $Sect(Y, f'_Y A)$ est un morphisme $\sigma : Y \rightarrow f'_Y A$. Pour tout morphisme $f : y \rightarrow z$ dans Y on obtient un morphisme $\sigma^r(f) : res_f(\sigma(y)) \rightarrow \sigma(z)$, bien défini à homotopie près comme morphisme de $A(z)$. On dira que σ est une *eq*-section si les $\sigma^r(f)$ définis ci-dessus sont des équivalences. On note $Sect^{eq}(Y, f'_Y A)$ la sous- n -précat pleine de $Sect(Y, f'_Y A)$ dont les objets sont les *eq*-sections.

Si A est un préfaisceau de 1-catégories, la section σ est déterminée par les morphismes $\sigma^r(f)$ (qui sont bien définis dans ce cas).

Avant de traiter le cas général des sections au-dessus d'une catégorie Y , on traite le cas (en quelque sorte irréductible) de la catégorie $Y = I$ avec deux objets $0, 1$ et un morphisme $0 \rightarrow 1$.

Lemme 16.5 *Soit A un n -préchamp de Segal au-dessus de I° dont les valeurs $A(0)$ et $A(1)$ sont fibrantes. Soit $f'_I A$ le remplacement fibrant pour $f_I A$ au-dessus de Y et notons $A'(0)$ la fibre de ce dernier au-dessus de $0 \in I$. Alors le morphisme d'évaluation*

$$ev(0) : Sect^{eq}(I, \int_I A) \rightarrow A'(0)$$

est une équivalence.

Preuve: On rappelle d'abord qu'un n -préchamp de Segal A au-dessus de I° consiste en un triplet $(A(0), A(1), r : A(0) \rightarrow A(1))$. Soit $a \in A(0)_0$, et soit $r(a)$ son image dans $A(1)$. On va construire une section "horizontale" $\sigma : I \rightarrow f_I A$ qui envoie 0 sur a et 1 sur $r(a)$. Un simplexe dans le nerf νI est de la forme $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ (disons, avec p fois 0 et q fois 1). Rappelons que

$$\begin{aligned} & A(0)_{p+q} / ((0, a), \dots, (0, a), (1, r(a)), \dots, (1, r(a))) \\ &= A(0)_{p/}(a, \dots, a) \times_{A(1)_{p/}(r(a), \dots, r(a))} A(1)_{p+q/}(r(a), \dots, r(a)). \end{aligned}$$

On spécifie σ en disant que $\sigma(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ est la paire des deux simplexes dégénérés dans ce produit fibré. Noter que σ est une *eq*-section.

Cette construction montre que tout objet de $A'(0)$ qui provient d'un objet de $A(0)$, est dans l'image essentielle du morphisme $ev(0)$. Au vu du lemme 16.3, ceci montre que $ev(0)$ est essentiellement surjectif.

Il reste maintenant à montrer que $ev(0)$ est pleinement fidèle. L'argument ci-dessus donne en fait un morphisme $A(0) \rightarrow Sect^{eq}(I, \int_I' A)$ qui scinde $ev(0)$. On dira qu'un morphisme provenant de ce scindage est "horizontal". Tout morphisme $f : (0, u) \rightarrow (1, v)$ dans $\int_I' A$ (i.e. objet $f \in (\int_I' A)_{1/}((0, u), (1, v))_0$) s'écrit à équivalence près comme le "composé" gh (ce composé étant défini à équivalence près) où h est horizontal et g un morphisme de $A'(1)$. Si $a : I \rightarrow \int_I' A$ alors l'image $a(\varphi)$ est bien définie comme morphisme $f \in (\int_I' A)_{1/}((0, u), (1, v))_0$. D'après la définition de eq -section, a est une eq -section si et seulement si $f = gh$ avec g une équivalence dans $A'(1)$. Il s'ensuit (nous laissons au lecteur le soin de détailler ce point) que toute eq -section est équivalente (dans $Sect(I, \int_I' A)$) à une section horizontale.

Pour montrer que $ev(0)$ est pleinement fidèle on peut alors considérer deux sections horizontales $a, b : I \rightarrow \int_I A$, et on voudrait montrer que le morphisme

$$Sect^{eq}(I, \int_I' A)_{1/}(a, b) \rightarrow A'(1)_{1/}(a(1), b(1))$$

est une équivalence.

On a l'égalité suivante (formule par foncteur représentable de $n-1$ -précats de Segal)

$$Sect^{eq}(I, \int_I' A)_{1/}(a, b) = \left(E \mapsto Hom^{a,b/I}(I \times \Upsilon(E), \int_I' A) \right)$$

où $Hom^{a,b/I}$ est l'ensemble des morphismes qui se restreignent en a et b sur $I \times \{0\}$ et $I \times \{1\}$ et qui se projettent vers la deuxième projection $I \times \Upsilon(E) \rightarrow I$. Le morphisme d'évaluation correspond à la restriction de morphismes $I \times \Upsilon(E) \rightarrow \int_I' A$ sur des morphismes $\{0\} \times \Upsilon(E) \rightarrow A'(0)$. On voudrait montrer que cette restriction est une équivalence. Divisons le carré $I \times \Upsilon(E)$ en deux triangles notés $\Upsilon^2(E, *)$ et $\Upsilon^2(*, E)$ recollés le long de la diagonale $\Upsilon(E)$. Le foncteur (en E) des morphismes sur le premier triangle $\Upsilon^2(E, *) \rightarrow \int_I' A$ est équivalent, par restriction à l'arête 01, à $A'(0)_{1/}(a(0), b(0))$. Il suffit donc de voir que l'application de restriction entre le foncteur en E des morphismes avec source le carré, vers le foncteur en E des morphismes avec source le premier triangle, est une équivalence. Maintenant cette question ne concerne que le deuxième triangle: il suffit de voir que le morphisme (de restriction sur l'arête 02)

$$r_{02} : \left(E \mapsto Hom^{a,b(1)/I}(\Upsilon^2(*, E), \int_I' A) \right) \rightarrow$$

$$\left(E \mapsto Hom^{a(0),b(1)/I}(\Upsilon(E), \int_I' A) \right)$$

est une équivalence de $n-1$ -précats de Segal. Ici $Hom^{a,b(1)/I}$ est l'ensemble des morphismes qui donnent a sur $\Upsilon(*)$ (arête 01), qui donnent $b(1)$ sur le sommet 2, et qui sont compatibles

avec la projection vers I ; et $Hom^{a(0),b(1)/I}$ est l'ensemble des morphismes qui donnent $a(0)$ sur le premier sommet 0 et $b(1)$ sur le deuxième sommet (qu'on note ici 2, et qui sont compatibles avec la projection vers I . Mais le l'arrivée du morphisme r_{02} est juste ce qu'on a noté

$$\left(\int_I A\right)_{1/}((0, a(0)), (1, b(1))); \varphi$$

ci-dessus, où $\varphi : 0 \rightarrow 1$ est le morphisme de I . Et à cause de l'équivalence faible $\Upsilon^2(*, E) \cong \Upsilon(*) \sqcup^{\{1\}} \Upsilon(E)$, le départ du morphisme r_{02} ci-dessus est équivalent via r_{12} à

$$\left(E \mapsto Hom^{a(1),b(1)}(\Upsilon(E), \int_I A)\right) = A'(1)_{1/}(a(1), b(1)).$$

Rappelons qu'on a supposé que a correspond à un morphisme horizontal $I \rightarrow \int_I A$, i.e. $a(1) = ra(0)$ pour r le morphisme structurel de A . On dispose donc du même morphisme que r^{02} , qu'on appellera \tilde{r}^{02} , qu'on aurait pu fabriquer avec $\int_I A$ au lieu de $\int'_I A$, ce qui est (via les mêmes identifications que ci-dessus mais pour $\int_I A$) le morphisme de composition avec $a(\varphi) : a(0) \rightarrow a(1)$

$$A(1)_{1/}(a(1), b(1)) \rightarrow \left(\int_I A\right)_{1/}((0, a(0)), (1, b(1))); \varphi.$$

Mais ce morphisme est par construction un isomorphisme. Le fait que $\int_I A \rightarrow \int'_I A$ est une équivalence de catégories implique que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(1)_{1/}(a(1), b(1)) & \xleftarrow{\cong} & \text{source}(\tilde{r}^{02}) & \xrightarrow{\tilde{r}^{02}} & \left(\int_I A\right)_{1/}((0, a(0)), (1, b(1))); \varphi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A'(1)_{1/}(a(1), b(1)) & \xleftarrow{\cong} & \text{source}(r^{02}) & \xrightarrow{r^{02}} & \left(\int'_I A\right)_{1/}((0, a(0)), (1, b(1))); \varphi \end{array}$$

les flèches verticales sont des équivalences. Le fait que le morphisme en haut à droite soit un isomorphisme (par construction—et c'est ici l'endroit essentiel où on utilise le fait que a soit horizontale) implique que r^{02} est une équivalence. Ceci termine la démonstration. \square

Proposition 16.6 *Soit A un n -préchamp de Segal sur Y^o . Alors il y a un morphisme naturel de n -précats de Segal*

$$\Gamma(Y^o, A) \rightarrow \text{Sect}(Y, \int_Y A),$$

et si A est fibrant alors le morphisme composé

$$\Gamma(Y^o, A) \rightarrow \text{Sect}(Y, \int'_Y A)$$

est pleinement fidèle avec pour image essentielle $\text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int'_Y A)$.

Preuve: D'abord on définit le morphisme. Au niveau des objets, c'est facile: une section σ de A au-dessus de Y^o donne directement un morphisme $Y \rightarrow \int_Y A$ qui envoie y sur $(y, \sigma(y))$. Le simplexe $(y_0, \dots, y_p; \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ va sur l'élément de

$$\left(\int_Y A\right)_p / ((y_0, \sigma(y_0)), \dots, (y_p, \sigma(y_p)); \varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

dont les deuxièmes projections dans les produits fibrés $(*)$ (par la récurrence il y en a une pour chaque $0 < p \leq p$) sont les simplexes dégénérés dans $A_{q/}(\sigma(y_q), \dots, \sigma(y_q))$.

Pour spécifier le morphisme plus précisément, on utilise la définition de $\Gamma(Y^o, A)$ par propriété universelle: pour une n -précat de Segal E , un morphisme $E \rightarrow \Gamma(Y^o, A)$ est la même chose qu'un morphisme $\underline{E} \rightarrow A$ où \underline{E} est le n -préchamp de Segal constant sur Y^o à valeurs E . On a (avec la même définition que ci-dessus même si E n'est pas fibrant)

$$\int_Y \underline{E} = Y \times E.$$

Par functorialité de la construction \int_Y , un morphisme $\underline{E} \rightarrow A$ fournit un morphisme

$$Y \times E = \int_Y \underline{E} \rightarrow \int_Y A$$

dont la composition avec la projection sur Y est la première projection $Y \times E \rightarrow Y$. Ceci donne, par définition de $Sect(Y, -)$, un morphisme

$$E \rightarrow Sect(Y, \int_Y A)$$

et on a défini le morphisme $\Gamma(Y^o, A) \rightarrow Sect(Y, \int_Y A)$.

Pour montrer l'équivalence, on voudrait décomposer Y en cellules et traiter chaque cellule individuellement. La première partie de l'argument consiste donc à réduire la proposition au cas $Y = I^{(p)}$. Dans la deuxième partie de l'argument, on traitera ce cas particulier (et pour ceci on réduit encore facilement au cas $Y = I$). Pour la réduction de la première partie, on a besoin de la subdivision barycentrique définie ci-dessus. Cet argument sera en quelque sorte un précurseur de l'utilisation qu'on fera des *catégories de Reedy* au §18 ci-dessous; mais pour le moment nous n'avons pas besoin de ce formalisme.

Pour une catégorie Y on notera (avec un léger abus de notation)

$$\beta(Y) := \beta(\nu Y) \xrightarrow{\psi} Y$$

la subdivision barycentrique du nerf de Y , avec foncteur ψ vers Y . (Aussi on rappelle que, par définition, il y a un foncteur structurel $\beta(Y) \rightarrow \Delta^o$.) Un objet de la catégorie $\beta(Y)$ est une suite $(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$ composable de flèches $f_i : y_{i-1} \rightarrow y_i$ de Y . Un

morphisme de $\beta(Y)$ se déduit d'un morphisme de Δ^o , i.e. d'un morphisme $q \rightarrow p$ mais allant dans l'autre sens. Si $u : q \rightarrow p$ est définie par la suite $u_0, \dots, u_q \in \{0, \dots, p\}$ alors les morphismes correspondants sont de la forme

$$(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p) \rightarrow (y_{u_0}, \dots, y_{u_q}; g_1, \dots, g_q)$$

où $g_i = f_{u_i} \cdots f_{u_{i-1}+1}$ (si $u_i = u_{i-1}$ alors g_i est l'identité). Le foncteur vers Y est

$$(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p) \mapsto y_0.$$

On note qu'en fait on utilisera souvent l'opposé $\beta(Y)^o$ et que les morphismes dans $\beta(Y)^o$, qui vont dans l'autre sens que ci-dessus, peuvent être considérés comme des "inclusions (ou dégénérescences) de suites".

On dira qu'une suite $(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$ (qui correspond à un objet de $\beta(Y)$) est *non-dégénérée* si $f_i \neq 1_{x_{i-1}}$ pour tout i . A toute suite dégénérée, on associe la suite non-dégénérée obtenue en enlevant toutes les identités. Soit $\beta_m(Y) \subset \beta(Y)$ la sous-catégorie pleine constituée par les objets dont la suite non-dégénérée correspondante est de longueur $\leq m$. D'autre part, pour chaque suite non-dégénérée $(p; y, f) = (y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$, on considère le morphisme

$$\eta(p; y, f) : I^{(p)} \rightarrow Y$$

où $I^{(p)}$ est la catégorie avec $p + 1$ objets $0', \dots, p'$ et un morphisme $i' \rightarrow j'$ pour tout couple $i \leq j$. Le morphisme $\eta(p; y, f)$ envoie i' sur y_i et la flèche $(i - 1)' \rightarrow i'$ sur f_i . Ce morphisme induit

$$\beta(I^{(p)}) \rightarrow \beta(Y), \quad \text{et } \forall m, \quad \beta_m(I^{(p)}) \rightarrow \beta_m(Y).$$

On note l'égalité

$$\beta_p(I^{(p)}) = \beta(I^{(p)}).$$

On a la formule

$$\beta_{m+1}(Y) = \beta_m(Y) \cup \coprod_{(m+1; y, f)} \beta_m(I^{(m+1)}) \quad \coprod_{(m+1; y, f)} \beta(I^{(m+1)}).$$

Le coproduit est pris sur toutes les suites non-dégénérées de longueur $m + 1$, notées $(m + 1; y, f)$.

Cette formule est vraie aussi bien avec le coproduit de catégories qu'avec le coproduit de leurs nerfs (on pourrait écrire la deuxième version:

$$\nu\beta_{m+1}(Y) = \nu\beta_m(Y) \cup \coprod_{(m+1; y, f)} \nu\beta_m(I^{(m+1)}) \quad \coprod_{(m+1; y, f)} \nu\beta(I^{(m+1)}).$$

pour être plus précis). Pour voir ceci on note (en écrivant explicitement ce qu'est un p -simplexe du nerf de $\beta(Y) = \beta(\nu Y)$, comme l'a fait ci-dessus pour $\beta(X)$) qu'un p -simplexe dans le nerf de $\beta_{m+1}(Y)$ est ou bien dans $\nu\beta_m(Y)_p$, ou bien dans l'un des $\nu\beta(I^{(m+1)})$.

D'après cette deuxième interprétation, la formule décompose $\beta_{m+1}(Y)$ en un coproduit en tant que 1-catégorie de Segal. Les sous-catégories δ s'y intègrent de façon compatible (en ce sens qu'on a la même décomposition pour $\nu\delta_{m+1}(Y)$), et on a

$$1SeL(\beta_{m+1}(Y), \delta_{m+1}(Y)) = 1SeL(\beta_m(Y), \delta_m(Y)) \\ \cup \coprod_{(m+1;y,f)} 1SeL(\beta_m(I^{(m+1)}), \delta_m(I^{(m+1)})) \quad \coprod_{(m+1;y,f)} 1SeL(\beta(I^{(m+1)}), \delta(I^{(m+1)})).$$

Si $U \rightarrow Y$ est un morphisme fibrant de n -précats de Segal, alors ψ induit une équivalence

$$\psi^* : Sect(Y, U) \rightarrow Sect(1SeL(\beta(Y), \delta(Y)), \psi^*(U)).$$

Ceci est dû au fait que ψ induit une équivalence faible entre $1SeL(B, D)$ et Y (ce principe est le sujet de [34]). Si A est un n -préchamp de Segal sur Y on obtient l'équivalence

$$\psi^* : Sect(Y, \int'_Y A) \xrightarrow{\cong} Sect^{\delta(Y)-eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} \psi^*(A)).$$

Ici $Sect^{\delta(Y)-eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} \psi^*(A))$ est la sous- n -catégorie de Segal pleine des sections qui, restreintes à $\delta(Y)$, sont des eq -sections. Pour voir ceci il faudrait utiliser le théorème 2.5.1 de [95].

Une section sur Y est une eq -section si et seulement si sa restriction sur $\beta(Y)$ est une eq -section. Donc ψ induit une équivalence

$$\psi^* : Sect^{eq}(Y, \int'_Y A) \xrightarrow{\cong} Sect^{eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} \psi^*(A)).$$

D'autre part ψ induit un *isomorphisme*

$$\psi^* : \Gamma(Y^\circ, A) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\beta(Y)^\circ, \psi^* A).$$

Ceci car les morphismes de $\delta(Y)$ agissent comme l'identité dans le préfaisceau $\psi^*(A)$, et donc toute section de $\psi^*(A)$ sur $\beta(Y)^\circ$ est forcément constante sur $\delta(Y)^\circ$. Les sections de $\psi^*(A)$ descendent donc (uniquement) sur la catégorie quotient de $\beta(Y)^\circ$ par $\delta(Y)^\circ$, qui est Y° .

Malheureusement, le remonté $\psi^*(A)$ n'est pas en général fibrant sur $\beta(Y)^\circ$. On contournera ce problème en utilisant 14.2, qui donne une équivalence naturelle

$$\Gamma(Y^\circ, A) \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow, Y} A.$$

En utilisant la description

$$\lim_{\leftarrow, Y} A = \underline{Hom}(Y, nSeCAT')_{1/}(*, A)$$

on obtient (à cause du lemme 16.1 ci-dessus ainsi que le Theorem 2.5.1 de [95]) que le morphisme

$$\lim_{\leftarrow, Y} A \rightarrow \lim_{\leftarrow, \beta(Y)} \psi^* A$$

est une équivalence. Ceci implique que le morphisme

$$\Gamma(\beta(Y)^o, \psi^* A) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \beta(Y)} \psi^* A$$

est une équivalence.

Soit $\psi^*(A) \rightarrow F$ un remplacement fibrant au-dessus de $\beta(Y)$, et regardons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\beta(Y)^o, \psi^* A) & \rightarrow & \lim_{\leftarrow, \beta(Y)} \psi^* A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\beta(Y)^o, F) & \rightarrow & \lim_{\leftarrow, \beta(Y)} F. \end{array}$$

On sait, comme ci-dessus, que la flèche du bas est une équivalence. D'autre part, comme le morphisme $\psi^*(A) \rightarrow F$ est une équivalence dans $\underline{Hom}(Y, nSeCAT')$, on obtient que la flèche verticale à droite est une équivalence. Enfin, on a vu précédemment que la flèche du haut est une équivalence. Donc

$$\Gamma(\beta(Y)^o, \psi^* A) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\beta(Y)^o, F).$$

Le fait que $\psi^*(A) \rightarrow F$ soit une équivalence objet-par-objet au-dessus de $\beta(Y)$ implique que le morphisme induit

$$\int'_{\beta(Y)} \psi^*(A) \rightarrow \int'_{\beta(Y)} F$$

est une équivalence, et donc que

$$Sect^{eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} \psi^*(A)) \rightarrow Sect^{eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} F)$$

est une équivalence. En somme, il suffit de prouver que le morphisme

$$\Gamma(\beta(Y)^o, F) \rightarrow Sect^{eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} F)$$

est une équivalence.

Au vu de cette réduction, on pourra dire qu'on s'est ramené à prouver la proposition pour des catégories de la forme $\beta(Y)$. Le même argument tient avec $\beta^{\text{poset}}(Y)$ à la place de

$\beta(Y)$ (en utilisant le lemme 16.2 à la place de 16.1). Ceci veut dire qu'on peut dorénavant supposer que Y est déjà de la forme $Y = \beta^{\text{poset}}(Z)$ pour une catégorie Z , i.e. que Y est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné (cette idée d'utiliser la subdivision barycentrique deux fois provient de Thomason [101]).

Maintenant, pour F on peut utiliser la décomposition de $\beta_{m+1}(Y)$ en coproduit: on a

$$\Gamma(\beta_{m+1}(Y)^\circ, F|_{\beta_{m+1}(Y)}) = \Gamma(\beta_m(Y)^\circ, F|_{\beta_m(Y)^\circ}) \times \prod_{(m+1; y, f)} \Gamma(\beta_m(I^{(m+1)})^\circ, F|_{\beta_m(I^{(m+1)})^\circ}) \prod_{(m+1; y, f)} \Gamma(\beta(I^{(m+1)})^\circ, F|_{\beta(I^{(m+1)})^\circ}).$$

Soit $i_m : \beta_m(Y)^\circ \rightarrow \beta(Y)^\circ$ l'inclusion. On note que i_m est un crible, i.e. que si $a \rightarrow b$ est un morphisme dans $\beta(Y)^\circ$ (i.e. la suite non-dégénérée qui correspond à a est incluse dans celle qui correspond à b) et si $b \in \beta_m(Y)^\circ$ alors $a \in \beta_m(Y)^\circ$. On obtient, d'après le corollaire 4.3, que i_m^* est un foncteur de Quillen à droite, i.e. préserve les fibrations. Donc $F|_{\beta_m(Y)^\circ}$ est fibrant. Aussi, on peut écrire

$$\Gamma(\beta(Y)^\circ, F) = \underline{\text{Hom}}(*_{\beta(Y)^\circ}, F),$$

tandis que

$$\Gamma(\beta_m(Y)^\circ, F|_{\beta_m(Y)^\circ}) = \underline{\text{Hom}}(i_{m,!} *_{\beta_m(Y)^\circ}, F|_{\beta_m(Y)^\circ})$$

(ceci au vu de la description explicite de $i_{m,!}$ cf la remarque après 4.3). Le morphisme

$$\Gamma(\beta(Y)^\circ, F) \rightarrow \Gamma(\beta_m(Y)^\circ, F|_{\beta_m(Y)^\circ})$$

est fibrant, car il provient de la cofibration

$$i_{m,!} *_{\beta_m(Y)^\circ} \hookrightarrow *_{\beta(Y)^\circ}$$

(le fait que l'avant-dernier morphisme est fibrant sera utilisé directement sur Y mais aussi sur les $I^{(m+1)}$).

On applique maintenant 4.1 à un morphisme

$$p : \beta(I^{(m+1)})^\circ \rightarrow \beta(Y)^\circ$$

provenant d'une suite non-dégénérée $(m+1; y, f)$ dans Y . C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que Y est la catégorie associée à un ensemble S partiellement ordonné: dans ce cas, les objets de $\beta(Y)$ sont les suites décroissantes pour l'ordre dans S . Donc, pour le morphisme p associé à une suite non-dégénérée $(m+1; y, f)$ dans Y (i.e. une suite strictement décroissante de S), on a que la catégorie des objets $b \in \beta(I^{(m+1)})^\circ$ au-dessous d'un objet $a \in \beta(Y)$ est, ou bien vide (si a ne correspond pas à une sous-suite d'objets

de la suite $(m + 1; y, f)$, ou bien admet un objet initial (si a correspond à une sous-suite d'objets de la suite $(m + 1; y, f)$, l'objet initial étant la sous-suite correspondante d'objets de $I^{(m+1)}$). Donc dans les deux cas, la colimite de 4.1 préserve les cofibrations et cofibrations triviales, i.e. $p_!$ est un foncteur de Quillen à gauche et donc p^* préserve les objets fibrants. En particulier,

$$F|_{\beta(I^{(m+1)})^o}$$

est une n -préchamp de Segal fibrant au-dessus de $\beta(I^{(m+1)})^o$. Par les arguments antérieurs, on obtient que

$$F|_{\beta_m(I^{(m+1)})^o}$$

est aussi fibrant.

Les morphismes

$$\Gamma(\beta(I^{(m+1)})^o, F|_{\beta(I^{(m+1)})^o}) \rightarrow \Gamma(\beta_m(I^{(m+1)})^o, F|_{\beta_m(I^{(m+1)})^o})$$

sont fibrants (d'après une des remarques ci-dessus, qu'on avait appliquée à Y , et qu'on applique ici à $I^{(m+1)}$). Donc la décomposition de $\Gamma(\beta_{m+1}(Y)^o, F|_{\beta_{m+1}(Y)^o})$ en produit fibré est aussi un produit fibré homotopique.

On a exactement la même décomposition (qu'on ne réécrit pas) pour

$$Sect^{eq}(\beta_{m+1}(Y), \int'_{\beta_{m+1}(Y)} F|_{\beta_{m+1}(Y)}),$$

et cette décomposition est aussi un produit fibré homotopique. En effet, la décomposition de $\beta_{m+1}(Y)$ en coproduit est une décomposition en coproduit de 1-précats de Segal, d'où la décomposition pour les sections; et le morphisme sur les sections qui correspond à $\beta_m(I^{(m+1)}) \hookrightarrow \beta(I^{(m+1)})$, est une fibration d'où il découle que le produit fibré dans la décomposition est un produit fibré homotopique.

On remarque maintenant qu'on a

$$\Gamma(\beta(Y)^o, F) = \lim_{\leftarrow, m} \Gamma(\beta_m(Y)^o, F|_{\beta_m(Y)^o}),$$

et cette limite est une limite dans laquelle tous les morphismes sont fibrants; c'est donc aussi une limite homotopique. De plus, on a

$$Sect^{eq}(\beta(Y), \int'_{\beta(Y)} F) = \lim_{\leftarrow, m} Sect^{eq}(\beta_m(Y), \int'_{\beta_m(Y)} F|_{\beta_m(Y)}),$$

et cette limite est encore une limite où les morphismes sont fibrants, donc c'est une limite homotopique.

A cause de ces dernières remarques sur les limites, il suffit de prouver que les morphismes

$$\Gamma(\beta_m(Y)^o, F|_{\beta_m(Y)^o}) \rightarrow Sect^{eq}(\beta_m(Y), \int'_{\beta_m(Y)} F|_{\beta_m(Y)})$$

sont des équivalences. On va le faire par récurrence sur m . Nous pouvons supposer que c'est connu pour m , pour toutes les données initiales (Y, A) et pour tout choix de F . On peut en particulier appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir que le morphisme

$$\Gamma(\beta_m(I^{(m+1)})^o, F|_{\beta_m(I^{(m+1)})^o}) \rightarrow Sect^{eq}(\beta_m(I^{(m+1)}), \int'_{\beta_m(I^{(m+1)})} F|_{\beta_m(I^{(m+1)})})$$

est une équivalence (car, en réalité, $F|_{\beta(I^{(m+1)})^o}$ aurait pu aussi bien provenir de la couple $(I^{(m+1)}, A|_{I^{(m+1),o}})$). Au vu de nos décompositions des deux cotés du morphisme

$$\Gamma(\beta_{m+1}(Y)^o, F|_{\beta_{m+1}(Y)^o}) \rightarrow Sect^{eq}(\beta_{m+1}(Y), \int'_{\beta_{m+1}(Y)} F|_{\beta_{m+1}(Y)})$$

en produits fibrés homotopiques, et au vu de l'hypothèse de récurrence, il suffit, pour obtenir que c'est une équivalence, de prouver que le morphisme

$$\Gamma(\beta(I^{(m+1)})^o, F|_{\beta(I^{(m+1)})^o}) \rightarrow Sect^{eq}(\beta(I^{(m+1)}), \int'_{\beta(I^{(m+1)})} F|_{\beta(I^{(m+1)})})$$

est une équivalence.

En faisant marche-arrière à travers notre argument ci-dessus, on voit qu'il suffit de prouver que le morphisme

$$\Gamma(I^{(m+1),o}, A|_{I^{(m+1),o}}) \rightarrow Sect^{eq}(I^{(m+1)}, \int'_{I^{(m+1)}} A|_{I^{(m+1)}})$$

est une équivalence. En somme, nous nous sommes maintenant réduits à prouver la proposition pour le cas $Y = I^{(m+1)}$.

Pour simplifier les notations, on pose $p := m + 1$ et on va prouver la proposition dans le cas $Y := I^{(p)}$. Pour deux objets i et j de Y , on a une flèche $i \rightarrow j$ pour $i \leq j$. En particulier, 0 est l'objet initial de Y . Si A est un n -préchamp de Segal sur Y^o , on a

$$\Gamma(Y, A^o) = A(0).$$

Il s'agit donc (au vu du lemme 16.3) de prouver que le morphisme

$$Sect^{eq}(Y, \int'_Y A) \rightarrow A'(0)$$

est une équivalence (ici $A'(0)$ est la fibre de $f'_Y A$ au-dessus de $0 \in Y$, qui est équivalente à $A(0)$). En écrivant l'équivalence faible de 1-précats de Segal

$$I \cup^{\{1\}} I \cup^{\{2\}} \cup \dots \cup^{\{(p-1)\}} I \rightarrow Y$$

on voit qu'il suffit de traiter le cas $Y = I$, i.e. de prouver que

$$\text{Sect}^{\text{eq}}(I, \int_I A) \rightarrow A'(0)$$

est une équivalence. Or ceci est le résultat du lemme 16.5, ce qui termine la démonstration de la proposition 16.6. \square

Cet énoncé, combiné avec la proposition 14.2 indique que si A est un foncteur strict d'une 1-catégorie Y vers $n\text{SeCat}$ on peut calculer sa limite à l'aide des sections de l'intégrale:

$$\lim_{\leftarrow, Y} A \cong \text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y A).$$

Il y a un résultat "dual" (mais qui ne s'en déduit pas par dualité) qui permet le calcul des colimites: c'est le théorème de Thomason [99] dans le cas des préfaisceaux simpliciaux ($n = 0$). Pour n quelconque, nous le formulons comme une conjecture.

Conjecture 16.7 *Soit A un préfaisceau de n -catégories de Segal au-dessus de Y^o . Soit horiz l'ensemble des flèches "horizontales" i.e. de y à $\text{res}_f(y)$ correspondant à l'identité de $\text{res}_f(y)$, dans $f_Y A$. Alors on a*

$$\lim_{\rightarrow, Y} A \cong n\text{SeL}(\int_Y A, \text{horiz})$$

i.e. la colimite de A sur Y se calcule en localisant $f_Y A$ en les 1-flèches horizontales.

On termine cette section par la formulation d'un problème. Dans SGA1, la théorie des champs et de la descente était envisagée dans le cadre des *catégories fibrées* [51] [43], mais nous n'avons repris ci-dessus que la moitié facile de cela, i.e. la construction d'une "n-catégorie de Segal fibrée" à partir d'un préfaisceau strict de n -catégories de Segal.

Problème 16.8 *Définir une notion de n -catégorie de Segal fibrée $F \rightarrow \mathcal{Y}$ au-dessus d'une 1-catégorie \mathcal{Y} (ou même —plus difficile— au-dessus d'une autre n -catégorie de Segal), et établir la correspondance avec nos n -champs de Segal. Par exemple, définir la $n + 1$ -catégorie de Segal $n\text{SeCATFIB}/\mathcal{Y}$ des n -catégories de Segal fibrées au-dessus de Y et donner une équivalence $n\text{SeCATFIB}/\mathcal{Y} \cong n\text{SeCHAMP}(\mathcal{Y}^{\text{gro}})$.*

Cette équivalence devrait passer par une construction $A \mapsto f_Y A$ pour tout morphisme faible A i.e. morphisme $A : \mathcal{Y}^o \rightarrow n\text{SeCAT}'$.

17. Préfaisceaux de Quillen

C'est en étudiant l'exemple du champ des modules des complexes (cf §21 ci-dessous) que nous avons ressenti la nécessité de considérer des “préfaisceaux de cmf”. Un point de vue qui se répand actuellement est que les “bons” morphismes entre catégories de modèles fermées, sont les *foncteurs de Quillen à gauche* (notion qu'on a rappelée au §4)—cf par exemple le livre de Dwyer-Hirschhorn-Kan [30], ou également [60] où Hovey définit la *2-catégorie des catégories de modèles fermées* dont les objets sont les catégories de modèles fermées et les morphismes sont les foncteurs de Quillen à gauche. On est donc conduit naturellement vers la notion suivante.

Soit \mathcal{X} une catégorie. Un *préfaisceau de Quillen à gauche* (resp. *à droite*) sur \mathcal{X} est un préfaisceau de catégories \mathbf{M} , où chaque \mathbf{M}_X est muni d'une structure de catégorie de modèles fermée, telle que les foncteurs de restriction soient des foncteurs de Quillen à gauche (resp. à droite).²⁰ On note que les foncteurs de restriction ne préservent pas forcément toutes les structures (elles préservent les cofibrations et cofibrations triviales, mais pas obligatoirement les fibrations ni les équivalences faibles qui ne sont pas des cofibrations).

Si on fait un rapprochement entre les notions de topos et de cmf, les notions de préfaisceau de Quillen à gauche ou à droite sont analogues aux notions de “catégorie bifibrée en topos” et “catégorie bifibrée en duals de topos” de SGA 4 ([4] exposé Vbis, déf. 1.2.1, 1.2.2).

Si \mathbf{M} est un préfaisceau de Quillen à gauche, soit \mathbf{M}^* le préfaisceau qui à chaque $x \in \mathcal{X}$ associe la catégorie de modèles fermée $\mathbf{M}^*(x)$ duale de $\mathbf{M}(x)$. Alors \mathbf{M}^* est un préfaisceau de Quillen à droite. Ceci nous permet de ne nous intéresser qu'aux préfaisceaux de Quillen à gauche. Un peu plus intéressant: soit \mathbf{M}^\dagger le préfaisceau sur la catégorie opposée \mathcal{X}^o , avec les mêmes catégories de modèles fermées $\mathbf{M}(x)$ comme valeurs, mais obtenu en utilisant les adjoints à droite comme morphismes de restriction. Alors \mathbf{M}^\dagger est aussi un préfaisceau de Quillen (à droite).

Soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen au-dessus de \mathcal{X} . Les objets cofibrants définissent un sous-préfaisceau de catégories \mathbf{M}_c et son sous-préfaisceau $W\mathbf{M}_c$ où les morphismes sont les équivalences faibles entre objets cofibrants (qui sont bien préservées par les restrictions). On définit un préfaisceau de catégories simpliciales $L(\mathbf{M})$ au-dessus de \mathcal{X} en prenant pour

²⁰Il serait peut-être préférable de parler de *1-champ* de Quillen car les valeurs sont des 1-catégories et on pourrait envisager un problème de cohérence. En fait, puisque la notion de catégorie de modèles fermée est stable par équivalence de la catégorie sous-jacente, on peut toujours strictifier et ne parler que de préfaisceaux de catégories. Il pourrait aussi y avoir un problème de cohérence pour le choix des adjoints des foncteurs de restriction. Nous ignorons ces problèmes, considérant que s'ils existent, ils n'ont d'intérêt ni géométrique ni topologique (de même que nous ignorons les subtilités des questions de cardinalité).

$L(\mathbf{M})(X)$ la catégorie simpliciale localisée de Dwyer-Kan

$$L(\mathbf{M})(X) := L(\mathbf{M}_c(X), W\mathbf{M}_c(X)).$$

Comme d'habitude, on considère ce préfaisceau comme un 1-préchamp de Segal sur \mathcal{X} .

Pour des raisons de simplification des notations ultérieures, il est plus commode de prendre le point de vue "covariant". On considère dorénavant une catégorie Y et un préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{M} sur Y^o , c'est donc une famille de cmf $\mathbf{M}(y)$ avec des foncteurs de Quillen à gauche de restriction, qui sont covariants.

Soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y^o ; si $f : y \rightarrow z$ est un morphisme de Y notons

$$res_f : \mathbf{M}(y) \rightarrow \mathbf{M}(z)$$

le foncteur de Quillen à gauche de restriction; et notons res_f^* son adjoint à droite. On dispose de la "catégorie fibrée" (cf la section précédente)

$$\int_Y \mathbf{M} \rightarrow Y$$

et de la catégorie des sections

$$Sect(Y, \int_Y \mathbf{M}).$$

Un objet σ de $Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})$ consiste en une collection d'objets $\sigma(y) \in \mathbf{M}(y)$ pour $y \in Y$ avec des morphismes

$$\sigma(f) : res_f \sigma(y) \rightarrow \sigma(z).$$

qu'on peut interpréter par adjonction:

$$\sigma(f) : \sigma(y) \rightarrow res_f^* \sigma(z).$$

Ces morphismes sont soumis à une contrainte d'associativité. Un morphisme $a : \sigma \rightarrow \tau$ dans $Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})$ est une collection de morphismes

$$a(y) : \sigma(y) \rightarrow \tau(y) \quad \text{dans } \mathbf{M}(y)$$

soumis à la condition de naturalité habituelle. On dira qu'un morphisme a est une *équivalence faible* si, pour chaque y , $a(y)$ est une équivalence faible dans $\mathbf{M}(y)$.

On peut observer que si $\mathbf{M} = \underline{M}$ est le préfaisceau constant prenant pour valeur la catégorie de modèles fermée fixe M (qui est bien un préfaisceau de Quillen à gauche), alors on a

$$\int_Y \underline{M} = Y \times M$$

et

$$Sect(Y, \int_Y \underline{M}) = M^Y.$$

Rappelons qu'on dispose de plusieurs structures de catégories de modèles fermées sur M^Y sous diverses hypothèses concernant M et Y .

(I) D'abord il y a la structure engendrée par les cofibrations de Hirschhorn, de type Bousfield-Kan (on l'avait appelée de "type HBKQ" au §5); celle-ci existe dès que M est engendrée par les cofibrations (Hirschhorn [59]). Les fibrations sont les fibrations objet-par-objet.

(II) Ensuite il y a la structure que Dwyer-Hirschhorn-Kan qualifient de "unusual" mais qui est la structure habituellement utilisée en K -théorie, et apparemment due à K. Brown, Joyal et Jardine dans le cas de diagrammes d'ensembles simpliciaux (Hirschhorn l'appelle "structure de Heller"); ici les cofibrations sont les cofibrations objet-par-objet. L'existence de cette structure semble coïncider à peu près avec celle de la structure (I) de type HBKQ, mais nous n'avons pas trouvé dans la littérature un critère général pour cette existence (cf cependant le livre de Goerss-Jardine [46]).

(III) Enfin, si Y est une catégorie de Reedy, il y a une structure de modèles sur M^Y sans hypothèse supplémentaire sur M (tout au plus, si la fonction degré est indexée par un ordinal plus grand que ω , il faut supposer que les limites de cette taille existent dans M). Cette structure est en général différente des deux autres (pour la définition, voir la démonstration du théorème ci-dessous). Pour cette *structure de Reedy* voir [86], [59], [30], [46]. La partie essentielle de la notion de fibration de Reedy apparaît aussi dans la notion d'hyper-recouvrement exposée par Verdier dans SGA 4 ([4], exposé V, §7, définition 7.3.1.1 (H3)).

Si \mathbf{M} est un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y^o , on a les structures analogues sur $\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$:

Théorème 17.1 *Soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y^o . Alors on dispose des structures suivantes de catégorie de modèles fermée sur $\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$ (les équivalences faibles sont toujours les morphismes qui sont objet-par-objet des équivalences faibles):*

- (I) *La structure de type HBKQ où les fibrations sont les morphismes $a : \sigma \rightarrow \tau$ tel que $a(y)$ est une fibration pour tout $y \in Y$: elle existe si chaque $\mathbf{M}(y)$ est engendré par cofibrations;*
- (II) *La structure de type Brown-Jardine-Heller où les cofibrations sont les morphismes $a : \sigma \rightarrow \tau$ tel que $a(y)$ soit une cofibration pour tout $y \in Y$, à condition que cette classe de cofibrations (resp. les cofibrations \cap les équivalences faibles) admette un ensemble générateur I (resp. J) permettant l'argument du petit objet (voir avant 2.5), et qu'en outre chaque $\mathbf{M}(y)$ soit engendré par cofibrations; et*
- (III) *La structure de type Reedy (cf la définition ci-dessous), si Y est une catégorie de Reedy.*

Comparer avec la proposition 1.2.12 de SGA 4 [4] exposé Vbis.

Preuve: Il peut être utile de revoir la preuve de l'énoncé 2.5 ci-dessus, mais pour (I) nous conseillons au lecteur de se reporter directement aux références [59] [30] au lieu de s'en

tenir à 2.5, car nous utiliserons ici directement les arguments du type [30].

On note d’abord que l’ensemble W des équivalences faibles satisfait automatiquement la clotûre sous rétractes et la propriété “trois pour le prix de deux”.

Dans (I) et (II) la condition que chaque $\mathbf{M}(y)$ soit engendré par cofibrations (et donc admette des petites limites et colimites) implique que $Sect(Y, f_Y \mathbf{M})$ admet des petites limites et colimites.

Pour (I) la preuve est la même que dans [59], [30]. Soit σ une section et $i : \sigma(y) \rightarrow u$ une cofibration dans $\mathbf{M}(y)$. On obtient alors la *cofibration librement engendrée par i* , $Lib(i) : \sigma \rightarrow \nu$, définie par

$$\nu(z) = \coprod_{f:y \rightarrow z} res_f(u) \sqcup \coprod_{f:res_f(\sigma(y))} \sigma(z).$$

Soient I (resp. J) l’ensemble des cofibrations de la forme $Lib(i)$ où $i \in I(y)$, $y \in Y$ (resp. $i \in J(y)$, $y \in Y$). Les I -injectifs (resp. J -injectifs) sont juste les morphismes qui sont objet-par-objet des fibrations (resp. fibrations triviales); et on vérifie facilement que le critère de reconnaissance (“Recognition lemma” [59] 13.3.1, [30] 8.1) est satisfait.²¹

Pour (II) on s’appuie sur le lemme 2.5. Rappelons que la condition que chaque $\mathbf{M}(y)$ est engendré par cofibrations nous donne les propriétés de 2.5 (0)-(7) pour chaque $\mathbf{M}(y)$. Comme conséquence on obtient immédiatement les propriétés (0), (1), (2), (6) et (7) pour $Sect(Y, f_Y \mathbf{M})$. On peut remarquer que les cofibrations de la structure (I) ci-dessus sont des cofibrations ici aussi, donc la propriété de relèvement pour ces cofibrations implique qu’un morphisme est objet-par-objet une équivalence faible. Ceci donne (3). Enfin (4) et (5) forment la première partie de l’hypothèse ici, donc par le lemme 2.5 on obtient (II).

Remarque: Tout comme pour l’application du lemme 2.5, on peut dire que la partie de l’hypothèse (II) qui correspond à 2.5 (4) et (5) serait conséquence du caractère ensemblistement raisonnable des notions de cofibration et d’équivalence faible, dans tous les exemples qu’on va rencontrer. Voir Jardine [63] pour la technique nécessaire pour donner une preuve rigoureuse de ce type de condition. Au vu de cette remarque, on pourra considérer que l’hypothèse de (II) se réduit à demander (comme pour (I)) simplement que les $\mathbf{M}(y)$ soient engendrés par cofibrations.

Les catégories de Reedy

Avant d’aborder la partie (III) du théorème 17.1, on fait quelques rappels sur les “catégories de Reedy”. Les références sont [86], [15], [59], [30], [46], voir aussi [33].

²¹Essentiellement la seule chose à vérifier—comme c’est indiqué dans ([30], preuve de 48.7: la structure de catégorie de modèles sur $S - Cat$, p. 61), voir aussi notre lemme 2.5—est que la colimite de J -cofibrations régulières est encore dans W . Dans le présent cas ceci est vrai ponctuellement au-dessus de chaque objet de Y .

Le jeu entre les “latch” et les “match” qui suivra, n’est qu’une façon systématique et avec une notation abstraite de prendre en compte le fait qu’il y a des morphismes de dégénérescence dans Δ qui vont dans le sens opposé des morphismes “face”. On peut probablement, dans toutes les applications, considérer au lieu d’objets simpliciaux, des objets paramétrisés par la sous-catégorie $\vec{\Delta}$ engendrée par les morphismes face. Dans ce cas on n’aurait qu’à considérer la partie “Latch” de la discussion ci-dessous et beaucoup d’arguments deviendraient plus facile.

On rappelle d’abord la définition: une *catégorie de Reedy* est une catégorie Y munie de deux sous-catégories (avec les mêmes objets que Y) appelées respectivement *sous-catégorie directe* et *sous-catégorie inverse*

$$\vec{Y} \subset Y \quad \text{et} \quad \overleftarrow{Y} \subset Y,$$

tel qu’il existe une fonction *degré* (vers un ordinal qui sera le plus souvent ω) telle que les morphismes de \vec{Y} sauf les identités augmentent strictement le degré, les morphismes de \overleftarrow{Y} sauf les identités diminuent strictement le degré, et tout morphisme f se factorise uniquement

$$f = \vec{f} \overleftarrow{f} \quad \text{avec} \quad \vec{f} \in \vec{Y}, \quad \overleftarrow{f} \in \overleftarrow{Y}.$$

On précise ici qu’on écrit les compositions dans le sens habituel, donc dans cette formule la source de \vec{f} (qui est le but de \overleftarrow{f}) est de degré \leq le minimum des degrés de la source et du but de f ; et en cas d’égalité f est ou bien directe ou bien inverse.

Les exemples classiques sont la catégorie Δ et son opposé Δ° , [15], [86]. L’exemple que nous utiliserons est la catégorie ΔK des simplexes d’un ensemble simplicial K (ou son opposé $\Delta^\circ K$). Cet exemple apparaît dans [59], [30], etc. Plus particulièrement on va utiliser le cas de $\Delta \nu \mathcal{Y}$ où $\nu \mathcal{Z}$ est le nerf d’une 1-catégorie \mathcal{Z} . C’est la catégorie notée $\beta(\mathcal{Z})$ au §16 ci-dessus.

Pour un objet $y \in Y$ on définit les catégories *relâchantes* (“latching”) ²² $Latch(y)$ et *appariantes* (“matching”) $Match(y)$. En fait on définit

$$Latch(y) + \{y\} := \vec{Y} / y$$

(les objets de \vec{Y} au-dessus de y) et on pose

$$Latch(y) := \vec{Y} / y - \{y\} \subset Latch(y) + \{y\}.$$

Aussi

$$\{y\} + Match(y) := y / \overleftarrow{Y}$$

²²Le mot “relâchant” n’est pas une traduction stricte de “latching” mais comporte la même sonorité et semble bien correspondre à la situation.

(les objets de \overleftarrow{Y} au-dessous de y) et

$$\text{Match}(y) := y / \overleftarrow{Y} - \{y\} \subset \{y\} + \text{Match}(y).$$

On note

$$\text{Latch}(y) + \{y\} + \text{Match}(y)$$

la catégorie obtenue en attachant $\text{Latch}(y) + \{y\}$ à $\{y\} + \text{Match}(y)$ le long de l'objet y , avec exactement un morphisme entre les objets de $\text{Latch}(y)$ et $\text{Match}(y)$. On note

$$\text{Latch}(y) + \text{Match}(y) \subset \text{Latch}(y) + \{y\} + \text{Match}(y)$$

la sous-catégorie obtenue en enlevant y . Le morphisme de 1-précats de Segal

$$(\text{Latch}(y) + \{y\}) \cup^{\{y\}} (\{y\} + \text{Match}(y)) \rightarrow \text{Latch}(y) + \{y\} + \text{Match}(y)$$

est une équivalence faible (on laisse la preuve, qui est similaire à celle de 17.2 ci-dessous, aux soins du lecteur). En particulier, pour une n -catégorie de Segal fibrante C' un morphisme

$$\text{Latch}(y) + \{y\} + \text{Match}(y) \rightarrow C'$$

est essentiellement la même chose que deux morphismes

$$\text{Latch}(y) + \{y\} \rightarrow C', \quad \{y\} + \text{Match}(y) \rightarrow C'$$

qui envoient y sur le même objet de C' .

Pour un degré k fixé, on note $F^k Y \subset Y$ la sous-catégorie des objets de degré $\leq k$. Si y est de degré k alors on a un morphisme

$$\text{Latch}(y) + \text{Match}(y) \rightarrow F^{k-1} Y.$$

On a que Y est la colimite filtrante des $F^k Y$.

La description des diagrammes sur une catégorie de Reedy de [30], [46], [15], [35], [16], [86], [33], et particulièrement Hirschhorn ([59] Theorem 16.2.12) où cela apparaît très clairement, revient essentiellement au lemme suivant.

Lemme 17.2 *Pour tout d , le morphisme de 1-précats de Segal*

$$\begin{aligned} F^{d-1} Y \cup \coprod_{\text{deg}(y)=d} \text{Latch}(y) + \text{Match}(y) & \quad \coprod_{\text{deg}(y)=d} \text{Latch}(y) + \{y\} + \text{Match}(y) \\ & \rightarrow F^d Y \end{aligned}$$

est une équivalence faible.

Ce lemme généralise éventuellement les références ci-dessus en prenant en compte (via la notion de 1-précat de Segal) les homotopies supérieures. Nous aurons besoin de cet aspect dans les prochains chapitres. Pour la partie (III) du théorème 17.1, la version ([59] Theorem 16.2.12)—qui est l'énoncé obtenu à partir de notre lemme en appliquant la troncation $\tau_{\leq 1}$ —suffirait. Au vu de cela, nous repoussons la démonstration jusqu'à la fin du chapitre.

Le lemme 17.2 dit que pour une n -catégorie de Segal fibrante C' , se donner un morphisme $f_k : F^k Y \rightarrow C'$ revient à se donner un morphisme $f_{k-1} : F^{k-1} Y \rightarrow C'$ et pour tout objet y , des extensions des morphismes

$$f_{k-1}|_{Latch(y)} \text{ en } Latch(y) + \{y\} \rightarrow C',$$

et

$$f_{k-1}|_{Match(y)} \text{ en } Match(y) + \{y\} \rightarrow C',$$

prenant la même valeur sur y , et telles que le morphisme induit (essentiellement bien défini)

$$Latch(y) + \{y\} + Match(y) \rightarrow C'$$

ait f_{k-1} pour restriction à $Latch(y) + Match(y)$. Cette interprétation provient de Hirschhorn [59].

La structure (III) du théorème 17.1

On doit dire quelles sont les fibrations et cofibrations. Soit σ une section et $y \in Y$. Soient $latch(\sigma, y)$ et $match(\sigma, y)$ dans $\mathbf{M}(y)$ les *objets relâchants* et *appariants* de σ . Ces objets sont définis respectivement comme la colimite sur $Latch(y)$ du foncteur

$$res_{Latch(y) \rightarrow y} \circ \sigma : Latch(y) \rightarrow \mathbf{M}(y)$$

où

$$res_{Latch(y) \rightarrow y} : \int_{Latch(y)} \mathbf{M}|_{Latch(y)} \rightarrow \mathbf{M}(y)$$

est le morphisme donné par les restrictions res_f pour $f : z \rightarrow y$; et la limite sur $Match(y)$ du foncteur

$$res_{y \rightarrow Match(y)}^* \circ \sigma : Match(y) \rightarrow \mathbf{M}(y)$$

où

$$res_{y \rightarrow Match(y)}^* : \int_{Match(y)} \mathbf{M}|_{Match(y)} \rightarrow \mathbf{M}(y)$$

est le morphisme donné par les adjoints des restrictions res_g^* pour $g : y \rightarrow w$. Pour définir $res_{y \rightarrow Match(y)}^*$ on note qu'on a, pour

$$y \xrightarrow{g} w \xrightarrow{h} x,$$

une transformation naturelle

$$res_g^* \rightarrow res_{hg}^* \circ res_h,$$

qui provient du morphisme d'adjonction

$$1 \rightarrow res_h^* \circ res_h.$$

On a une factorisation

$$latch(\sigma, y) \rightarrow \sigma(y) \rightarrow match(\sigma, y).$$

On dira (en suivant [86] [59] [30] *et al.*) que σ est *cofibrant (de Reedy)* si les morphismes $latch(\sigma, y) \rightarrow \sigma(y)$ sont des cofibrations dans $\mathbf{M}(y)$, et que σ est *fibrant (de Reedy)* si les morphismes $\sigma(y) \rightarrow match(\sigma, y)$ sont des fibrations dans $\mathbf{M}(y)$. Plus généralement pour $a : \sigma \rightarrow \tau$ on obtient l'objet relâchant relatif

$$latch(a, y) := latch(\tau, y) \cup^{latch(\sigma, y)} \sigma(y)$$

avec morphisme

$$latch(a, y) \rightarrow \tau(y);$$

on dira que a est une *cofibration (de Reedy)* si ce morphisme est une cofibration dans $\mathbf{M}(y)$. Dualelement on obtient l'objet appariant relatif

$$match(a, y) := match(\sigma, y) \times_{match(\tau, y)} \tau(y)$$

avec morphisme

$$\sigma(y) \rightarrow match(a, y);$$

et on dira que a est une *fibration (de Reedy)* si ce morphisme est une fibration dans $\mathbf{M}(y)$.

La preuve que ces trois classes de morphismes forment une structure de catégorie de modèles fermée est la même que dans le cas du préfaisceau constant $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{M}}$, cf [86] [59] *et al.*; nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification.

Ceci termine la démonstration de (III) et donc du théorème 17.1. □

Preuve du lemme 17.2

On garde les notations du lemme à démontrer.

On peut supposer que $Y = F^d Y$ et on pose $Z := F^{d-1} Y$. Notons A^0 le coproduit de l'énoncé. C'est un ensemble simplicial (sous-ensemble de νY), qu'on considère comme 1-précat de Segal. On va obtenir νY comme limite d'une suite (éventuellement transfinie si le nombre d'objets de Y est plus que dénombrable)

$$\dots A^i \subset A^{i+1} \dots$$

de sous-ensembles simpliciaux de νY . A chaque fois on rajoutera un “simplexe régulier” (définition ci-dessous), et on va prouver que les $A^i \subset A^{i+1}$ sont des cofibrations triviales de 1-précats de Segal.

Rappelons que les éléments de $\nu(Y)_p$ sont les suites composables

$$(y, f) = (y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$$

avec $f_i : y_{i-1} \rightarrow y_i$ dans Y . On dira qu’un tel élément est un *simplexe régulier* si aucun des f_i n’est l’identité, et si pour tout $1 \leq i \leq p$, ou bien $f_i \in \vec{Y}$, ou bien $f_i \in \overleftarrow{Y}$. Pour un simplexe régulier, on appellera *pic* tout sommet i.e. objet y_i avec $f_{i-1} \in \vec{Y}$ et $f_i \in \overleftarrow{Y}$, ce qui équivaut à la condition $\text{deg}(y_{i-1}) < \text{deg}(y_i) > \text{deg}(y_{i+1})$. On appellera *vallée* tout objet y_i tel que $f_{i-1} \in \overleftarrow{Y}$ et $f_i \in \vec{Y}$, ce qui équivaut à la condition $\text{deg}(y_{i-1}) > \text{deg}(y_i) < \text{deg}(y_{i+1})$. La condition de Reedy implique que si y_i est une vallée, alors le simplexe en question est le seul simplexe régulier de longueur $\leq p$ contenant la face où on enlève y_i .

Pour un élément $(y, f) \in \nu(Y)_p$ on obtient un morphisme $(y, f) : h(p) \rightarrow Y$ où $h(p)$ est l’ensemble simplicial représenté par p , i.e. le p -simplexe standard. On appellera “image d’un simplexe (y, f) ” l’image de ce morphisme. L’image contient tous les simplexes “hyper-faces” de (y, f) , qui sont tous les simplexes obtenus en enlevant certains des y_i ; ainsi que tous leurs dégénérescences.

On choisit un ordre total \prec sur l’ensemble des simplexes réguliers de νY non contenus dans A^0 , assujetti aux conditions suivantes: si

$$(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p) \prec (y'_0, \dots, y'_q; f'_1, \dots, f'_q)$$

alors

$$p \leq q$$

et, si $p = q$ alors

$$\sum_{i=0}^p \text{deg}(y_i) \leq \sum_{i=0}^p \text{deg}(y'_i).$$

Maintenant, on part de A^0 et on ajoute les images de $h(p)$ pour les simplexes réguliers $(y, f) : h(p) \rightarrow \nu(Y)$, un par un, suivant l’ordre total \prec (aux ordinaux limites on insère un objet qui est la colimite de ce qui vient avant, puis on recommence en ajoutant le prochain simplexe). On obtient une suite $A^i \subset \nu(Y)$. On va montrer qu’une cofibration $A^i \rightarrow A^{i+1}$ qui correspond à l’addition d’un simplexe régulier $(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$, est une équivalence faible de 1-précats de Segal. Ceci donnera le lemme (il y a un argument de colimite filtrante à faire pour les ordinaux limites et à la fin du processus, que nous laissons au lecteur).

On va prouver, par récurrence sur i , l’énoncé suivant:

(*) un simplexe dégénéré est dans A^i si et seulement si le simplexe non-dégénéré correspondant est dans A^i .

Soit $A^i \rightarrow A^{i+1}$ une cofibration qui correspond à l'addition d'un simplexe régulier $(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$, et soit $h(p) \rightarrow \nu(Y)$ le morphisme correspondant à ce simplexe. Si on pose

$$U := h(p) \times_{A^i} \nu(Y) \subset h(p),$$

alors on a

$$A^{i+1} = h(p) \cup^U A^i.$$

Il s'agit donc de prouver que $U \rightarrow h(p)$ est une cofibration triviale de 1-précats de Segal. On note d'abord que par l'hypothèse (*) pour A^i , un élément dégénéré de $h(p)_q$ est dans U si et seulement si l'élément non-dégénéré correspondant est dans U . Il s'agit donc de comprendre quelles hyper-faces de $h(p)$ sont dans U . On a la caractérisation suivante:

(**) Une hyper-face de $h(p)$ qui correspond à un sous-ensemble $J \subset \{0, \dots, p\}$, appartient à U si et seulement s'il existe $i \in \{0, \dots, p\}$ avec $i \notin J$ et tel que y_i ne soit pas une vallée de $(y_0, \dots, y_p; f_1, \dots, f_p)$.

Prouvons ceci. On considère l'hyper-face correspondant à

$$J = \{j_0, \dots, j_q\} \subset \{0, \dots, p\}$$

(inclusion stricte). Ceci correspond à l'élément

$$J^*(y, f) := (y_{j_0}, \dots, y_{j_q}, f'_1, \dots, f'_q) \in \nu Y$$

où les f'_j sont compositions des f_i . Soit $(z, g) = (z_0, \dots, z_r; g_1, \dots, g_r)$ le simplexe régulier obtenu en remplaçant dans $J^*(y, f)$ toute flèche $f'_k : y_{j_{k-1}} \rightarrow y_{j_k}$ qui n'est pas dans \vec{Y} ni dans \overleftarrow{Y} , par la paire de flèches

$$y_{j_{k-1}} \xrightarrow{g'} z \xrightarrow{g''} y_{j_k}$$

avec $g' \in \overleftarrow{Y}$ et $g'' \in \vec{Y}$. On laisse inchangées les flèches f'_k qui sont soit dans \vec{Y} soit dans \overleftarrow{Y} . Aussi on contracte toutes les identités f'_k qui apparaissent dans $J^*(y, f)$. On note que $J^*(y, f)$ est dans l'image de (z, g) .

Une flèche f'_k qui est remplacée (ou contractée) dans le procédé ci-dessus, provient forcément d'une composition d'au moins deux flèches f_i . Donc la longueur r de (z, g) est $\leq p$. D'autre part, si $r = p$ alors

$$\sum_{i=0}^p \deg(z_i) \leq \sum_{i=0}^p \deg(y_i).$$

En effet, si $f'_k = f_{i+1}f_i = g_{i+1}g_i$ alors y_i est ou bien un pic ou bien une vallée: dans le cas contraire, f'_k est ou bien dans \vec{Y} ou bien dans \overleftarrow{Y} et n'est pas remplacé dans (z, g) (et f'_k

n'est pas non plus une identité donc elle n'est pas non plus contractée). Si y_i est une vallée alors $z_i = y_i$; si y_i est un pic, dans ce cas z_i est une vallée de (z, g) et $\deg(z_i) < \deg(y_i)$.

D'après le paragraphe précédent, si le complémentaire de J dans $\{0, \dots, p\}$ contient un pic y_i alors l'une des deux inégalités sera stricte et (d'après ce qu'on a imposé à l'ordre \prec) on a $(z, g) \prec (y, f)$ et donc $J^*(y, f) \in A^i$. Si le complémentaire de J contient un y_i qui n'est ni pic ni vallée, alors comme l'une des flèches f'_k qui est une composition d'au moins deux flèches f_i , n'est pas remplacée par deux flèches g , on a $r < p$ et de nouveau $J^*(y, f) \in A^i$. Ceci prouve une des directions de l'énoncé (**) (il faut noter que, dans l'argument ci-dessus, on peut tomber, sans le dire, sur un simplexe qui est dans A^0 au lieu d'être ajouté dans la suite organisée par \prec).

Par ailleurs, s'il y a une contraction d'un $f'_k = 1$ alors la longueur décroît: $r < p$ et $J^*(y, f) \in A^i$. On voit que tout nouveau simplexe de la forme $J^*(y, f)$ dans A^{i+1} qui est dégénéré appartient déjà à A^i ; et les autres simplexes dégénérés proviennent des dégénérescences de simplexes de la forme $J^*(y, f)$. Ceci prouve (*) pour A^{i+1} .

Supposons pour compléter la preuve de (**) que le complémentaire de J consiste entièrement de vallées de (y, f) . Dans ce cas, pour tout $i \notin J$, on a $i-1 \in J$ et $i+1 \in J$, et l'un des morphismes dans $J^*(y, f)$ est

$$f'_k = f_{i+1}f_i : y_{i-1} \rightarrow y_{i+1}.$$

On note que f'_k n'est pas dans \vec{Y} ni dans \overleftarrow{Y} . Donc, si le simplexe $J^*(y, f)$ provient de l'image d'un simplexe régulier (w, h) alors la flèche f'_k est forcément décomposée dans (w, h) comme produit d'au moins deux flèches h . Il s'ensuit que la longueur de (w, h) est au moins p . En cas d'égalité, chacune des flèches f'_k sera décomposée en un produit de la forme $h_{i+1}h_i$. Ici il y a deux options: soit w_i est une vallée, auquel cas on a $w_i = y_i$ par l'unicité de la décomposition dans l'axiome des catégories de Reedy; soit w_i est un pic, auquel cas on a $\deg(w_i) > \deg(y_i)$. Donc, finalement, il y a trois cas: soit (w, h) est de longueur $> p$; soit (w, h) est de longueur p mais

$$\sum_{i=0}^p \deg(w_i) > \sum_{i=0}^p \deg(y_i);$$

soit $(w, h) = (y, f)$. Dans tous les cas, (w, h) ne précède pas (y, f) pour l'ordre \prec et donc $J^*(y, f)$ n'appartient pas à A^i .

En fait pour cette dernière phrase il faut justifier aussi que $J^*(y, f)$ n'appartient pas à A^0 . On note que (y, f) a au moins un pic de degré d (i.e. dans Y mais pas dans Z), et ce pic persiste dans $J^*(y, f)$. Les seuls simplexes de cette forme dans A^0 sont les simplexes réguliers avec un seul pic (i.e. les simplexes ajoutés dans le coproduit de l'énoncé du lemme), or en enlevant des vallées on a rendu $J^*(y, f)$ irrégulier et on a donc $J^*(y, f) \notin A^0$. Ceci prouve (**).

L'énoncé (**) dit que U est la réunion de toutes les faces de $h(p)$ obtenues en enlevant des sommets autre que des vallées. Ceci implique que le morphisme

$$U \rightarrow h(p)$$

est une équivalence faible de 1-précats de Segal, par le lemme suivant (qu'on isole car l'énoncé pourrait avoir un intérêt propre). Ce qui terminera la démonstration du lemme 17.2. \square

Lemme 17.3 *Notons $h(p)$ l'ensemble simplicial "p-simplexe standard", et soit $f : U \hookrightarrow h(p)$ une inclusion telle que U soit réunion d'un certain nombre de faces de $h(p)$. Supposons que U contient la première et la dernière face, et ne contient pas toutes les autres; alors le morphisme f est une équivalence faible de 1-précats de Segal, i.e. le morphisme induit*

$$SeCat(U) \rightarrow SeCat(h(p)) \cong I^{(p)}$$

est une équivalence.

Preuve: On raisonne par récurrence sur p ; supposons donc l'énoncé connu pour $p - 1$. Ecrivons

$$U = V^0 \cup V^p \cup V^{b_1} \cup \dots \cup V^{b_k}$$

comme réunion (non-disjointe!) de faces où V^j est la face (ensemble simplicial isomorphe à $h(p - 1)$) obtenue en enlevant le $j^{\text{ième}}$ sommet. On fixe $a \in \{1, \dots, p - 1\}$ avec $b_i \neq a$, i.e. la face V^a n'apparaît pas dans U . Pour $0 \leq j \leq k$ posons

$$U^j := V^0 \cup V^p \cup V^{b_1} \cup \dots \cup V^{b_j} \subset U.$$

En particulier $U^0 = V^0 \cup V^p$, et $U^k = U$. On note d'abord que $U^0 \rightarrow h(p)$ est une équivalence (d'ici la fin de la preuve, ceci voudra dire que c'est une équivalence faible de 1-précats de Segal). Pour voir cela, soit $W(p) \subset h(p)$ la réunion des arêtes principales i.e. des arêtes de la forme $\{i - 1, i\}$. Le morphisme $W(p) \rightarrow h(p)$ est une équivalence (en effet, $h(p)$ est obtenu à partir de W par application une fois de l'opération $Gen[p]$ voir §2; voir aussi la discussion dans [95] §2.4.8). Maintenant $V^0 \cap W(p)$ est de la forme $W(p - 1) \subset V^0 = h(p - 1)$. Donc on peut exprimer $Q(p) := V^0 \cup W(p)$ comme coproduit:

$$Q(p) := V^0 \cup W(p) = V^0 \cup^{W(p-1)} W(p)$$

où le premier morphisme est une cofibration triviale (de 1-précats de Segal). Donc le morphisme $W(p) \rightarrow Q(p)$ est une cofibration triviale et on obtient que $Q(p) \rightarrow h(p)$ est une équivalence (et c'est une cofibration donc c'est une cofibration triviale). Notons que $Q(p)$ est l'union de la première face avec la dernière arête. Maintenant $Q(p) \cap V^p =$

$Q(p-1) \subset V^p = h(p-1)$. Donc (par le résultat qu'on vient de démontrer mais pour $Q(p-1)$) le deuxième morphisme dans le coproduit

$$U^0 = V^0 \cup V^p = Q(p) \cup V^p = Q(p) \cup^{Q(p-1)} V^p$$

est une cofibration triviale. Il s'ensuit que $Q(p) \rightarrow U^0$ est une cofibration triviale et $U^0 \rightarrow h(p)$ est une équivalence.

Montrons maintenant par récurrence sur j que $U^j \rightarrow h(p)$ est une équivalence. On vient de le démontrer pour $j = 0$, donc on peut supposer que $j \geq 1$ et que c'est connu pour $j-1$. On a

$$U^j = U^{j-1} \cup^{(U^{j-1} \cap V^{b_j})} V^{b_j}.$$

Pour prouver que $U^j \rightarrow h(p)$ est une équivalence il suffit de prouver que

$$(U^{j-1} \cap V^{b_j}) \rightarrow V^{b_j}$$

est une équivalence. Or, $V^{b_j} = h(p-1)$ et on note $0, \dots, \widehat{b_j}, \dots, p$ les sommets de ce simplexe. Le sous-ensemble simplicial $(U^{j-1} \cap V^{b_j})$ est une réunion de faces de ce $h(p-1)$. Cette réunion de faces contient la première et la dernière face (car $V^0 \cup V^p \subset U^{j-1}$), et ne contient pas la face où l'on enlève le sommet a . Donc, le lemme pour $p-1$ s'applique et on obtient que $(U^{j-1} \cap V^{b_j}) \rightarrow V^{b_j}$ est une équivalence comme voulu. \square

18. Strictification

La question de l'essentielle surjectivité du morphisme Φ du théorème 12.1 pose le problème de “strictifier” un foncteur large $A : Y \rightarrow nSeCAT'$ en un foncteur strict $Y \rightarrow nSeCat$. Dans la littérature, les réponses à ce type de questions s'appellent des théorèmes de “strictification”, ou de “cohérence”. Voir la discussion du §4 de Baez-Dolan [8]; ils y font référence à Gordon-Power-Street [48], et au théorème de cohérence de Mac Lane [71]. Voir aussi Dunn [29].

Un théorème très proche de ce qu'on va faire dans ce chapitre est “A realization theorem 2.4” de Dwyer-Kan [34]. Dans leur théorème (qui concerne les préfaisceaux simpliciaux i.e. 0-champs de Segal), un “foncteur large” un foncteur $Free.(Y) \rightarrow EnsSpl$ où $Free.(Y)$ est la résolution standard par des catégories libres. Ils montrent que tout foncteur large en ce sens, est équivalent à un foncteur strict $Y \rightarrow EnsSpl$.

Le théorème-type de ce genre est le résultat de SGA 1 [51] qui dit qu'une catégorie fibrée est équivalente à une catégorie fibrée scindée. Notre méthode de démonstration pour 18.5 sera basée sur la méthode de SGA 1, mais avec un apport des techniques de “catégories de Reedy” issues de la théorie de l'homotopie [86] [15] [59] [30] [34]. Cette méthode a déjà été utilisée par le deuxième auteur pour obtenir un résultat de strictification des préfaisceaux faibles d'espaces topologiques (“préfaisceaux flexibles”) dans [91], qui se trouve être essentiellement équivalent à celui de [34].

On peut envisager un cadre un peu plus général. Soit M une catégorie de modèles fermée, et soit Y une 1-catégorie. Soit $L(M)'$ un remplacement fibrant pour la catégorie de Segal $L(M)$ (qui est la localisée de Dwyer-Kan de M par rapport aux équivalences faibles). Soit $F : Y \rightarrow L(M)'$ un foncteur; on voudrait trouver un foncteur $G : Y \rightarrow M$ tel que $p \circ G \sim F$ où $p : M \rightarrow L(M)'$ est le morphisme tautologique. Pour la catégorie de modèles fermée $M = nSePC$, ceci donnerait la strictification pour des foncteurs $A : Y \rightarrow nSeCAT'$ au vu du théorème 11.11.

On va généraliser encore plus en considérant, au lieu d'une seule catégorie de modèles fermée M , un préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{M} au-dessus de Y^o . On retrouvera le résultat du paragraphe précédent en prenant le préfaisceau de Quillen constant $\mathbf{M} = \underline{M}$.

On rappelle que $f'_Y L(\mathbf{M})$ est un remplacement fibrant pour $f_Y L(\mathbf{M})$ au-dessus de Y (i.e. le morphisme vers Y devient un morphisme fibrant de 1-catégories de Segal).

Définition 18.1 *Soit Y une petite catégorie et \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y^o . On dira que les sections faibles de \mathbf{M} au-dessus de Y se strictifient si le morphisme de 1-précats de Segal*

$$Sect(Y, \int_Y \mathbf{M}) \rightarrow Sect(Y, \int'_Y L(\mathbf{M}))$$

est essentiellement surjectif.

Théorème 18.2 *Si \mathbf{M} est un préfaisceau de Quillen à gauche sur une catégorie de Reedy Y alors les sections faibles de \mathbf{M} au-dessus de Y se strictifient au sens de la définition 18.1.*

On va donner la démonstration plus bas.

On devrait avoir le même résultat sur une catégorie quelconque, à condition que les $\mathbf{M}(y)$ admettent suffisamment de limites. Nous avons une esquisse de démonstration mais il y a une partie que nous n'avons pas voulu faire, donc nous laissons l'énoncé sous forme "conjecture".

Conjecture 18.3 *Soit Y une petite catégorie et \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y . Supposons que \mathbf{M} satisfait l'hypothèse (o) qui sera introduite au §19 (qui dit en particulier que les $\mathbf{M}(y)$ admettent des petites limites arbitraires). Alors les sections faibles de \mathbf{M} au-dessus de Y se strictifient au sens de la définition 18.1.*

Nous proposerons plus bas une esquisse de démonstration pour cette conjecture.

Corollaire 18.4 *Soit Y une 1-catégorie de Reedy. Soit M une catégorie de modèles fermée. Alors le morphisme (de 1-catégories de Segal)*

$$\underline{Hom}(Y, M) \rightarrow \underline{Hom}(Y, L(M)')$$

est essentiellement surjectif.

Preuve: On applique le théorème 18.2 au préfaisceau de Quillen constant \underline{M} . □

La conjecture 18.3 donnerait le même corollaire pour toute catégorie Y , à condition d'avoir l'hypothèse (o) du §19 pour \underline{M} . En fait, on s'intéresse à l'énoncé en question pour $M = nSePC$: le théorème suivant terminera enfin la démonstration du Théorème 12.1.

Théorème 18.5 *Soit Y une petite 1-catégorie (non de Segal). Les sections faibles du préfaisceau constant \underline{nSePC} au-dessus de Y se strictifient au sens de la définition 18.1.*

En particulier, tout objet de $\underline{Hom}(Y, nSeCAT')$ est équivalent (dans cette $n + 1$ -catégorie de Segal) à un objet provenant d'un préfaisceau de n -catégories de Segal sur Y , i.e. le morphisme Φ du Théorème 12.1 est essentiellement surjectif.

Démonstration de 18.5 utilisant la conjecture 18.3: On applique 18.3 au préfaisceau constant \underline{M} pour la cmf $M = nSePC$ des n -précats de Segal. Il est facile de voir que \underline{M} satisfait l'hypothèse (o). Le morphisme tautologique

$$M_f \rightarrow nSeCAT'$$

envoie les équivalences sur des équivalences, et s'étend donc (par la propriété universelle de la localisée) en un morphisme

$$L(M_f) \rightarrow nSeCAT'.$$

Le morphisme $L(M_f) \rightarrow L(M)$ est une cofibration triviale, tout comme le morphisme vers un remplacement fibrant $L(M) \rightarrow L(M)'$, et on obtient un morphisme

$$L(M)' \rightarrow nSeCAT'.$$

D'après le théorème 11.11 ce morphisme induit une équivalence

$$L(M)' \xrightarrow{\cong} (nSeCAT')^{int,1}.$$

Ce morphisme est par choix strictement compatible avec le morphisme de source M_f . Le fait que Y est une 1-catégorie (en particulier 1-groupe) entraîne l'égalité

$$\underline{Hom}(Y, nSeCAT')^{int,1} = \underline{Hom}(Y, (nSeCAT')^{int,1}).$$

Un objet $f \in \underline{Hom}(Y, nSeCAT')$ est donc équivalent (dans cette $n+1$ -catégorie de Segal) à un morphisme provenant de $g : Y \rightarrow L(M)'$. En appliquant la version du corollaire 18.4 correspondant à 18.3, on obtient que g est équivalent (dans $\underline{Hom}(Y, L(M)')$) à un morphisme provenant de $h : Y \rightarrow M$; en composant avec un remplacement fibrant fonctoriel qui existe pour $M = nSePC$, on obtient que h peut être choisi comme morphisme $h : Y \rightarrow M_f$. La projection de h dans $\underline{Hom}(Y, nSeCAT')$ est donc équivalente à la projection de g , qui à son tour est équivalente à f .

Cet énoncé est exactement l'essentielle surjectivité de Φ . □

Du fait que nous ne pouvons proposer qu'une esquisse de démonstration pour 18.3, nous allons maintenant donner une démonstration complète du théorème 18.5.

Démonstration du théorème 18.2

On commence par la démonstration du théorème 18.2, en gardant les notations \mathbf{M} et Y . Notre méthode de démonstration consiste en une analyse précise des diagrammes indexés par une catégorie de Reedy, utilisant les idées et techniques développées justement dans ce but par Reedy [86], Bousfield-Kan [15], Hirschhorn [59], Dwyer-Hirschhorn-Kan [30]. Il faut considérer que notre démonstration est juste une application des techniques de ces références. On suit plus particulièrement le point de vue de [59].

Une partie de l'analyse a déjà été effectuée dans le lemme 17.2 ci-dessus, qu'on va utiliser maintenant. Soit $F^k Y$ la filtration de Y par les sous-catégories pleines formées des objets de degré $\leq k$. On suppose donnée une section σ de $f'_Y L(\mathbf{M})$ et on voudrait

construire une section u de $\int_Y \mathbf{M}$ qui est équivalente à σ . On va procéder par récurrence sur le degré, et définir u sur les $F^k Y$. Dans la récurrence on choisira de plus u fibrant et cofibrant pour la structure de Reedy.

On suppose donc qu'on a trouvé une section convenable v sur $F^k Y$ et on veut l'étendre en u sur $F^{k+1} Y$. D'après 17.2, $F^{k+1} Y$ se décompose (à équivalence faible près) comme coproduit de $F^k Y$ avec des catégories de la forme

$$Y(y) := Latch(y) + \{y\} + Match(y)$$

pour des objets $y \in Y$ de degré $k + 1$. Posons $F^k Y(y) := F^k Y \cap Y(y)$ d'où

$$F^k Y(y) = Latch(y) + Match(y).$$

On va étendre $v|_{F^k Y(y)}$ en une section u_y sur $Y(y)$, équivalente à $\sigma|_{Y(y)}$. Ceci suffira pour trouver u et l'équivalence entre u et $\sigma|_{F^{k+1} Y}$ au vu de 17.2. D'autre part, la condition que u soit cofibrant et fibrant pour la structure de Reedy, s'exprime en termes des restrictions $u|_{Y(y)}$ i.e. u est cofibrant et fibrant si et seulement si (1) $v = u|_{F^k Y}$ l'est, et (2) pour tout y de degré $k + 1$, $u_y = u|_{Y(y)}$ l'est.

En somme, il suffit de résoudre le problème d'extension de v en u , pour $F^k Y(y) \subset Y(y)$. On s'est donc ramené à la situation suivante: $Y = Y(y)$ et $Z := F^k Y(y)$; on a une section σ de $\int_Y L(\mathbf{M})$ sur Y , et une section v de $\int_Z \mathbf{M}|_Z$ qui est équivalente à $\sigma|_Z$; et on cherche une section u sur Y qui étend v et qui est équivalente (en tant que section de $\int_Y L(\mathbf{M})$) à σ . Rappelons les notations suivantes:

$$Y = Latch(y) + \{y\} + Match(y); \quad Z = Latch(y) + Match(y).$$

On a un morphisme

$$R : \int_{Latch(y)} L(\mathbf{M}) \rightarrow L(\mathbf{M}(y))$$

correspondant aux morphismes de restriction $res_f : \mathbf{M}(z) \rightarrow \mathbf{M}(y)$ pour tout $f : z \rightarrow y$ dans Z . Ceci donne (par extension le long d'une cofibration triviale)

$$R' : \int'_{Latch(y)} L(\mathbf{M}) \rightarrow L(\mathbf{M}(y))'.$$

Notre section $\sigma|_{Latch(y)}$ donne un morphisme

$$R' \circ \sigma|_{Latch(y)} : Latch(y) \rightarrow L(\mathbf{M}(y))'.$$

La section σ au-dessus de $Latch(y) + \{y\}$ correspond (via une version homotopique adaptée aux catégories de Segal de la description des diagrammes de Reedy de [59] [30]— généralisation que nous utilisons ici sans démonstration) à un morphisme

$$hocolim(R' \circ \sigma|_{Latch(y)}) \rightarrow \sigma(y)$$

dans $L(\mathbf{M}(y))'$. D'autre part, on a aussi le morphisme

$$\mathbf{r} : \int_{Latch(y)} \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}(y)$$

d'où

$$\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)} : Latch(y) \rightarrow \mathbf{M}(y).$$

Le fait que $v|_{Latch(y)}$ soit cofibrant de Reedy, couplé avec la condition que les foncteurs de restriction soient des foncteurs de Quillen à gauche, implique que $\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}$ est un $Latch(y)$ -diagramme de $\mathbf{M}(y)$ lui-même cofibrant de Reedy. Ceci implique qu'il existe une équivalence naturelle dans $L(\mathbf{M}(y))'$:

$$colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}) \cong hocolim(R' \circ \sigma|_{Latch(y)})$$

(en fait, c'est la définition de *hocolim* voir [15] [59] [30]).

Pour avoir une extension de v à une section u_L au-dessus de $Latch(y) + \{y\}$ il suffit (d'après la description de [59] [30]) d'avoir un objet $u(y) \in \mathbf{M}(y)$ et un morphisme

$$colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}) \rightarrow u(y).$$

En outre, u_L est cofibrant de Reedy (ainsi qu'une éventuelle extension de u_L à u sur Z) si et seulement si le morphisme précédent est une cofibration. La section u_L est équivalente (en tant que section des localisés) à $\sigma|_{Latch(y)+\{y\}}$ s'il existe une équivalence dans $L(\mathbf{M}(y))'$, $u(y) \cong \sigma(y)$, et une homotopie de commutativité pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}) & \cong & hocolim(R' \circ \sigma|_{Latch(y)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(y) & \cong & \sigma(y). \end{array}$$

Dualement (encore que l'argument soit un peu différent) on étudie les extensions de v en une section u_M au-dessus de $Match(y) + \{y\}$. D'abord, notons

$$\mathbf{t} : \mathbf{M}(y) \times Y \rightarrow \int_{Match(y)} \mathbf{M}$$

le morphisme donné par les restrictions. Pour

$$y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{g} w$$

avec composé $h := gf$, on obtient, en utilisant les adjonctions, un morphisme (pour $a \in \mathbf{M}(z)$)

$$res_f^* a \rightarrow res_h^*(res_g a).$$

Ceci donne un morphisme

$$\mathbf{t}^* : \int_{Match(y)} \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}(y).$$

On obtient également sur les localisés

$$T^* : \int'_{Match(y)} L(\mathbf{M}) \rightarrow LM(y)'$$

En composant avec σ on obtient

$$T^* \circ \sigma|_{Match(y)} : Match(y) \rightarrow L(\mathbf{M}(y)).$$

La restriction de σ sur $\{y\} + Match(y)$ correspond (de nouveau via la version homotopique pour catégories de Segal, de la description des diagrammes de Reedy de [59] [30] que nous ne démontrons pas ici) à un morphisme

$$\sigma(y) \rightarrow holim(T^* \circ \sigma|_{Match(y)})$$

dans $L(\mathbf{M}(y))'$.

De façon similaire, une extension u_M de v à $\{y\} + Match(y)$ correspond à un objet $u(y) \in \mathbf{M}(y)$ et un morphisme

$$u(y) \rightarrow lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)}).$$

Ici la limite existe car l'indexation est finie. La section u_M ainsi que son éventuelle extension u à tout Z , est fibrante de Reedy si et seulement si ce morphisme est une fibration dans $\mathbf{M}(y)$.

D'autre part, comme plus haut on a une équivalence dans $L(\mathbf{M}(y))'$

$$lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)}) \cong holim(T^* \circ \sigma|_{Match(y)})$$

car $v|_{Match(y)}$ est fibrant de Reedy par hypothèse de récurrence, et les adjoints res_f^* sont des foncteurs de Quillen à droite, donc $\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)}$ est un $Match(y)$ -diagramme de $\mathbf{M}(y)$ qui est fibrant de Reedy. Une extension de l'équivalence de v avec $\sigma|_Z$ en une équivalence entre u_M et $\sigma|_{\{y\} + Match(y)}$ correspond à la donnée d'une équivalence $u(y) \cong \sigma(y)$ et d'une homotopie de commutativité pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} u(y) & \cong & \sigma(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)}) & \cong & holim(T^* \circ \sigma|_{Match(y)}). \end{array}$$

Soient $x \in Latch(y)$ et $z \in Match(y)$ et notons par $f : x \rightarrow y$ et $g : y \rightarrow z$ les morphismes. Alors— par la propriété d'adjoint homotopique (Lemme 8.11) des foncteurs induits par res_g et res_g^* entre les catégories simpliciales $L(\mathbf{M}(y))$ et $L(\mathbf{M}(z))$ — le morphisme

$$res_{gf}(\sigma(x)) \rightarrow \sigma(z)$$

est égal à un morphisme

$$res_f(\sigma(x)) \rightarrow res_g^*(\sigma(z)).$$

Quand x varie dans $Latch(y)$ et z dans $Match(y)$ on obtient le résultat suivant. Notons $Latch(y) \sqcup Match(y)$ la réunion disjointe de ces deux catégories; elle est contenu dans Z mais dans Z il y a, en plus, un (unique) morphisme de chaque objet de $Latch(y)$ vers chaque objet de $Match(y)$. Une extension de $\sigma|_{Latch(y) \sqcup Match(y)}$ à $\sigma|_Z$ correspond à un morphisme

$$hocolim(R' \circ \sigma|_{Latch(y)}) \rightarrow holim(T^* \circ \sigma|_{Match(y)}).$$

Si $\sigma|_Z$ est équivalente à la section induite par v , l'application ci-dessus est induite par

$$colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}) \rightarrow lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)}).$$

L'extension de σ de Z à $Y = Z \cup \{y\}$ est déterminée par une factorisation

$$hocolim(R' \circ \sigma|_{Latch(y)}) \rightarrow \sigma(y) \rightarrow holim(T^* \circ \sigma|_{Match(y)}).$$

Celle-ci étant donnée, pour étendre v en une section u sur Y , il faut trouver une factorisation

$$colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)}) \rightarrow u(y) \rightarrow lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)})$$

qui induise la factorisation correspondant à σ .

On note par ailleurs que $colim(\mathbf{r} \circ v|_{Latch(y)})$ est cofibrant (c'est la colimite d'un diagramme qui est cofibrant pour la structure de Reedy, car \mathbf{r} est un foncteur de Quillen à gauche); et $lim(\mathbf{t}^* \circ v|_{Match(y)})$ est fibrant—c'est la limite d'un diagramme qui est fibrant pour la structure de Reedy, car \mathbf{t}^* est un foncteur de Quillen à droite.

On est donc ramené au problème suivant: étant donné un morphisme

$$h : a \rightarrow b$$

dans une catégorie de modèles fermée $M = \mathbf{M}(y)$, et une factorisation

$$\bar{a} \rightarrow w \rightarrow \bar{b}$$

dans $L(M)$ où \bar{a} et \bar{b} sont les images de $a, b \in M$ dans $L(M)$, on veut la relever en une factorisation

$$a \rightarrow c \rightarrow b$$

dans M avec le premier morphisme cofibrant et le deuxième fibrant. On pourra supposer que a est cofibrant et b fibrant.

On peut aussi supposer qu'on a $w = \bar{c}$ dans $L(M)$ avec c fibrant et cofibrant. Dans ce cas, les morphismes de $L(M)$ proviennent de morphismes $f : a \rightarrow c$ et $g : c \rightarrow b$. On peut supposer de plus que g est une fibration. La factorisation dans $L(M)$ est une homotopie entre gf et h , en tant que morphismes de a vers b . L'homotopie peut être considérée comme Quillen l'a définie, c'est-à-dire comme un diagramme

$$i_0, i_1 : a \rightrightarrows \alpha \xrightarrow{p} a, \quad k : \alpha \rightarrow b$$

avec $pi_0 = pi_1 = 1_a$ et $ki_0 = gf$, $ki_1 = h$ (et p une fibration triviale, et $i_0 \sqcup i_1$ une cofibration). Le morphisme $i_0 : a \rightarrow \alpha$ est une cofibration triviale. Le fait qu'on a supposé que g est une fibration implique qu'il existe un relèvement $w : \alpha \rightarrow c$ avec $gw = k$ et $wi_0 = f$. Si on pose $f' := wi_1$, on obtient une homotopie (qu'on note encore w) entre f et f' ; on a aussi $gf' = h$ et l'homotopie w composée avec g est l'homotopie k . Autrement dit, la factorisation $h = gf'$ avec l'identité comme homotopie, est équivalente à la factorisation qui correspond à l'homotopie k entre gf et h . On obtient le relèvement de notre factorisation dans $L(M)$ en une factorisation

$$a \xrightarrow{f'} c \xrightarrow{g} b$$

dans M , ce qui résout le problème.

Pour compléter la démonstration du théorème 18.2, appliquons la solution du problème ci-dessus à la situation précédente avec

$$\begin{aligned} a &= \text{colim}(\mathbf{r} \circ v|_{\text{Latch}(y)}), & b &= \text{lim}(\mathbf{t}^* \circ v|_{\text{Match}(y)}); \\ \bar{a} &= \text{hocolim}(R' \circ \sigma|_{\text{Latch}(y)}), & \bar{b} &= \text{holim}(T^* \circ \sigma|_{\text{Match}(y)}); \end{aligned}$$

et $w = \sigma(y)$. On trouve la factorisation désirée avec $c = u(y)$. \square

Le cas des 1-champs

Avant d'aborder l'esquisse de démonstration pour 18.3 et la démonstration du théorème 18.5, signalons l'origine de l'idée en faisant la comparaison avec le cas des 1-champs.

On peut montrer que la 2-catégorie des 1-champs au-dessus de \mathcal{X} est équivalente (via la comparaison de Tamsamani [98] entre les 2-catégories suivant sa définition, et les 2-catégories de Benabou) à la 2-catégorie $1CHAMP(\mathcal{X})$ des 1-champs (non de Segal) au-dessus de \mathcal{X} . Si on adopte la définition de 1-champ qui utilise la notion de catégorie fibrée [51], il s'agit pour l'essentiel de montrer qu'une catégorie fibrée est équivalente à une catégorie fibrée scindée, i.e. une qui provient d'un préfaisceau de catégories.

Ce résultat est un théorème de SGA 1 [51]. L'idée de la démonstration est que si $\mathcal{F} \rightarrow Y$ est une catégorie fibrée au-dessus d'une catégorie Y , alors le foncteur

$$A : y \mapsto \text{Sect}^{eq}(Y/y, \mathcal{F} \times_Y (Y/y))$$

(où Sect^{eq} sont les sections "cartésiennes" i.e. qui envoient les flèches d'en bas en flèches cartésiennes en haut) sera un foncteur strict de Y vers la 1-catégorie $1Cat$ des 1-catégories, tel qu'on ait un équivalence $\int_Y A \cong \mathcal{F}$ de catégories fibrées au-dessus de Y .

L'observation-clé est que cette propriété de strictification provient du fait que la base Y est une 1-catégorie stricte.

Cette idée a été reprise dans [91] pour donner un résultat de strictification des "faisceaux flexibles" d'espaces topologiques, ce qui est l'analogie du théorème 18.5 pour le cas $n = 0$.

Idée pour preuve directe de 18.5

On esquisse ici une idée pour une preuve directe de la strictification pour les foncteurs $\mathcal{X}^o \rightarrow nSeCAT'$ (Théorème 18.5), en suivant le cas des 1-champs mentionné ci-dessus.

Supposons maintenant que $M = nSePC$ est la cmf des n -précats de Segal. Un foncteur $Y^o \rightarrow M$ est un n -précat de Segal au-dessus de Y . D'autre part, on a 11.11

$$L(M) \cong nSeCAT'^{int,1}.$$

Comme Y est déjà 1-groupique, un foncteur $Y^o \rightarrow L(M)'$ est donc à équivalence près la même chose qu'un foncteur $Y^o \rightarrow nSeCAT'$. Notre question devient donc: est-ce que tout foncteur $Y^o \rightarrow nSeCAT'$ est équivalent à une n -précat de Segal sur Y ?

L'idée de base est d'utiliser le fait que Y est une 1-catégorie qui est forcément stricte. Soit $F : Y^o \rightarrow nSeCAT'$ un morphisme. Pour $y \in Y$, on pose

$$G(y) := \Gamma(Y/y, F|_{Y/y}) := \underline{Hom}((Y/y)^o, nSeCAT')_1 / (*_y, F|_{Y/y}).$$

Ceci varie fonctoriellement en y et les valeurs sont des n -catégories de Segal fibrantes. Le problème est de montrer que G est équivalent à F .

Nous ne savons pas actuellement trouver directement un morphisme entre F et G (et c'est pour cela que ce paragraphe n'est qu'une esquisse). Cependant, notons pour plus tard, que si F provenait déjà d'une section stricte, alors il y aurait une équivalence entre F et G donnée par le morphisme

$$F(y) \rightarrow \Gamma(Y/y, F|_{Y/y}).$$

Nous allons contourner le problème de trouver un morphisme entre F et G en nous appuyant sur le théorème 18.2, et en remplaçant Y par une catégorie de Reedy B munie d'une sous-catégorie $D \subset B$ telle que la localisée $L(B, D)$ soit équivalente à Y . L'idée que les diagrammes sur Y sont les mêmes que les diagrammes sur B qui sont des équivalences dans la direction de D , provient du papier de Dwyer-Kan [34].

Esquisse de démonstration de la conjecture 18.3:

Soit Y une 1-catégorie et \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y qui satisfait les conditions (o) du §19 ci-dessous. On aura besoin de la catégorie de Reedy suivante. Soit νY le nerf de Y , et soit $B = \int_{\Delta} \nu Y$ la catégorie introduite pour le lemme 16.1. On note que B est aussi la catégorie des simplexes de νY , notée $B = \Delta \nu Y$ dans [59] [30]; d'après *loc cit.* B est une catégorie de Reedy (la structure de Reedy étant induite par le foncteur $B \rightarrow \Delta$). Le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\nu B \rightarrow \nu Y$$

provient d'un foncteur $B \rightarrow Y$, et en plus ce foncteur envoie les morphismes de $D \subset B$ sur les identités de Y . D'après le Lemme 16.1, ceci induit une équivalence de 1-catégories simpliciales ou de Segal

$$L(B, D) \cong 1SeL(B, D) \xrightarrow{\cong} Y.$$

Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Sect(Y, \int_Y \mathbf{M}) & \rightarrow & Sect(Y, \int'_Y L(\mathbf{M})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sect(B, \int_B \varphi^* \mathbf{M}) & \rightarrow & Sect(B, \int'_B \varphi^* L(\mathbf{M})). \end{array}$$

A partir du résultat 18.2, on obtient que le morphisme du bas est essentiellement surjectif. D'autre part, l'équivalence entre Y et $L(B, D)$ implique que le morphisme vertical de droite est pleinement fidèle avec pour image essentielle la classe des sections $\sigma : B \rightarrow \varphi^* L(\mathbf{M})'$ telles que $\sigma(g)$ soit une équivalence pour tout morphisme g de D (cette idée provient de Dwyer-Kan [34]). On appellera cette condition $D - eq$. Si une section σ est $D - eq$ et si σ provient d'une section $u : B \rightarrow \int_B \varphi^* \mathbf{M}$ alors u est aussi $D - eq$ dans le sens que les morphismes de restriction $res_g(u)$ sont des équivalences faibles pour $g \in D$. Il nous suffit de démontrer que si $u \in Sect(B, \int_B \varphi^* \mathbf{M})$ est une section $D - eq$ en ce sens, alors u provient (à équivalence faible pour la structure de catégorie de modèles près) d'une section $v \in Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})$.

Le foncteur

$$p^* : Sect(Y, \int_Y \mathbf{M}) \rightarrow Sect(B, \int_B p^* \mathbf{M})$$

admet un adjoint à droite

$$p_* : Sect(B, \int_B p^* \mathbf{M}) \rightarrow Sect(Y, \int_Y \mathbf{M}).$$

On prétend que si $u \in Sect^{D-eq}(B, \int_B p^* \mathbf{M})$ est fibrant pour la structure de type (II), alors on a l'équivalence $p^* p_* u \cong u$. Pour ceci on envisage une démonstration qui suivrait

les lignes de l'argument du §19 ci-dessous (en particulier c'est pour cela qu'on a besoin de l'hypothèse (o) dont l'essentiel est l'existence de limites dans les $\mathbf{M}(y)$). Ce résultat serait en quelque sorte une version relative de l'argument du §19. Cependant, pour la présente version du papier nous n'avons pas vérifié les détails de cet argument et c'est pour cela que la démonstration de 18.3 comporte une lacune.

En admettant ce fait, on obtient que tout $u \in \text{Sect}^{D\text{-}eq}(B, \int_B p^* \mathbf{M})$ est équivalent à une section de la forme p^*v pour $v \in \text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$, ce qui termine la démonstration d'après les remarques précédentes. \square

Preuve du Théorème 18.5

Du fait qu'il y a une lacune dans notre esquisse de démonstration de la conjecture 18.3, et que l'idée pour la preuve directe donnée auparavant n'a pas abouti non plus, on donne enfin une démonstration complète en combinant ces deux idées. On devait appliquer 18.3 au cas du préfaisceau de Quillen constant $\mathbf{M} = \underline{M}$ à valeurs $M = n\text{SePC}$, la catégorie de modèles de n -précats de Segal. On note par exemple que $\int_Y \mathbf{M} = Y \times M$ etc. Avec ces notations, on revient au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, Y \times M) & \rightarrow & \text{Sect}(Y, Y \times L(M)') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(B, B \times M) & \rightarrow & \text{Sect}(B, B \times L(M)'). \end{array}$$

Etant donné $\sigma : Y \rightarrow L(M)'$, on peut appliquer la construction du paragraphe précédent, pour obtenir une section $G_\sigma : Y \rightarrow M$, essentiellement par $G_\sigma(y) = \lim_{Y/y} \sigma|_{Y/y}$. Ceci est compatible avec la restriction à B (via le morphisme $\psi : B \rightarrow Y$) en ce sens qu'on a un morphisme

$$r : G_\sigma \circ \psi \rightarrow G_{\sigma \circ \psi}.$$

Le fait que ψ induise une équivalence $L(B, D) \cong Y$ implique que pour $b \in B$, on a

$$\lim_{Y/\psi(b)} \sigma|_{Y/\psi(b)} \xrightarrow{\cong} \lim_{B/b} (\sigma \circ \psi)|_{B/b},$$

i.e. que le morphisme r est une équivalence (objet-par-objet au-dessus de B). D'autre part, par le théorème 18.2, $\sigma \circ \psi$ est équivalente à une section provenant de $u : B \rightarrow M$. Pour les sections strictes, on a le morphisme désiré au paragraphe précédent. On a donc une équivalence

$$G_u \cong u,$$

ce qui donne

$$G_\sigma \circ \psi \cong G_{\sigma \circ \psi} \cong \sigma \circ \psi.$$

En posant $v := G_\sigma : Y \rightarrow M$, on a résolu (pour ce cas) le problème qui a donné naissance à la lacune dans la démonstration de la conjecture 18.3. On finit la démonstration comme avant: le fait que ψ induise une équivalence $L(B, D) \xrightarrow{\cong} Y$ implique que le morphisme $Sect(Y, Y \times L(M)') \rightarrow Sect(B, B \times L(M)')$ est pleinement fidèle (cf [34]). Donc, l'équivalence $G_\sigma \circ \psi \cong \sigma \circ \psi$ provient d'une équivalence $G_\sigma \circ \sigma$. Ceci donne enfin une démonstration complète du théorème 18.5. \square

Le théorème 18.5 donne l'essentielle surjectivité qui manquait pour terminer la démonstration du théorème 12.1.

Remarque-Exercice:

Dans la démonstration de 18.5 on aurait pu prendre $B = \beta^{\text{poset}}(Y)$, voir 16.2. Dans ce cas, B est la catégorie sous-jacente à un ensemble partiellement ordonné; de ce fait on n'aurait besoin du théorème 18.2 que pour ce type de catégorie qui est une catégorie de Reedy directe. Cela simplifierait beaucoup la démonstration de 18.2, en particulier les objets apparissants $Match$ serait triviaux et on n'aurait pas besoin de considérer les morphismes de connexion $Latch \rightarrow Match$. On laisse au lecteur l'exercice de rédiger une démonstration de 18.5 (incluant la partie de 18.2 dont on aurait besoin) sur la base de cette remarque.

Une équivalence

On donne maintenant une amélioration du résultat précédent concernant l'essentielle surjectivité du morphisme 18.1; ce morphisme devient une équivalence si l'on localise (à la Dwyer-Kan) la catégorie de modèles à la source du morphisme 18.1. On ne donne l'énoncé que pour le cas des catégories de Reedy; on pense qu'il reste vrai pour une catégorie de base quelconque, sous des hypothèses du type (o) du §19.

Théorème 18.6 *Soit Y une catégorie de Reedy, et soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y . Supposons que chaque $\mathbf{M}(y)$ admet des "factorisations fonctorielles" pour la structure de Quillen. Supposons la même chose pour $Sect(Z, \int_Z \mathbf{M}|_Z)$ pour toute catégorie de Reedy Z avec foncteur vers Y (ce foncteur ne respectant pas forcément la structure de Reedy). Alors le morphisme*

$$L(Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})) \rightarrow Sect(Y, \int_Y L(\mathbf{M}))$$

est une équivalence.

Corollaire 18.7 *Soit Y une catégorie de Reedy et soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur Y . Alors on a une équivalence*

$$\lim_{\leftarrow, Y^o} L(\mathbf{M}) \cong L(Sect^{\text{eq}}(Y, \int_Y \mathbf{M})).$$

Preuve: Dans l'équivalence du théorème, une section $\sigma \in \text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$ va sur une *eq*-section de $\int' L(\mathbf{M})$ si et seulement si les morphismes de transition $\text{res}_f \sigma(y) \rightarrow \sigma(z)$ (pour $f : y \rightarrow z$ dans Y) sont des équivalences faibles; i.e. si et seulement si σ est une *eq*-section de $\int_Y \mathbf{M}$. On a donc (voir 8.2) une équivalence:

$$L(\text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y \mathbf{M})) \xrightarrow{\cong} \text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y L(\mathbf{M})).$$

D'autre part, on a par la proposition 16.6 que pour le remplacement fibrant $L(\mathbf{M})'$ de $L(\mathbf{M})$,

$$\Gamma(Y, L(\mathbf{M})') \rightarrow \text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y L(\mathbf{M})')$$

est une équivalence; le morphisme

$$\text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y L(\mathbf{M})) \rightarrow \text{Sect}^{\text{eq}}(Y, \int_Y L(\mathbf{M})')$$

est une équivalence; et d'après la proposition 14.2,

$$\lim_{\leftarrow, Y^{\circ}} L(\mathbf{M}) \cong \Gamma(Y, L(\mathbf{M})').$$

D'où l'énoncé. □

Avant de faire la démonstration du théorème 18.6 en général, nous allons en traiter quelques cas particuliers. On isole ces lemmes car ils montrent bien, par des exemples, ce qui se passe dans 18.6.

Pour ces lemmes, on utilisera la technique des “homotopy function complexes” développée dans Hirschhorn [59], Dwyer-Hirschhorn-Kan [30] et qui a ses origines dans le travail sur la localisation [33] ainsi que dans les travaux de Reedy [86]. On rappelle brièvement de quoi il s'agit. Ce rappel chevauche partiellement celui du §8.

Ici M est une catégorie de modèles fermée, et on veut calculer les types d'homotopie des ensembles simpliciaux Hom dans la localisée de Dwyer-Kan $L(M)$, i.e. pour $x, y \in M$ on veut calculer $L(M)_{1/}(x, y)$. Pour ceci, on introduit (dans les références ci-dessus) la notion de *résolution simpliciale fibrante* $y \rightarrow \mathbf{y}$. Ici \mathbf{y} est un objet simplicial de M , i.e. un objet $\mathbf{y} \in M^{\Delta^{\circ}}$, avec morphisme $c^*y \rightarrow \mathbf{y}$ où c^*y est l'objet simplicial constant à valeurs y . On demande que pour $p \in \Delta$, $y \rightarrow \mathbf{y}(p)$ soit une équivalence faible; et que \mathbf{y} soit fibrant pour la structure de catégorie de modèles fermée de Reedy (i.e. ce qu'on appelle ici “de type (III)”) sur $M^{\Delta^{\circ}}$. Dans ce cas, l'ensemble simplicial

$$M_{1/}(x, \mathbf{y}) := p \mapsto M_{1/}(x, \mathbf{y}(p))$$

est un ensemble simplicial qui est naturellement équivalent à $L(M)_{1/}(x, y)$ [33].²³ La notation $M_{1/}(a, b) := \text{Hom}_M(a, b)$ désigne l'ensemble des morphismes pour la catégorie M .

On note maintenant que l'ensemble simplicial $M_{1/}(x, \mathbf{y})$ est fibrant i.e. de Kan. En effet, la condition d'extension de Kan pour $M_{1/}(x, \mathbf{y})$ devient une condition de relèvement pour des morphismes de x vers une flèche de la forme $\mathbf{y}(p) \rightarrow \mathbf{w}$ où \mathbf{w} est un produit fibré (récurif) de composants de \mathbf{y} (ce produit fibré dépend de quelle condition d'extension i.e. quelle "corne" on regarde; nous laissons au lecteur d'écrire précisément l'expression pour le produit fibré en question). La condition que \mathbf{y} est fibrante pour la structure de Reedy implique que ces morphismes $\mathbf{y}(p) \rightarrow \mathbf{w}$ sont fibrants; et la condition que tous les $\mathbf{y}(p)$ sont équivalents à y implique (au vu de la forme du produit fibré qui correspond à une "corne") que $\mathbf{y}(p) \rightarrow \mathbf{w}$ est une équivalence faible. Donc (puisque x est cofibrant) tout morphisme de x dans \mathbf{w} se relève en un morphisme $x \rightarrow \mathbf{y}(p)$, ce qui donne la condition d'extension de Kan.

Le même argument montre qu'une cofibration $x \rightarrow x'$ induit une fibration de Kan

$$M_{1/}(x', \mathbf{y}) \rightarrow M_{1/}(x, \mathbf{y}).$$

Le premier lemme concerne le produit direct: c'est le cas du théorème 18.6 où la catégorie de base Y est discrète, égale à un ensemble. Malgré les apparences, ce cas n'est pas totalement évident à cause du fait qu'un produit infini d'ensembles simpliciaux peut ne pas avoir le bon type d'homotopie, si les facteurs ne sont pas fibrants (de Kan). Ce fait a été remarqué notamment par Jardine dans [64] (qui donne un contre-exemple).

Lemma 18.8 *Soit $\{M_i\}$ une collection de catégories de modèles fermées (indexée par un ensemble). On munit le produit $\prod_i M_i$ de la structure de catégorie de modèles fermée produit: les fibrations, cofibrations et équivalences faibles sont les morphismes qui le sont par rapport à chaque variable. Soient $L(M_i)'$ des remplacements fibrants (en tant que catégories de Segal) des localisées $L(M_i)$ de Dwyer-Kan. Alors le morphisme naturel*

$$L\left(\prod_i M_i\right) \rightarrow \prod_i L(M_i)'$$

(induit par sa restriction à $\prod_i M_i$) est une équivalence.

²³Techniquement le morphisme naturel ici est un morphisme

$$M_{1/}(x, \mathbf{y}) \rightarrow L^H(M)$$

dans la localisée *par hamacs* voir [33] 4.4 et 7.2. On note que l'argument de [33] 7.2, qu'ils donnent pour le cas d'une paire de résolutions \mathbf{x} \mathbf{y} (cosimpliciale et simpliciale respectivement), marche également pour fournir le morphisme qu'on cherche ici dans le cas d'une seule résolution. Dans ce qui suit on utilisera la notation $L(M)$ mais pour être techniquement correct (i.e. pour avoir les morphismes qu'on dit) il faudrait lire $L^H(M)$.

Preuve: On note d'abord que l'ensemble des objets est le même des deux cotés; il s'agit donc de prouver que le morphisme est (homotopiquement) pleinement fidèle. Soient (y_i) et (z_i) deux objets du produit $\prod_i M_i$. On choisit pour chaque i une résolution simpliciale fibrante $z_i \rightarrow \mathbf{z}_i$. On obtient ainsi une résolution simpliciale fibrante

$$(z_i) \rightarrow (\mathbf{z}_i)$$

pour le produit. On a donc

$$L\left(\prod_i M_i\right)_{1/}((y_i), (z_i)) \cong \left(\prod_i M_i\right)_{1/}((y_i), (\mathbf{z}_i)) = \prod_i \left((M_i)_{1/}(y_i, \mathbf{z}_i)\right).$$

D'autre part, pour chaque i le morphisme

$$L(M_i)_{1/}(y_i, z_i) \rightarrow L(M_i)'_{1/}(y_i, z_i)$$

est une équivalence d'ensembles simpliciaux avec le deuxième terme fibrant. On a pour chaque i

$$L(M_i)_{1/}(y_i, z_i) \cong (M_i)_{1/}(y_i, \mathbf{z}_i),$$

et comme on l'a remarqué ci-dessus, les $(M_i)_{1/}(y_i, \mathbf{z}_i)$ sont fibrants. Le produit direct d'ensembles simpliciaux fibrants conserve les équivalences d'homotopie [64], donc on a

$$\prod_i \left(L(M_i)'_{1/}(y_i, z_i)\right) \cong \prod_i \left((M_i)_{1/}(y_i, \mathbf{z}_i)\right).$$

Notons qu'on a

$$\prod_i \left(L(M_i)'_{1/}(y_i, z_i)\right) = \left(\prod_i L(M_i)'\right)_{1/}(y_i, z_i);$$

on obtient l'équivalence

$$\left(\prod_i L(M_i)'\right)_{1/}(y_i, z_i) \cong L\left(\prod_i M_i\right)_{1/}((y_i), (z_i)).$$

Cette équivalence est homotope au morphisme

$$L\left(\prod_i M_i\right)_{1/}((y_i), (z_i)) \rightarrow \left(\prod_i L(M_i)'\right)_{1/}(y_i, z_i)$$

du lemme, qui est (par définition) celui induit par le morphisme

$$\left(\prod_i M_i\right)_{1/}((y_i), (z_i)) \rightarrow \left(\prod_i L(M_i)'\right)_{1/}(y_i, z_i),$$

qui envoie les équivalences faibles sur des équivalences. □

Lemma 18.9 *Soit M une catégorie de modèles fermée. Soit I la catégorie avec objets $0, 1$ et un morphisme $0 \rightarrow 1$, et soit M^I la catégorie des I -diagrammes dans M (qui admet une structure de cmf de Reedy, par exemple). Soit $L(M)$ un remplacement fibrant (en tant que catégorie de Segal) pour $L(M)$. Alors le morphisme naturel*

$$L(M^I) \rightarrow \underline{Hom}(I, L(M)')$$

(induit par sa restriction sur M^I) est une équivalence. Il s'agit ici du Hom interne pour les 1-précats de Segal.

Preuve: Une flèche de $L(M)'$ est une classe d'homotopie de morphismes de M , donc tout objet de $\underline{Hom}(I, L(M)')$ est équivalent à un objet provenant de M^I . Il s'agit donc de prouver que le morphisme en question est homotopiquement pleinement fidèle. Soient y et z des I -diagrammes de M , i.e. $y = (f : y_0 \rightarrow y_1)$ avec $y_i \in M$ et $z = (g : z_0 \rightarrow z_1)$. On suppose que y est cofibrant pour celle des deux structures de Reedy possibles pour laquelle f est une cofibration. Si \mathbf{z} est une résolution simpliciale fibrante de z alors on a

$$L(M^I)_{1/}(y, z) \cong M^I_{1/}(y, \mathbf{z}).$$

On peut écrire $\mathbf{z} = (\mathbf{g} : \mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)$.

D'autre part,

$$\underline{Hom}(I, L(M)')_{1/}(y, z)$$

représente le foncteur d'ensembles simpliciaux

$$K \mapsto Hom^{y,z}(I \times \Upsilon(K), L(M)')$$

où le terme de droite est le sous-ensemble de morphismes $r : I \times \Upsilon(K) \rightarrow L(M)'$ avec $r|_{I \times \{0\}} = y$ et $r|_{I \times \{1\}} = z$. Un morphisme

$$I \times \Upsilon(K) \rightarrow L(M)'$$

équivalait (par division du carré en deux triangles—le lecteur est invité à dessiner un carré avec d'un côté $f : y_0 \rightarrow y_1$ et de l'autre $g : z_0 \rightarrow z_1$ et avec des flèches étiquetées K entre y_0 et z_0 et y_1 et z_1 ; divisé en deux triangles par une flèche étiquetée K de y_0 vers z_1) à deux morphismes

$$\Upsilon^2(*, K) \rightarrow L(M)'$$

et

$$\Upsilon^2(K, *) \rightarrow L(M)'$$

avec la même restriction à l' $\Upsilon(K)$ diagonal. Les morphismes de restriction des ensembles simpliciaux de ces diagrammes, sur l'ensemble simplicial des diagrammes pour la diagonale

$\Upsilon(K)$, sont des fibrations. On obtient une formule avec produit fibré homotopique, i.e. un carré homotopiquement-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{Hom}(I, L(M)')_{1/}(y, z) & \rightarrow & L(M)_{1/}(y_0, z_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(M)_{1/}(y_1, z_1) & \rightarrow & L(M)_{1/}(y_0, z_1). \end{array}$$

Il y a deux structures de Reedy possibles sur M^I (on peut choisir $deg(0) > deg(1)$ ou l'inverse); on prendra la structure ($deg(0) < deg(1)$) pour laquelle les objets cofibrants sont les cofibrations $y_0 \rightarrow y_1$ entre y_i cofibrants. Dans ce cas et pour une résolution simpliciale fibrante \mathbf{z} (dont le composant \mathbf{z}_1 est en particulier aussi une résolution simpliciale fibrante), le morphisme de composition avec f

$$M_{1/}(y_1, \mathbf{z}_1) \rightarrow M_{1/}(y_0, \mathbf{z}_1)$$

est une fibration d'ensembles simpliciaux (cf la discussion avant ces lemmes). Il s'ensuit que le carré cartésien d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} M_{1/}^I(y, \mathbf{z}) & \rightarrow & M_{1/}(y_0, \mathbf{z}_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{1/}(y_1, \mathbf{z}_1) & \rightarrow & M_{1/}(y_0, \mathbf{z}_1) \end{array}$$

est aussi homotopiquement-cartésien. Les trois coins du bas et de droite coïncident à homotopie près avec les trois coins correspondants dans le carré ci-dessus pour les localisées. On en déduit l'équivalence

$$M_{1/}^I(y, \mathbf{z}) \cong \underline{Hom}(I, L(M)')_{1/}(y, z)$$

qui donne l'énoncé voulu. □

Démonstration du théorème 18.6

On note que le morphisme en question est essentiellement surjectif par 18.2. Il s'agit donc de prouver qu'il est pleinement fidèle.

Pour le moment on va supposer que le théorème est connu pour les catégories *directes* ou *inverses*, i.e. les catégories avec fonction "degré" où toutes les flèches sauf l'identité sont strictement monotones pour le degré. Ceci sera justifié ultérieurement (cf point (1) ci-dessous). En fait, on fera une première passe de notre démonstration pour régler ce cas, ensuite la deuxième passe que nous décrivons maintenant—la raison pour cette contorsion étant que pour le cas direct nous avons besoin d'exactly les mêmes arguments que pour le cas général, avec même quelques simplifications mais pas suffisamment pour justifier,

pour nous qui sommes paresseux, de répéter deux fois l'argument; donc, on commence par la version la plus compliquée (cette manipulation sera mieux expliquée en (1) à la fin de la preuve). Nous avons découvert cette technique qui consiste à considérer d'abord le cas direct et ensuite le cas de Reedy dans [59] où Hirschhorn où prend soin de traiter le cas "direct" indépendamment d'abord.

On procédera par récurrence sur la longueur de la fonction degré sur Y . On suppose que tous les objets de Y sont de degré $\leq k$, et que le théorème est démontré pour les catégories de Reedy avec fonction degré de longueur $\leq k - 1$. On pose $Z := F^{k-1}Y$, en particulier cette hypothèse s'applique à Z .

On notera y_i les objets de Y de degré k (l'indice i est dans un ensemble d'indices que nous ne mettons pas dans les notations). Pour chacun de ces objets, on note

$$Y_i := Latch(y_i) + \{y_i\} + Match(y_i),$$

et $Z_i := Y_i \cap Z = Latch(y_i) + Match(y_i)$. On note que Y_i et Z_i sont des catégories directes (ou alors inverses), donc on peut supposer que le théorème s'y applique.

Soit $[0, 1, 2]$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $0 < 1 < 2$ et $[0, 2]$ sa sous-catégorie pleine avec objets 0 et 2.

Soit $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}$ (resp. $\mathbf{M}(y_i)^{[0,2]}$) la catégorie de $[0, 1, 2]$ -diagrammes (resp. $[0, 2]$ -diagrammes) dans $\mathbf{M}(y_i)$. On notera les diagrammes $u = (u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2)$ (ou $u = (u_0 \rightarrow u_2)$).

On a le carré cartésien suivant de catégories:

$$\begin{array}{ccc} Sect(Y_i, \int_{Y_i} \mathbf{M}) & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sect(Z_i, \int_{Z_i} \mathbf{M}) & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)^{[0,2]}. \end{array}$$

Le morphisme du haut envoie une section σ vers le diagramme

$$latch(\sigma, y_i) \rightarrow \sigma(y_i) \rightarrow match(\sigma, y_i).$$

Le morphisme du bas envoie une section τ au-dessus de Z , vers le diagramme

$$latch(\tau, y_i) \rightarrow match(\tau, y_i).$$

On notera $Sect(Y_i, \int_{Y_i} \mathbf{M})_{c,f}$ la sous-catégorie des sections dont la partie directe (i.e. la restriction de la section sur $Latch(y_i) + \{y_i\}$) est cofibrante, et la partie inverse (i.e. la restriction de la section sur $\{y_i\} + Match(y_i)$) est fibrante. De même pour $Sect(Z_i, \int_{Z_i} \mathbf{M})_{c,f}$. On notera $\mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,1,2]}$ la catégorie des diagrammes u dans lesquels u_0 est cofibrant, $u_0 \rightarrow u_1$ est une cofibration, u_2 est fibrant et $u_1 \rightarrow u_2$ est une fibration. On notera $\mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,2]}$ la catégorie des diagrammes v avec v_0 cofibrant et v_2 fibrant.

Le carré ci-dessus donne aussi un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y_i, f_{Y_i} \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,1,2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z_i, f_{Z_i} \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,2]}. \end{array}$$

Pour chacune de ces catégories on a une notion évidente d'équivalence faible—qu'on se dispensera de mettre dans la notation des localisées. L'avantage de ce deuxième carré est que les morphismes horizontaux respectent les équivalences faibles (ce qui n'est pas le cas pour le premier carré, car les morphismes horizontaux comportent des limites et colimites).

Maintenant on a aussi le carré cartésien de catégories

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M}) & \rightarrow & \prod_i \text{Sect}(Y_i, f_{Y_i} \mathbf{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M}) & \rightarrow & \prod_i \text{Sect}(Z_i, f_{Z_i} \mathbf{M}). \end{array}$$

Si on note $\text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{c,f}$ la sous-catégorie des objets cofibrants et fibrants pour la structure de Reedy (avec la notation analogue pour Z) alors on obtient le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \prod_i \text{Sect}(Y_i, f_{Y_i} \mathbf{M})_{c,f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \prod_i \text{Sect}(Z_i, f_{Z_i} \mathbf{M})_{c,f}. \end{array}$$

Ici encore, les morphismes horizontaux respectent les équivalences faibles. Il en découle le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,1,2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M})_{c,f} & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,2]}. \end{array}$$

Soit N l'une des catégories de modèles dans le carré cartésien précédent (soit l'un des facteurs d'un produit, soit le produit), et soit $N_{c,f}$ sa sous-catégorie définie ci-dessus. Sous l'hypothèse des factorisations fonctorielles, il existe un foncteur $\zeta : N \rightarrow N_{c,f}$ et une transformation naturelle $t_u : \zeta(u) \xrightarrow{\cong} u$. Ce foncteur respecte les équivalences faibles et les t_u sont des équivalences faibles. En particulier, il établit une équivalence $L(N_{c,f}) \cong L(N)$.

Soient $\sigma, \tau \in \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{c,f}$, et notons $\sigma|_Z, \tau|_Z, \sigma_{012}^i, \tau_{012}^i$, et $\sigma_{02}^i, \tau_{02}^i$ leurs images respectivement dans $\text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M}|_Z)_{c,f}, \mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,1,2]}$, et $\mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,2]}$. On prétend que le carré (*)

$$\begin{array}{ccc} L(\text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{c,f})_{1/}(\sigma, \tau) & \rightarrow & \prod_i L(\mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,1,2]})_{1/}(\sigma_{012}^i, \tau_{012}^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(\text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M}|_Z)_{c,f})_{1/}(\sigma|_Z, \tau|_Z) & \rightarrow & \prod_i L(\mathbf{M}(y_i)_{c,f}^{[0,2]})_{1/}(\sigma_{02}^i, \tau_{02}^i) \end{array}$$

est homotopiquement-cartésien.

Supposons qu'on a montré que $(*)$ est homotopiquement-cartésien, et terminons la démonstration du théorème. On a un carré homotopiquement-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, \int_Y L(\mathbf{M}))_{1/}(\sigma, \tau) & \rightarrow & \prod_i L(\mathbf{M}(y_i))_{1/}^{[0,1,2]}(\sigma_{012}^i, \tau_{012}^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, \int_Z L(\mathbf{M})|_Z)_{1/}(\sigma|_Z, \tau|_Z) & \rightarrow & \prod_i L(\mathbf{M}(y_i))_{1/}^{[0,2]}(\sigma_{02}^i, \tau_{02}^i), \end{array}$$

où pour les produits directs on prend d'abord des remplacements de Kan des ensembles simpliciaux (i.e. on prend les produits directs homotopiques). Pour justifier ceci, on fait une version "homotopique" pour les $L(\mathbf{M})$ de la discussion des diagrammes sur les catégories de Reedy, en utilisant la notion d'adjoint homotopique du §8. Voir aussi dans la démonstration du théorème 18.2. Nous ne donnons pas plus de détails sur ce point.

Le morphisme du carré $(*)$ dans celui-ci induit une équivalence sur les trois termes en bas et à droite. En effet, pour Z on suppose connu le théorème par récurrence, et à droite il s'agit de diagrammes indexés par des catégories directes $[0, 1, 2]$ et $[0, 2]$ —que nous supposons déjà traitées. Par le lemme 18.8, les produits directs dans le carré $(*)$ sont des produits directs homotopiques.

Le fait que les deux carrés soient homotopiquement-cartésiens implique alors que le morphisme

$$L(\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})_{c,f})_{1/}(\sigma, \tau) \rightarrow \text{Sect}(Y, \int_Y L(\mathbf{M}))_{1/}(\sigma, \tau)$$

est une équivalence, ce qui démontre l'étape de récurrence.

Pour finir la démonstration, nous devons: (1) justifier l'hypothèse que le théorème est connu pour les catégories directes (de longueur finie, c'est ce qu'on utilise dans la démonstration ci-dessus); (2) montrer que le carré $(*)$ ci-dessus est homotopiquement-cartésien; et (3) justifier le passage à la limite sur le k des $F^k Y$ pour une catégorie de Reedy Y avec fonction degré non-bornée.

Pour (1), supposons maintenant qu'on veut démontrer le théorème pour une catégorie directe Y (de longueur finie). On procède de la même façon par récurrence sur la longueur de Y , et on recopie les étapes de la démonstration ci-dessus. Le seul changement est que les catégories $Match(y_i)$ sont vides et donc les termes $match(\sigma, y_i)$ n'apparaissent pas. En particulier, on peut remplacer la catégorie des diagrammes $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}$ de longueur 3, par une catégorie de diagrammes $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1]}$ de longueur 2; et la catégorie des diagrammes $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1]}$ devient juste $\mathbf{M}(y_i)$. Ceci veut dire qu'à la fin on est ramené à considérer le cas de $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1]}$, autrement dit le cas des diagrammes indexés par $Y = I = [0, 1]$ à valeurs dans une catégorie de modèles fermée fixe $M = \mathbf{M}(y_i)$. Ce cas a été traité par le lemme 18.9.

Pour (2), on va encore utiliser la méthode des résolutions. D'abord, on peut supposer que σ est fibrant et cofibrant, ainsi que τ . On choisit une résolution simpliciale $\tau \rightarrow \mathbf{t}$ et

on peut supposer que \mathbf{t} est fibrant et cofibrant en tant qu'objet simplicial i.e.

$$\mathbf{t} \in \text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})^{\Delta^\circ}.$$

Notons ici qu'il s'agit d'itérer deux fois l'opération qui consiste à “prendre la structure de Reedy”: d'abord on a pris la structure de Reedy sur $\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$ et ensuite, par rapport à cette structure, on a pris la structure de Reedy sur les diagrammes simpliciaux là-dedans.

En particulier, pour tout $p \in \Delta$, $\mathbf{t}(p) \in \text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})$ est à la fois fibrant et cofibrant, donc on a

$$\mathbf{t} \in [\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})_{c,f}]^{\Delta^\circ}.$$

Les images $\mathbf{t}|_Z$, \mathbf{t}_{012}^i , et \mathbf{t}_{02}^i , qui sont des objets simpliciaux dans les autres cmf N apparaissant ci-dessus, sont en fait des objets simpliciaux des $N_{c,f}$.

Il faut fixer une structure de cmf sur $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}$ et sur $\mathbf{M}(y_i)^{[0,2]}$. Pour cela, on utilisera une structure de Reedy sur $[0, 1, 2]$ pour laquelle l'objet 1 est de degré maximal; donc la flèche 01 est directe, et 12 est inverse. Maintenant il y a un choix à faire quant à la flèche 02: nous allons choisir de dire que c'est une flèche directe, ce qui correspond à dire $\text{deg}(0) < \text{deg}(2)$ (il faut faire “pencher” la fonction degré d'un coté ou de l'autre). La structure correspondante sur $\mathbf{M}(y_i)^{[0,2]}$ consiste à dire encore que la flèche 02 est directe. Avec ce choix, un objet de $\mathbf{M}(y_i)^{[0,2]}$ est fibrant si et seulement si ses composantes sont fibrantes, tandis qu'un objet est cofibrant si et seulement si ses composantes sont fibrantes et la flèche 02 est une cofibration. Un objet de $\mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}$ est fibrant si et seulement si ses composantes ainsi que la flèche 12 le sont; et un objet est cofibrant si et seulement si ses composantes ainsi que les flèches 01 et 02 le sont.

On a toujours que τ_{012}^i et \mathbf{t}_{012}^i sont des objets fibrants (de même pour τ_{02}^i et \mathbf{t}_{02}^i). Par contre, σ_{012}^i et σ_{02}^i ne sont plus cofibrantes car on ne peut pas garantir que la flèche $\sigma_0^i \rightarrow \sigma_2^i$ soit une cofibration. Pour arranger cela on choisit un remplacement cofibrant $\tilde{\sigma}_{012}^i \rightarrow \sigma_{012}^i$ de la manière suivante: on choisit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1^i & \rightarrow & \tilde{\sigma}_2^i \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow \\ \sigma_0^i & \rightarrow & \sigma_2^i \end{array}$$

avec une fibration triviale à droite, et une cofibration en diagonale. Le morphisme de gauche reste une cofibration et on ne dit rien du morphisme du haut. Le composé $\sigma_1^i \rightarrow \sigma_2^i$ devrait être celui qu'on a déjà. On pose

$$\tilde{\sigma}_{012}^i := [\sigma_0^i \rightarrow \sigma_1^i \rightarrow \tilde{\sigma}_2^i].$$

Le carré d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}(\sigma_{012}^i, \mathbf{t}_{012}^i) & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}(\tilde{\sigma}_{012}^i, \mathbf{t}_{012}^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{M}(y_i)_{1/}^{[0,2]}(\sigma_{02}^i, \mathbf{t}_{02}^i) & \rightarrow & \mathbf{M}(y_i)_{1/}^{[0,2]}(\tilde{\sigma}_{02}^i, \mathbf{t}_{02}^i) \end{array}$$

est cartésien. De même le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{1/}(\sigma, \mathbf{t}) & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y)^{[0,1,2]}(\sigma_{012}^i, \mathbf{t}_{012}^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M}|_Z)_{1/}(\sigma|_Z, \mathbf{t}|_Z) & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y)_{1/}^{[0,2]}(\sigma_{02}^i, \mathbf{t}_{02}^i) \end{array}$$

est cartésien et en composant avec le produit sur i des carrés précédents on obtient le carré cartésien (**) d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \text{Sect}(Y, f_Y \mathbf{M})_{1/}(\sigma, \mathbf{t}) & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}(\tilde{\sigma}_{012}^i, \mathbf{t}_{012}^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sect}(Z, f_Z \mathbf{M}|_Z)_{1/}(\sigma|_Z, \mathbf{t}|_Z) & \rightarrow & \prod_i \mathbf{M}(y_i)_{1/}^{[0,2]}(\tilde{\sigma}_{02}^i, \mathbf{t}_{02}^i). \end{array}$$

Ce carré est équivalent au carré (*) (pour trouver le morphisme entre carrés, notons de façon générale que si (C, W) est une catégorie avec sous-catégorie “d'équivalences” et si x, y en sont des objets, avec un objet simplicial augmenté $y \rightarrow \mathbf{y}$ tel que pour tout p le morphisme $y \rightarrow \mathbf{y}(p)$ soit dans W , alors on obtient un morphisme naturel d'ensembles simpliciaux $C_{1/}(x, \mathbf{y}) \rightarrow L^H(C, W)_{1/}(x, y)$ où L^H est la localisation par hamacs [32] [33]; on applique ceci aux catégories $C = N_{c,f}$ qui apparaissent dans (*)).

Donc pour (2) il suffit de voir que (**) est homotopiquement-cartésien, donc il suffit de voir que pour tout i le morphisme

$$\mathbf{M}(y_i)^{[0,1,2]}(\tilde{\sigma}_{012}^i, \mathbf{t}_{012}^i) \rightarrow \mathbf{M}(y_i)_{1/}^{[0,2]}(\tilde{\sigma}_{02}^i, \mathbf{t}_{02}^i)$$

est une fibration de Kan.

Pour ceci on va simplifier la notation: on prend une cfm M et deux diagrammes $x, y \in M^{[0,1,2]}$ plus une résolution simpliciale fibrante $y \rightarrow \mathbf{y}$. Pour ceci on munit (comme avant) $M^{[0,1,2]}$ d'une structure de cmf telle que les objets fibrants soient les diagrammes d'objets fibrants avec le deuxième morphisme 12 fibrant, et les objets cofibrants sont les diagrammes d'objets cofibrants avec les morphismes 01 et 02 cofibrants. Pareillement on munit $M^{[0,2]}$ de la structure pour laquelle les objets cofibrants sont les diagrammes d'objets cofibrants avec une cofibration en 02.

Notons i le morphisme $[0, 2] \hookrightarrow [0, 1, 2]$; on a le foncteur

$$i^* : M^{[0,1,2]} \rightarrow M^{[0,2]}$$

et son adjoint à gauche $i_!$. Cet adjoint a la description concrète suivante. Si $u = (u_0 \rightarrow u_2) \in M^{[0,2]}$ alors

$$i_!(u) = [u_0 \xrightarrow{=} u_0 \rightarrow u_2] \in M^{[0,1,2]}.$$

Si x est un objet cofibrant de $M^{[0,1,2]}$ alors le morphisme d'adjonction $i_!i^*x \rightarrow x$ est

$$[x_0 \xrightarrow{=} x_0 \rightarrow x_2] \rightarrow [x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2]$$

qui est une cofibration.

On a

$$M_{1'}^{[0,2]}(i^*x, i^*\mathbf{y}) = M_{1'}^{[0,1,2]}(i_!i^*x, \mathbf{y}).$$

Le morphisme en question est donc le morphisme induit par $i_!i^*x \rightarrow x$,

$$M_{1'}^{[0,1,2]}(x, \mathbf{y}) \rightarrow M_{1'}^{[0,1,2]}(i_!i^*x, \mathbf{y}).$$

Si x est cofibrant alors la cofibration $i_!i^*x \rightarrow x$ induit ici une fibration de Kan d'ensembles simpliciaux, ce qui montre que $(**)$ est homotopiquement-cartésien, d'où la même chose pour $(*)$ ce qui donne (2).

Au passage, l'argument ci-dessus montre que si σ et τ (resp. \mathbf{t}) sont des sections cofibrantes et fibrantes (resp. est une résolution simpliciale fibrante et cofibrante) alors le morphisme

$$Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})_{1'}(\sigma, \mathbf{t}) \rightarrow Sect(Z, \int_Z \mathbf{M}|_Z)_{1'}(\sigma, \mathbf{t})$$

est une fibration de Kan.

Pour (3) on fixe maintenant une catégorie de Reedy Y avec fonction degré non-nécessairement bornée. On fixe un remplacement fibrant

$$\int_Y' L(\mathbf{M}) \rightarrow Y$$

ce qui détermine des remplacements fibrants par restriction

$$\int_{F^k Y}' L(\mathbf{M})|_{F^k Y} \rightarrow F^k Y.$$

Dans ces conditions, $Sect(Y, \int_Y' L(\mathbf{M}))$ est la limite de la suite

$$\dots \rightarrow Sect(F^k Y, \int_{F^k Y}' L(\mathbf{M})|_{F^k Y}) \rightarrow Sect(F^{k-1} Y, \int_{F^{k-1} Y}' L(\mathbf{M})|_{F^{k-1} Y}) \rightarrow \dots,$$

et les morphismes de transition dans cette suite sont des fibrations de 1-catégories de Segal. D'autre part, fixons des sections σ et τ dans $Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})$, avec σ cofibrante, et fixons une résolution simpliciale fibrante $\tau \rightarrow \mathbf{t}$. On a que

$$Sect(Y, \int_Y \mathbf{M})_{1'}(\sigma, \mathbf{t})$$

est la limite de la suite d'ensembles simpliciaux

$$\dots \rightarrow \text{Sect}(F^k Y, \int_{F^k Y} \mathbf{M}|_{F^k Y})_{1/}(\sigma|_{F^k Y}, \mathbf{t}|_{F^k Y}) \rightarrow \dots$$

Par l'argument donné pour (2), les morphismes de transition de cette suite sont des fibrations de Kan. Cette suite est, terme à terme équivalente (par le même argument) à la suite

$$\dots \rightarrow \text{Sect}(F^k Y, \int_{F^k Y} L(\mathbf{M})|_{F^k Y})_{1/}(\sigma|_{F^k Y}, \tau|_{F^k Y}) \rightarrow \dots,$$

et ces équivalences étant fonctorielles on obtient une équivalence de diagrammes entre les deux suites (en fait, pour bien avoir un morphisme ici il conviendrait d'utiliser la localisation par hamacs L^H au lieu de L). Le fait que les morphismes de transition dans les deux cas soient des fibrations de Kan implique que le morphisme sur les limites est une équivalence

$$\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})_{1/}(\sigma, \mathbf{t}) \xrightarrow{\cong} \text{Sect}(Y, \int_Y L(\mathbf{M}))_{1/}(\sigma, \tau).$$

Or

$$\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M})_{1/}(\sigma, \mathbf{t}) \cong L(\text{Sect}(Y, \int_Y \mathbf{M}))_{1/}(\sigma, \tau)$$

d'où la partie (3).

Ceci termine la démonstration du théorème 18.6. □

19. La descente pour les préfaisceaux de Quillen à gauche

On va prouver un théorème de descente pour un préfaisceau de Quillen à gauche, qui donnera des conditions pour que $L(\mathbf{M})$ soit un champ. Nous avons trouvé cette démonstration à partir du cas des complexes. Le problème principal pour ce résultat est qu'on doit partir d'une section faible de $L(\mathbf{M})$ qui peut être, *a priori*, assez "sauvage". Dans les chapitres précédents nous avons trouvé une série de résultats qui permettent de "domestiquer" une telle section, i.e. de se ramener au cas d'une section de $f\mathbf{M}$ au lieu d'une section de $f'L(\mathbf{M})$.

Le travail maintenant consiste à démontrer qu'une section de $f\mathbf{M}$ descend sur l'objet de base. Cette dernière partie est en réalité déjà bien connue, par exemple on sait prendre le complexe simple associé à un complexe cosimplicial, voir Deligne [26]. On conjecture que c'est ce problème qui a été abordé dans les "papiers secrets" de Deligne auxquels Illusie fait référence dans [62]. C'est aussi le sujet de l'exposé de B. Saint-Donat sur la *descente cohomologique* dans SGA 4 ([3]). La méthode dans tous les cas est de commencer avec une section σ dans $Sect^{eq}(\Delta, f_{\Delta}\mathbf{M})$ (dans SGA 4 cet ensemble de sections s'appelle $\Gamma^{cocart}(\)$) et de la "descendre" via l'augmentation, en appliquant le foncteur "image directe" que nous noterons φ_* . Le problème est de vérifier que cela répond bien au problème de descente, i.e. que $\varphi^*(\varphi_*\sigma)$ est équivalente à σ .

Voir la fin de ce chapitre pour une comparaison plus détaillée entre notre discussion et celle de SGA 4.

Au début de ce numéro on va étudier un préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{M} sur $(\Delta^+)^o$. Si $p \rightarrow q$ est un morphisme de Δ^+ alors le foncteur de restriction (i.e. le foncteur de Quillen à gauche) va dans le sens $\mathbf{M}(p) \rightarrow \mathbf{M}(q)$. Ici Δ^+ est la catégorie Δ augmentée par un objet initial qu'on notera ι . Sauf en cas de confusion possible, on évitera la notation $\mathbf{M}|_{\Delta^o}$ et on désignera aussi cette restriction par \mathbf{M} .

On fera l'hypothèse (o) suivante:

(o)' Que chaque $\mathbf{M}(y)$ admet des limites et colimites petites arbitraires, et factorisations fonctorielles;

(o)'' que tout objet de $\mathbf{M}(y)$ est cofibrant; et

(o)''' que $Sect(\Delta^+, f_{\Delta^+}\mathbf{M})$ et $Sect(\Delta, f_{\Delta}\mathbf{M})$ admettent des structures de cmf de type

(II) (du Théorème 17.1) engendrées par cofibrations.

L'hypothèse (o)'' que tout objet est cofibrant est là par pure commodité et évidemment inessentielle. La structure de type (II) de l'hypothèse (o)''' pourrait probablement être remplacée, dans notre argument, par une structure de Reedy. Par contre, l'hypothèse (o)' (qui par ailleurs est devenue standard cf [59] [30] [60]) et en particulier la fermeture de $\mathbf{M}(\iota)$ par petites limites—par exemple, par limites indexées par Δ —est essentielle et le théorème 19.4 ci-dessous ne serait probablement plus vrai sans cette condition.

On munit $Sect(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M})$ de sa structure de cmf de type (II) de l'hypothèse (o)". Le foncteur "section constant"

$$\varphi^* : \mathbf{M}(\iota) \rightarrow Sect(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M})$$

est alors un foncteur de Quillen à gauche, et son adjoint à droite qu'on notera φ_* (qui existe d'après l'hypothèse (o)') est un foncteur de Quillen à droite.

On peut décomposer φ_* de la manière suivante. L'adjoint des restrictions fournit un morphisme

$$r : Sect(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}(\iota)^{\Delta}.$$

En composant ensuite avec le foncteur $lim : \mathbf{M}(\iota)^{\Delta} \rightarrow \mathbf{M}(\iota)$ on obtient

$$\varphi_* : Sect(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}(\iota),$$

$$\varphi_*(\sigma) := \lim_{\Delta} r\sigma.$$

On note qu'un objet fibrant pour la structure de type (II) est aussi fibrant pour la structure de Reedy (qui existe automatiquement sur les sections). En outre r transforme les objets fibrants en objets fibrants (c'est un foncteur de Quillen à droite car composé d'adjoints de restrictions). Donc, pour $\sigma \in Sect(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M})_f$, $\varphi_*(\sigma)$ est équivalent à $holim_{\Delta} r\sigma$.

On veut montrer que φ^* induit une équivalence

$$L(\varphi^*) : L(\mathbf{M}(\iota)) \cong L(Sect^{eq}(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M})).$$

On commence par l'observation suivante. On garde pour ce lemme l'hypothèse de commodité que tous les objets sont cofibrants, mais elle n'est certainement pas essentielle.

Lemme 19.1 *Soient N et M des catégories de modèles fermées et $\varphi_* : N \rightarrow M$, $\varphi^* : M \rightarrow N$ une paire de foncteurs adjoints, où φ^* est un foncteur de Quillen à gauche et φ_* un foncteur de Quillen à droite. Supposons que tous les objets de M et de N sont cofibrants. Supposons que pour tout objet $x \in M$, le morphisme d'adjonction $x \rightarrow \varphi_*(\varphi^*x)'$ est une équivalence (où $(\varphi^*x)'$ est le remplacement fibrant de φ^*x).*

Alors le foncteur

$$L(\varphi^*) : L(M) \rightarrow L(N)$$

est pleinement fidèle, avec image essentielle constitué des objets fibrants $y \in N$ tels que $\varphi^(\varphi_*y) \rightarrow y$ soit une équivalence, et avec $L(\varphi_*)$ pour inverse sur cette image.*

Preuve: Soit $N' \subset N_f$ la sous-catégorie des objets fibrants y tels que $\varphi^*(\varphi_*y) \rightarrow y$ soit une équivalence. On note que N' est stable par équivalence dans N_f (i.e. si $z \in N_f$ et $y \in N'$ avec $z \cong y$ alors $z \in N'$). Par le principe 8.2, $(N', W_{N_f} \cap N')$ admet un calcul de fractions homotopique, et la localisée $L(N', W_{N_f} \cap N')$ est une sous-catégorie simpliciale pleine de $L(N_f, W_{N_f}) \cong L(N, W_N)$. Par [32] Corollary 3.6, les foncteurs φ_* et φ^* établissent une équivalence entre $L(M, W_M)$ et $L(N', W_N \cap N')$. \square

Retournons à la situation précédente. On va appliquer le lemme à la paire de foncteurs φ_*, φ^* définis précédemment. Si $\sigma \in \text{Sect}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$ est équivalente à $\varphi^*(x)$ pour $x \in \mathbf{M}(\iota)$ alors les morphismes $\sigma^r(f)$ sont des équivalences, i.e. σ est dans $\text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$.

On va conserver l'hypothèse (o) ci-dessus. En plus, on va supposer qu'on a les deux propriétés suivantes:

- (i) un morphisme a de $\mathbf{M}(\iota)$ est une équivalence si et seulement si $\varphi^*(a)$ est une équivalence; et
- (ii) pour tout $\sigma \in \text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})_f$, le morphisme d'adjonction $\varphi^*\varphi_*(\sigma) \rightarrow \sigma$ est une équivalence.

On peut remarquer que la propriété (i) est équivalente à la condition:

- (i)' un morphisme a de $\mathbf{M}(\iota)$ est une équivalence si et seulement si sa restriction à $\mathbf{M}(0)$ en est une.

Alors pour $x \in \mathbf{M}(\iota)$ la propriété (ii) s'applique à $\varphi^*(x)'$ (le remplacement fibrant de $\varphi^*(x)$), donc le morphisme $\varphi^*\varphi_*(\varphi^*(x)') \rightarrow \varphi^*(x)'$ est une équivalence. Le composé

$$\varphi^*(x) \rightarrow \varphi^*\varphi_*(\varphi^*(x)') \rightarrow \varphi^*(x)'$$

est égal à l'équivalence faible $\varphi^*(x) \rightarrow \varphi^*(x)'$ du remplacement fibrant. Le premier morphisme est donc une équivalence faible, mais ce morphisme est $\varphi^*(a)$ où a est le morphisme d'adjonction $a : x \rightarrow \varphi_*\varphi^*(x)$. L'hypothèse du lemme est donc vérifiée; il s'ensuit que $L(\varphi^*)$ est pleinement fidèle. D'autre part, la condition (ii) ci-dessus identifie l'image de $L(\varphi^*)$ comme la localisée de $\text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$.

On note comme plus haut que (i) est équivalente à la condition selon laquelle un morphisme a de $\mathbf{M}(\iota)$ est une équivalence si et seulement si sa restriction à $\mathbf{M}(0)$ en est une. On a obtenu le

Corollaire 19.2 *Soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur $(\Delta^+)^o$ qui satisfait les conditions ci-dessus qu'on rappelle:*

- (o) *chaque $\mathbf{M}(y)$ admet des petites limites et colimites arbitraires, et des factorisations fonctorielles; tout objet de $\mathbf{M}(y)$ est cofibrant; et $\text{Sect}(\Delta^+, f_{\Delta^+} \mathbf{M})$ et $\text{Sect}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$ admettent des structures de cmf de type (II) (du Théorème 17.1) engendrées par cofibrations.*
- (i) *un morphisme a de $\mathbf{M}(\iota)$ est une équivalence si et seulement si sa restriction à $\mathbf{M}(0)$ en est une; et*

(ii) pour tout $\sigma \in \text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M})_f$, le morphisme d'adjonction $\varphi^* \varphi_*(\sigma) \rightarrow \sigma$ est une équivalence.

Alors le morphisme

$$L(\mathbf{M}(\iota)) \rightarrow L(\text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, \int_{\Delta} \mathbf{M}))$$

est une équivalence de catégories simpliciales.

□

On aborde maintenant le cas d'un préfaisceau de Quillen sur un site. Soit \mathcal{X} un site admettant des produits fibrés et suffisamment de sommes disjointes (voir §15) et soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen à gauche sur \mathcal{X} . Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de \mathcal{X} alors on note

$$f^* : \mathbf{M}(Y) \rightarrow \mathbf{M}(X)$$

la restriction res_f , et f_* son adjoint à droite.

On fait l'hypothèse que $L(\mathbf{M})$ est compatible aux sommes disjointes 15.2. On présente d'abord un critère qui permet de vérifier cette hypothèse. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ est une famille d'objets de \mathcal{X} , on pose

$$\mathbf{M}(\mathcal{U}) := \prod_{\alpha} \mathbf{M}(U_\alpha).$$

Ceci a une structure de cmf. Le morphisme de restriction fournit un morphisme

$$r_{\mathcal{U}}^* : \mathbf{M}(\coprod \mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathcal{U}),$$

qui est un foncteur de Quillen à gauche, dont on note $r_{\mathcal{U},*}$ l'adjoint à droite.

Corollaire 19.3 *On suppose que, pour toute famille \mathcal{U} d'objets de \mathcal{X} (de taille $< \beta$), et pour tout u dans $\mathbf{M}(\mathcal{U})$, le morphisme d'adjonction*

$$r_{\mathcal{U}}^* r_{\mathcal{U},*}(u) \rightarrow u$$

est une équivalence faible. On suppose en outre que, pour toute famille \mathcal{U} comme plus haut, un morphisme a de $\mathbf{M}(\coprod \mathcal{U})$ est une équivalence faible si et seulement si $r_{\mathcal{U}}^(a)$ en est une. Alors $L(\mathbf{M})$ est compatible aux sommes disjointes.*

Preuve: Ceci est une caractérisation bien connue des équivalences de Quillen. Par ailleurs, c'est un corollaire du lemme 19.1. □

Théorème 19.4 *Supposons que \mathcal{X} est un site qui admet des produits fibrés et suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés. Soit \mathbf{M} un préfaisceau de Quillen sur \mathcal{X} . On suppose que \mathbf{M} satisfait les trois propriétés suivantes:*

(0) *chaque $\mathbf{M}(y)$ admet des petites limites et colimites arbitraires, et des factorisations fonctorielles; tout objet de $\mathbf{M}(y)$ est cofibrant; et pour tout foncteur $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de 1-catégories, $\text{Sect}(\mathcal{Y}, \int_{\mathcal{Y}} \mathbf{M}|_{\mathcal{Y}})$ admet une structure de cmf de type (II) engendrée par cofibrations.*

(1) *Pour tout X de \mathcal{X} et toute famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X\}$ couvrant X (ou vérifiant $X = \coprod \mathcal{U}$) un morphisme a de $\mathbf{M}(X)$ est une équivalence faible si et seulement si sa restriction $p_\alpha^*(a)$ à $\mathbf{M}(U_\alpha)$ est une équivalence faible pour tout α ;*

(2) *si $X = \coprod \mathcal{U}$ est la somme disjointe d'une famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ alors le morphisme d'adjonction*

$$r_{\mathcal{U}}^* r_{\mathcal{U},*} u \rightarrow u$$

est une équivalence faible pour tout $u \in \mathbf{M}(\mathcal{U}) := \prod_{\alpha} \mathbf{M}(U_\alpha)$; et

(3) *le préfaisceau \mathbf{M} est cartésien en ce sens que pour tout diagramme cartésien d'objets de \mathcal{X}*

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{q} & Z \\ p \downarrow & & \downarrow r \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

et pour tout u dans $\mathbf{M}(Y)$. l'application naturelle

$$r^* s_*(u) \xrightarrow{\cong} q_* p^*(u).$$

est une équivalence faible. Alors le préfaisceau de catégories simpliciales $L(\mathbf{M})$ est un champ (i.e. 1-champ de Segal) sur \mathcal{X} .

Preuve: On montre d'abord à l'aide du corollaire 19.3 que $L(\mathbf{M})$ est compatible aux sommes disjointes. Si $X = \coprod U_\alpha$ est la somme disjointe de la famille $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ alors on a le foncteur

$$r_{\mathcal{U}}^* : \mathbf{M}(X) \rightarrow \prod_{\alpha} \mathbf{M}(U_\alpha)$$

et son adjoint à droite $r_{\mathcal{U},*}$. La condition (1) plus le fait que \mathcal{U} est une famille couvrant X impliquent qu'une flèche a de $\mathbf{M}(X)$ est une équivalence faible si et seulement si $r_{\mathcal{U}}^*(a)$ est une équivalence faible. La condition (2) donne l'autre partie de l'hypothèse du corollaire 19.3, et on obtient donc que $L(\mathbf{M})$ est compatible aux sommes disjointes.

On va appliquer 15.8 à $L(\mathbf{M})$. On peut donc fixer $X \in \mathcal{X}$ et une famille couvrant \mathcal{U} à un seul élément $p : U \rightarrow X$. On obtient le foncteur $\rho^+ \mathcal{U} : \Delta^+ \rightarrow \mathcal{X}^o$ défini par

$$\rho^+(\mathcal{U})(p) := U \times_X \dots \times_X U \quad (p+1 \text{ fois}).$$

En particulier on a $\rho^+(\mathcal{U})(\iota) = X$. On a le préfaisceau de Quillen à gauche $\rho^+(\mathcal{U})^*\mathbf{M}$ sur $(\Delta^+)^o$. On appellera $\rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M}$ sa restriction à Δ . Par le corollaire 18.7 (c'est ici qu'on strictifie nos données de descente) on a

$$\lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^*L(\mathbf{M}) \cong L(\text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M})).$$

Pour prouver que $L(\mathbf{M})$ est un champ, il suffit, d'après la proposition 15.8 (c), de prouver que le morphisme de restriction

$$L(\mathbf{M}(X)) \rightarrow \lim_{\leftarrow, \Delta} \rho(\mathcal{U})^*L(\mathbf{M})$$

est une équivalence. Donc il suffit de prouver que

$$L(\mathbf{M}(X)) \rightarrow L(\text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M}))$$

est une équivalence. Comme on a $M(X) = \rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M}(\iota)$, la question ne concerne donc que la restriction $\rho^+(\mathcal{U})^*\mathbf{M}$ à Δ^+ , et on peut appliquer le corollaire 19.2 ci-dessus. On munit

$$\text{Sect}(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M})$$

de sa structure de cmf de type (II) garantie par l'hypothèse (0).

Les hypothèses (0) et (1) impliquent immédiatement les conditions (o) et (i) du corollaire 19.2.

Pour l'hypothèse (ii) de 19.2, soit

$$\sigma \in \text{Sect}^{\text{eq}}(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M})_f$$

(c'est notre donnée de descente). On va la descendre en $\varphi_*(\sigma)$. On va montrer que le morphisme d'adjonction

$$\varphi^*\varphi_*(\sigma) \rightarrow \sigma$$

est une équivalence, après quoi 19.2 s'appliquera pour donner le résultat voulu.

Au-dessus de $(\Delta^+ \times \Delta^+)^o$ on a le préfaisceau de Quillen à gauche \mathbf{N} défini par

$$\mathbf{N}(a, b) := \mathbf{M}(\rho^+(\mathcal{U})(a) \times_X \rho^+(\mathcal{U})(b)).$$

Il y a un foncteur

$$\gamma : \Delta^+ \times \Delta^+ \rightarrow \Delta^+$$

de concaténation d'ensembles ordonnés (ι est l'ensemble vide), et on a

$$\mathbf{N} = \gamma^*(\rho(\mathcal{U})^*\mathbf{M}).$$

Avec la section σ on obtient trois sections de $\int_{\Delta \times \Delta} \mathbf{N}$, notées

$$p_1^* \sigma, \quad p_2^* \sigma, \quad \gamma^* \sigma.$$

La troisième $\gamma^* \sigma$ est juste la remontée de σ via γ ; et par exemple $p_1^*(\sigma)(a, b)$ est l'image de $\sigma \rho(\mathcal{U})(a)$ par le morphisme

$$\mathbf{M}(\rho(\mathcal{U})(a)) \rightarrow \mathbf{N}(a, b) = \mathbf{M}(\rho(\mathcal{U})(a) \times_X \rho(\mathcal{U})(b))$$

de restriction via la première projection du produit. On a des morphismes

$$p_1^* \sigma \rightarrow \gamma^* \sigma \leftarrow p_2^* \sigma$$

et notre hypothèse que σ est une *eq*-section implique que ces morphismes sont des équivalences faibles (objet par objet au-dessus de $\Delta \times \Delta$).

On munit $Sect(\Delta \times \Delta, \int_{\Delta \times \Delta} \mathbf{N})$ d'une structure de cmf qu'on appellera *de type (I-II)* (ce qui veut dire *grosso modo* "type (I) en la première variable et type (II) en la deuxième") de la façon suivante. Pour $p \in \Delta$ on munit

$$Sect(\{p\} \times \Delta, \int_{\{p\} \times \Delta} \mathbf{N}|_{\{p\} \times \Delta})$$

de sa structure de type (II) engendrée par cofibrations (d'après l'hypothèse (0)). Ces cmf forment un préfaisceau de Quillen à gauche sur Δ dont chaque valeur est engendrée par cofibrations. La catégorie des sections de ce préfaisceau de Quillen—qu'on munit de sa structure de type (I) du théorème 17.1—est exactement $Sect(\Delta \times \Delta, \int_{\Delta \times \Delta} \mathbf{N})$.

Dans cette structure de type (I-II), les cofibrations sont les morphismes qui, restreints à chaque $\Delta \times \{p\}$, sont des cofibrations pour la structure de type (I) (i.e. de type HBKQ). Par contre, les fibrations sont les morphismes qui, restreints à chaque $\{p\} \times \Delta$, sont des fibrations pour la structure de type (II) (i.e. de type Jardine-Brown-Heller).

Avec ces structures, le foncteur ("remonté par la première projection")

$$p_1^* : Sect(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^* \mathbf{M}) \rightarrow Sect(\Delta \times \Delta, \int_{\Delta \times \Delta} \mathbf{N})$$

préserve les cofibrations, i.e. c'est un foncteur de Quillen à gauche. Son adjoint à droite, qui existe d'après (0), et qu'on notera

$$p_{1,*} : Sect(\Delta \times \Delta, \int_{\Delta \times \Delta} \mathbf{N}) \rightarrow Sect(\Delta, \int_{\Delta} \rho(\mathcal{U})^* \mathbf{M})$$

est un foncteur de Quillen à droite. C'est l'analogue de φ_* pour la situation relative à la première projection.

La condition (3) du théorème implique que le morphisme naturel

$$\varphi^* \varphi_*(\sigma) \xrightarrow{\cong} p_{1,*} p_2^*(\sigma)$$

est une équivalence. Soit \mathbf{f} le foncteur “remplacement fibrant” pour la structure de type (I-II) sur les sections de \mathbf{N} . Le foncteur $p_{1,*} \circ \mathbf{f}$ est invariant par équivalence donc on obtient des équivalences

$$p_{1,*} \mathbf{f}(p_1^* \sigma) \rightarrow p_{1,*} \mathbf{f}(\gamma^* \sigma) \leftarrow p_{1,*} \mathbf{f}(p_2^* \sigma).$$

Sous l’hypothèse que σ est fibrant (pour la structure de type (II)), on a que $p_2^* \sigma$ est fibrant pour la structure de type (I-II), et donc

$$p_{1,*} p_2^*(\sigma) \rightarrow p_{1,*} \mathbf{f} p_2^*(\sigma)$$

est une équivalence. D’autre part on a le morphisme d’adjonction

$$\varphi^* \varphi_*(\sigma) \rightarrow \sigma$$

et encore

$$\sigma \rightarrow p_{1,*} \mathbf{f} p_1^* \sigma.$$

Leur composé est le morphisme de gauche dans le carré (*)

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* \varphi_*(\sigma) & \rightarrow & p_{1,*} p_2^*(\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{1,*} p_1^*(\sigma) & \rightarrow & p_{1,*} \gamma^*(\sigma). \end{array}$$

Les autres morphismes se déduisent des morphismes antérieurs. C’est un fait pas tout-à-fait évident que ce carré commute. Pour le prouver, posons $\eta := \varphi_*(\sigma)$ et considérons d’abord le carré (**)

$$\begin{array}{ccc} t^* \eta & \rightarrow & p_2^* \sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_1^* \sigma & \rightarrow & \gamma^* \sigma, \end{array}$$

où

$$t^* \eta := p_1^* \varphi^* \eta = p_2^* \varphi^* \eta.$$

Ce carré (**) commute. Pour le voir, notons P_a le produit fibré de $a + 1$ exemplaires de U au-dessus de X correspondant à $a \in \Delta$; et notons $[x \rightarrow y]^*$ et $[x \rightarrow y]_*$ les foncteurs de restriction et leurs adjoints. Notons qu’on a

$$P_{\gamma(a,b)} = P_a \times_X P_b$$

et

$$\eta = \lim_{\leftarrow, a} [P_a \rightarrow X]_*(\sigma(a)).$$

Notons $f_a : \eta \rightarrow [P_a \rightarrow X]_*(\sigma(a))$. les morphismes structurels correspondants. Les morphismes de transition dans la limite proviennent par exemple des morphismes structurels de σ comme

$$[P_a \times_X P_b \rightarrow P_a]^*(\sigma(a)) \rightarrow \sigma(\gamma(a, b)),$$

qui donne

$$\begin{aligned} [P_a \rightarrow X]_*(\sigma(a)) &\rightarrow [P_a \times P_b \rightarrow X]_*[P_a \times_X P_b \rightarrow P_a]^*(\sigma(a)) \\ &\rightarrow [P_a \times P_b \rightarrow X]_*\sigma(\gamma(a, b)). \end{aligned}$$

On obtient que le composé

$$\eta \xrightarrow{f_a} [P_a \rightarrow X]_*(\sigma(a)) \rightarrow [P_a \times P_b \rightarrow X]_*\sigma(\gamma(a, b))$$

est égal au morphisme $f_{\gamma(a, b)}$. Le composé en question est l'adjoint de la composante en (a, b) du composé inférieur dans le carré (**). Il s'ensuit que ce composé est égal au morphisme diagonal naturel

$$t^*\eta \rightarrow \gamma^*\sigma$$

dont la composante en (a, b) est l'adjoint de $f_{\gamma(a, b)}$. Par symétrie, le carré (**) commute.

En appliquant au carré (**) l'opération $p_{1,*}$ on obtient un carré qu'on peut composer avec le carré de naturalité des morphismes d'adjonction

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*\eta & \rightarrow & p_{1,*}p_1^*\varphi^*\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & \rightarrow & p_{1,*}p_1^*\sigma \end{array}$$

pour montrer que le carré (*) commute.

En appliquant l'opération "remplacement fibrant" au milieu sur la ligne en bas on obtient (par naturalité de la transformation naturelle $u \rightarrow \mathbf{f}u$) le carré (*)'

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*\eta & \rightarrow & p_{1,*}p_2^*(\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{1,*}\mathbf{f}p_1^*(\sigma) & \rightarrow & p_{1,*}\mathbf{f}\gamma^*(\sigma) \end{array}$$

qui commute. Or, ici, on sait déjà que les morphismes en haut, à droite et en bas sont des équivalences. Par "trois pour le prix de deux", le morphisme à gauche est une équivalence. Rappelons que c'est le composé

$$\varphi^*\varphi_*(\sigma) = \varphi^*\eta \rightarrow \sigma \rightarrow p_{1,*}\mathbf{f}p_1^*(\sigma).$$

En somme, pour prouver que notre morphisme d'adjonction

$$\varphi^* \varphi_*(\sigma) \rightarrow \sigma$$

est une équivalence, il suffit de prouver que le morphisme

$$\sigma \rightarrow p_{1,*} \mathbf{f}p_1^*(\sigma)$$

en est une.

Ce dernier fait relève de l'algèbre homologique ou homotopique plus ou moins standard. On indique brièvement l'argument, en faisant référence à Illusie [62]²⁴ (qui lui-même fait référence à des “papiers secrets” de Deligne—mais le lecteur pourra prouver le résultat en question tout seul). Posons

$$P_m := \rho(\mathcal{U})(m) = \mathcal{U} \times_X \dots \times_X \mathcal{U}.$$

On utilisera les notations $[x \rightarrow y]^*$ et $[x \rightarrow y]_*$ pour le foncteur de restriction et son adjoint entre $\mathbf{M}(y)$ et $\mathbf{M}(x)$, correspondant à un morphisme $x \rightarrow y$. D'autre part on travaille dans \mathcal{X}/X donc on peut supprimer l'indice X pour le produit fibré au-dessus de X . Avec ces notations, pour $(a, b) \in \Delta \times \Delta$ on a

$$(p_1^* \sigma)(a, b) = [P_a \times P_b \rightarrow P_a]^* \sigma(a).$$

On obtient l'objet cosimplicial de $\mathbf{M}(P_a)$, avec indice (co)simplicial b

$$C_{a,b} := [P_a \times P_b \rightarrow P_a]_* [P_a \times P_b \rightarrow P_a]^* \sigma(a).$$

On a

$$(p_{1,*} \mathbf{f}p_1^* \sigma)(a) \cong \text{holim}_{b \in \Delta} C_{a,b}.$$

Notons $\epsilon : P_a \times P_0 \rightarrow P_a$ la projection. On peut décomposer la projection $P_a \times P_b \rightarrow P_a$ en produit de $b + 1$ exemplaires de ϵ . On note ϵ^* et ϵ_* les functorialités pour \mathbf{M} par rapport à ϵ . En utilisant la formule donnée par l'hypothèse (2) du présent théorème, on a

$$C_{a,b} = (\epsilon_* \epsilon^*)^{b+1} \sigma(a).$$

En particulier, cet objet cosimplicial de $\mathbf{M}(P_a)$ est la *résolution cosimpliciale standard* de $\sigma(a)$ fournie par le couple de foncteurs adjoints ϵ_*, ϵ^* —cf Illusie [62] §1.5. Le théorème 1.5.3 de *loc cit.* implique que l'objet cosimplicial augmenté

$$\epsilon^* \sigma(a) \rightarrow \epsilon^* C_{a,-}$$

²⁴Le lecteur prendra garde que la signification de notre exposant $+$ (e.g. Δ^+) diffère de celle de [62]—c'est plutôt exactement l'inverse.

de $\mathbf{M}(P_a \times P_0)$ est “homotopiquement trivial”. D’après [62] (1.1.5 et le descriptif pour 1.5.3) ceci veut dire qu’il y a un morphisme

$$\epsilon^* C_{a,-} \rightarrow \epsilon^* \sigma(a)$$

tel que le composé

$$\epsilon^* C_{a,-} \rightarrow \epsilon^* C_{a,-}$$

soit homotope (au sens de [62] 1.1.5) à l’identité (l’autre composé étant lui-même l’identité).

Il y a une section

$$s : P_a \rightarrow P_a \times P_0$$

(diagonale en dernière variable), et en appliquant s^* à l’objet cosimplicial augmenté ci-dessus, on obtient (avec la formule $s^* \epsilon^* = 1$) que l’objet cosimplicial augmenté

$$\sigma(a) \rightarrow C_{a,-}$$

de $\mathbf{M}(P_a)$ est homotopiquement trivial. Il en résulte (car *holim* transforme les homotopies de [62] 1.1.5 en homotopies à la Quillen [83] pour la structure de cmf de $\mathbf{M}(P_a)$) que le morphisme

$$\text{holim}_{b \in \Delta} \sigma(a) \rightarrow \text{holim}_{b \in \Delta} C_{a,b}$$

admet un inverse à homotopie (de Quillen) près. Ceci implique que c’est une équivalence faible. On note que

$$\sigma(a) \rightarrow \text{holim}_{b \in \Delta} \sigma(a)$$

est une équivalence. Pour ceci on renvoie au résultat de Hirschhorn ([59] Theorem 19.5.1) qui implique que la *holim* d’un diagramme constant (dans n’importe quelle cmf qui satisfait (0) par exemple), prise sur une catégorie dont le nerf est contractile (tel est le cas pour Δ), est équivalente à la valeur prise sur le diagramme.

On conclut qu’on a une équivalence

$$\sigma(a) \xrightarrow{\cong} \text{holim}_{b \in \Delta} C_{a,b}$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque: On pourrait penser que si M est une catégorie de modèles fermée fixe admettant des limites et colimites arbitraires, alors le préfaisceau constant \underline{M} à valeurs dans M vérifie les hypothèses du théorème pour une topologie quelconque \mathcal{G} . Pourtant $L(\underline{M})$, qui est le 1-préchamp de Segal constant à valeurs $L(M)$, n’est pas en général un champ. La raison en est que $L(\mathbf{M})$ n’est pas compatible aux sommes disjointes.

Exercice: Réécrire l’énoncé et la démonstration du théorème 19.4 avec des structures de type Reedy au lieu de type (II); sans l’hypothèse que tous les objets des $\mathbf{M}(y)$ soient

cofibrants; et avec les morphismes des hypothèses (2) et (3) supposés être des équivalences faibles seulement quand il s'agit d'objets cofibrants et fibrants.

On précise que les auteurs n'ont pas fait cet exercice.

Comparaison avec SGA 4

On compare ici notre résultat du présent chapitre avec celui de l'exposé Vbis de SGA 4 [4] de Saint-Donat (d'après des "notes succinctes" de Deligne).

La première remarque à faire est que nous considérons la situation "instable" via nos cmf quelconques, tandis que [4] est consacré à la descente des complexes ce qui correspond à l'homotopie stable. Néanmoins, le cadre est très proche, et l'application qui nous a motivés est justement l'exemple des complexes. Pour faire cette transcription on note que dans [4] il s'agit d'une famille de topos annelés indexée par la catégorie de base; on peut retrouver le cadre "famille de cmf" en prenant la famille des cmf de complexes de modules sur les anneaux structurels dans les topos fibres (on n'entre pas dans les détails d'une démonstration potentielle de la présente assertion). L'objet $D^+(\Gamma(E), A)$ de [4] Vbis 2.2.7 est l'analogue de notre $Sect(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$; et la sous-catégorie pleine dont il s'agit dans [4] Vbis 2.2.7 (des sections dont les cohomologies sont cocartésiennes) correspond à notre $Sect^{eq}(\Delta, f_\Delta \mathbf{M})$.

Dans le cadre de la descente des complexes (i.e. pour l'application au §21) on peut très bien substituer l'argument de [4] à notre argument du présent chapitre. Cependant, il est à noter que notre théorème 19.4 comporte aussi un volet "strictification des données de descente" concrétisé dans l'utilisation du corollaire 18.7. Ce volet n'a pas de contrepartie dans [4] où on part d'une "donnée de descente" qui est déjà un complexe dans le topos des sections, c'est-à-dire d'une famille stricte de complexes. On ne disposait pas à l'époque du langage des ∞ -catégories qui nous permet d'introduire la notion de donnée de descente faible.

Quant à la méthode pour descendre une donnée stricte, l'argument de [4] pour le cas des complexes est un dévissage par troncation du complexe, permettant de traiter les objets de cohomologie un à la fois. En partant d'une section σ cocartésienne, on applique le foncteur "image directe" que nous appelons $\varphi_*(\sigma)$ (dans la notation de [4] la donnée de descente est F^\cdot et son image directe est $\mathbf{R}^+(\bar{\theta}_*)(F^\cdot)$). Il s'agit de montrer que $\varphi^*\varphi_*\sigma$ est équivalent à σ ; ce qui se fait sur une page pour le cas des complexes dans [4] Vbis Prop. 2.2.7.

Cette méthode serait aussi envisageable pour le cas "instable" pour peu qu'on dispose d'une théorie suffisante de la "tour de Postnikov".

La majeure partie de [4] est consacrée à la recherche de conditions garantissant que l'image inverse $\mathbf{L}^+(\bar{\theta}^*)$ (que nous appelons $L(\varphi^*)$) est pleinement fidèle. Notre lemme 19.1 est l'analogue de la remarque ([4] Vbis Prop. 2.2.7). Ensuite (pour notre corollaire 19.2, dont la démonstration se trouve après 19.1) nous avons utilisé la condition 19.2 (ii),

qui correspond à l’effectivité des données de descente. Cela rend plus facile l’argument de notre 19.2; et on peut le faire parce que de toutes façons nous avons besoin d’un argument spécifique pour obtenir l’effectivité de 19.2 (ii). L’énoncé de 19.2 est à comparer à l’énoncé de [4] Vbis Prop. 2.2.7.

Regardons enfin les diverses hypothèses dans notre théorème 19.4. L’hypothèse sur l’existence de suffisamment de sommes disjointes, est à rapprocher de [4] Vbis 3.0.0. On peut comparer la condition (3) avec [4] Vbis 3.2. Ici on peut remarquer que Saint-Donat utilise une famille quelconque de changements de base pour “tester”, tandis que notre stratégie est de tester avec le changement de base qu’on utilise pour la descente.

La technique bisimpliciale de la démonstration de 19.4 s’apparente à la technique bisimpliciale pour la pleine fidélité de SGA 4 ([4] Vbis §2.3, voir aussi 3.3.1(a)).

En somme, la stratégie globale, qui consiste à descendre σ en prenant $\varphi_*(\sigma)$, est commune, mais le problème de prouver que cela répond bien à la question est pour nous plus compliqué car nous ne disposons pas d’argument de récurrence “à la Postnikov”. Cela nécessite alors un argument spécifique (preuve de 19.4); et avec cela on peut contourner le problème de la pleine fidélité de $L(\varphi^*)$ (19.2). Naturellement, les arguments de [4] pour la pleine fidélité, se retrouvent dans notre argument spécifique pour l’effectivité de 19.4.

20. Exemple: la descente pour les n -champs

Le premier exemple d'application du théorème 19.4 est la descente pour les n -champs, analogue du fait que le préchamp des faisceaux est un champ. Ce théorème de descente est classique pour $n = 1$. Pour $n = 2$, il a été énoncé par Breen dans [18], sans démonstration. Breen l'utilise pour donner l'une des deux directions de sa description des 2-champs en termes de cocycles.

Théorème 20.1 *Le $n + 1$ -préchamp de Segal $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ est un $n + 1$ -champ de Segal (i.e. ∞ -champ) au-dessus de \mathcal{X} .*

Ce théorème signifie que les n -champs de Segal se recollent, i.e. notamment que les données de descente pour les n -champs de Segal, sont effectives. Cependant, comme nous n'avons pas une très bonne description concrète de ce que c'est exactement qu'une donnée de descente (voir la fin de §5 pour le mieux qu'on puisse dire actuellement), nous ne pouvons pas donner une description entièrement en termes de cocycles, à la Breen [18], de ce que veut dire cette effectivité des données de descente.

Preuve utilisant le théorème 19.4

Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés et a suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés. Dans ce cas, on peut déduire le présent théorème 20.1 directement du théorème 19.4. En effet, on peut vérifier que la famille des cmf

$$X \mapsto nSePCh(\mathcal{X}/X)$$

est un préfaisceau de Quillen à gauche, avec compatibilité aux produits directs. L'adjoint de la restriction pour $s : Y \rightarrow X$ et $A \in nSePCh(\mathcal{X}/Y)$ est défini par

$$s_*(A)(U \rightarrow X) := A(Y \times_X U \rightarrow Y).$$

La restriction préserve évidemment les cofibrations et les cofibrations triviales, et la compatibilité aux produits directs (i.e. la condition (3) de 19.4) résulte d'un calcul facile.

Pour la condition (2), il suffit d'observer que si $i : U \hookrightarrow X$ est une composante d'une somme disjointe, et si A est n'importe quel type de préfaisceau sur U alors on a $i^*i_*A = A$.

La condition (1) est une conséquence immédiate du caractère local de la notion de \mathcal{G} -équivalence faible entre n -préchamps de Segal.

Les catégories de modèles fibres admettent des limites et colimites arbitraires, et des factorisations fonctorielles. Pour les structures de type (II), voir le théorème 17.1; on renvoie comme d'habitude à [63] pour la technique nécessaire pour donner une démonstration

rigoureuse de la première partie de l'hypothèse de 17.1 (II). On obtient ainsi la condition (0) du théorème 19.4.

Donc par 19.4, $L(nSePCh, W)$ est un 1-champ de Segal. Or par 11.11, $L(nSePCh, W)$ est équivalent (pour la topologie grossière) à l'intérieur 1-groupique

$$nSe\text{CHAMP}^{int,1}$$

donc on obtient la partie (b) du critère de 10.2 pour $nSe\text{CHAMP}$. La partie (a) est automatique car, par définition, les objets de $nSe\text{CHAMP}(X)$ sont les n -champs de Segal \mathcal{G} -fibrants, et si A et B sont \mathcal{G} -fibrants sur \mathcal{X}/X alors $\underline{Hom}(A, B)$ l'est aussi—en particulier c'est un champ. La proposition 10.2 s'applique pour conclure que $nSe\text{CHAMP}$ est un $n + 1$ -champ de Segal. \square

Preuve directe

On donne maintenant une preuve directe du théorème 20.1, qui n'utilise pas le théorème 19.4. Cette démonstration semble donner plus d'indications que la première sur la manière dont les n -champs de Segal se recollent. De plus, elle s'applique sans autre hypothèse sur \mathcal{X} et s'adapte *mutatis mutandis* au cas des n -champs non de Segal.

Pour la suite on fixera un site \mathcal{X} qu'on ne mentionnera plus dans les notations. En cas de besoin on notera \mathcal{G} la topologie sur \mathcal{X} (par opposition à la topologie grossière).

On utilisera la construction Υ (ou ses variantes Υ^k) de [95]. Elle se généralise immédiatement aux n -précats de Segal et, par functorialité, aux préfaisceaux de n -précats de Segal, i.e. aux n -préchamps de Segal, en conservant ses propriétés universelles, dont on aura quelquefois besoin.

Notons

$$nSe\text{CHAMP} \rightarrow nSe\text{CHAMP}' \rightarrow nSe\text{CHAMP}''$$

deux cofibrations: la première est une cofibration triviale pour la topologie grossière (en particulier une équivalence objet-par-objet) vers un modèle fibrant pour la topologie grossière; la deuxième est une cofibration triviale pour la topologie \mathcal{G} vers un modèle fibrant pour la topologie \mathcal{G} . Leur composé est également une cofibration triviale pour la topologie \mathcal{G} vers un modèle fibrant pour la topologie \mathcal{G} .

Par construction les $nSe\text{CHAMP}(X)$ sont déjà des $n + 1$ -catégories de Segal. La condition que $nSe\text{CHAMP}$ soit un $n + 1$ -champ de Segal est donc équivalente à la condition que le morphisme

$$nSe\text{CHAMP}' \rightarrow nSe\text{CHAMP}''$$

soit une équivalence pour la topologie grossière, i.e. une équivalence objet-par-objet.

On va utiliser le critère 10.2. Pour A et B dans $nSe\mathcal{CHAMP}(X)$ on a par construction

$$nSe\mathcal{CHAMP}(X)_{1/}(A, B) = \underline{Hom}(A, B).$$

En particulier, comme A et B sont cofibrants et fibrants (par la définition même de $nSe\mathcal{CHAMP}$) ceci est un n -champ de Segal. La première hypothèse de 10.2 est donc vérifiée.

Il s'ensuit que, pour tout X , le morphisme

$$nSe\mathcal{CHAMP}(X) \rightarrow nSe\mathcal{CHAMP}''(X)$$

est pleinement fidèle. En effet, le morphisme

$$nSe\mathcal{CHAMP} \rightarrow nSe\mathcal{CHAMP}''$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible de $n + 1$ -préchamps de Segal dont les valeurs sont des $n + 1$ -catégories de Segal; par définition pour tout X et tous $A, B \in nSe\mathcal{CHAMP}'(X)_0$, le morphisme

$$nSe\mathcal{CHAMP}_{1/}(A, B) \rightarrow nSe\mathcal{CHAMP}''_{1/}(A, B)$$

est une équivalence faible de n -préchamps de Segal dont la source et le but sont déjà des n -champs de Segal; par 9.1 c'est une équivalence faible pour la topologie grossière. Ce résultat admet la généralisation suivante:

Lemme 20.2 *Si A est un $n+1$ -préchamp de Segal alors le morphisme de $n+1$ -préchamps de Segal sur \mathcal{X}*

$$\underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}') \rightarrow \underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}'')$$

est pleinement fidèle pour la topologie grossière.

Preuve: Soit Z le sous-préchamp plein de $nSe\mathcal{CHAMP}''$ constitué avec les objets qui sont dans l'image de $nSe\mathcal{CHAMP}'$. Alors le morphisme $nSe\mathcal{CHAMP}' \rightarrow Z$ est une équivalence faible pour la topologie grossière. Donc il en est de même du morphisme

$$\underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}') \rightarrow \underline{Hom}(A, Z).$$

Mais le morphisme

$$\underline{Hom}(A, Z) \rightarrow \underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}'')$$

est pleinement fidèle pour la topologie grossière: si a, b sont deux objets de $\underline{Hom}(A, Z)(X)$ alors un morphisme

$$U \rightarrow \underline{Hom}(A, Z)_{1/}(a, b)$$

correspond à un morphisme

$$A \times \Upsilon(U) \rightarrow Z$$

qui donne a (resp. b) sur $A \times 0$ (resp. $A \times 1$); comme tous les objets de $A \times \Upsilon(U)$ sont soit dans $A \times 0$ soit dans $A \times 1$, ceci correspond encore à un morphisme

$$A \times \Upsilon(U) \rightarrow nSe\mathcal{CHAMP}''$$

qui donne a (resp. b) sur $A \times 0$ (resp. $A \times 1$), autrement dit à un morphisme

$$U \rightarrow \underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}'')_{1/}(a, b).$$

En fait, on a l'égalité

$$\underline{Hom}(A, Z)_{1/}(a, b) = \underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}'')_{1/}(a, b).$$

Par composition, on obtient que

$$\underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}') \rightarrow \underline{Hom}(A, nSe\mathcal{CHAMP}'')$$

est pleinement fidèle pour la topologie grossière. \square

On poursuit la démonstration du théorème 20.1. Au vu du critère de la proposition 10.2, il s'agit maintenant de prouver que pour tout crible couvrant $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$, tout morphisme

$$f : *_\mathcal{B} \rightarrow nSe\mathcal{CHAMP}'|_{\mathcal{X}/X}$$

s'étend en un morphisme défini sur $*_X$. Comme la formation de $nSe\mathcal{CHAMP}$ est compatible aux changements de base, et comme le remplacement fibrant pour la topologie grossière peut aussi être choisi compatible aux restrictions (lemme 4.1), on peut se placer dorénavant sur le site \mathcal{X}/X et supprimer dans nos notations la référence à la "restriction à \mathcal{X}/X ".

Soit

$$E := \underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, nSe\mathcal{CHAMP}')_{1/}(*, f).$$

Ici \underline{Hom} est le Hom interne des $n + 1$ -préchamps de Segal sur \mathcal{X}/X . En particulier, E est un n -préchamp de Segal sur \mathcal{X}/X .

Le morphisme

$$\underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, nSe\mathcal{CHAMP}')_{1/}(*, f) \rightarrow \underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, nSe\mathcal{CHAMP}'')_{1/}(*, f)$$

est une équivalence faible de n -préchamps pour la topologie grossière sur \mathcal{X}/X d'après le lemme 20.2. Comme le but de ce morphisme est \mathcal{G} -fibrant, c'est un $n + 1$ -champ de Segal

donc sa source —qui est E —est également un $n + 1$ -champ de Segal. Ce dernier étant aussi fibrant pour la topologie grossière, on obtient que E est \mathcal{G} -fibrant par 9.2.

L'idée de la démonstration est que E résout le problème de descente qui est posé. Il faut encore un peu de technique pour obtenir un morphisme entre f et le morphisme constant $cst(E)$, et achever la preuve du théorème.

On définit d'abord un $n + 1$ -préchamp de Segal $\Upsilon(E)$ en appliquant la définition de [95] objet-par-objet, i.e.

$$\Upsilon(E)(Y) := \Upsilon(E(Y))$$

(l'extension des constructions de [95] objet-par-objet sera utilisée ci-dessous sans autre commentaire).

Par la propriété universelle qui définit Υ on obtient un morphisme

$$\Upsilon(E) \rightarrow \underline{Hom}(*_{\mathcal{B}}, nSe\underline{CHAMP}')$$

ou encore

$$h : *_{\mathcal{B}} \times \Upsilon(E) \rightarrow nSe\underline{CHAMP}'.$$

On a

$$h|_{*_{\mathcal{B}} \times 0} = *$$

et

$$h|_{*_{\mathcal{B}} \times 1} = f.$$

On utilise maintenant les propriétés d'extension de morphismes définis sur des parties de Υ^k —on renvoie à [95] pour les détails—, en notant qu'elles s'étendent au cadre des préchamps. Rappelons les notations 01, 12 et 02 pour les copies de $\Upsilon(A)$, $\Upsilon(B)$ et $\Upsilon(A \times B)$ respectivement dans $\Upsilon^2(A, B)$.

Par l'analogie de [95] 4.3.5, il existe un morphisme

$$h^2 : *_{\mathcal{B}} \times \Upsilon^2(E, *)$$

avec

$$h^2|_{01} = 1_E,$$

et

$$h^2|_{02} = h.$$

On rappelle que dans les notations de [95] 1_E est une application

$$\Upsilon(E) \rightarrow nSe\underline{CHAMP}'$$

qui induit $*$ sur le premier sommet 0; et qui induit le morphisme constant

$$cst(E) : * \rightarrow nSe\underline{CHAMP}'$$

à valeur E , sur le deuxième sommet 1.

La restriction de h à l'arête 12 fournit donc un morphisme

$$g : *_{\mathcal{B}} \times I \rightarrow nSe\mathbf{CHAMP}',$$

où nous avons noté I la 1-catégorie avec deux objets et une flèche, qui est aussi égale à $\Upsilon(*)$. Les objets de I seront appelés 0 et 1 bien que cette notation soit incompatible avec la notation pour les sommets de $\Upsilon^2(E, *)$ (l'objet 0 de I correspondant au sommet 1, et l'objet 1 de I correspondant au sommet 2).

L'image du premier objet 0 de I (donc l'image du sommet 1 de Υ^2) est l'application constante $cst(E)$ composée avec la projection $*_{\mathcal{B}} \rightarrow *$. L'image du deuxième objet 1 de I est l'application f .

Nous affirmons que g s'étend en un morphisme

$$\bar{g} : *_{\mathcal{B}} \times \bar{I} \rightarrow nSe\mathbf{CHAMP}'$$

où \bar{I} est la 1-catégorie avec deux objets 0, 1 et un isomorphisme entre eux (on a $I \subset \bar{I}$). On observe d'abord la propriété suivante:

(*) pour tout $Y \in \mathcal{B}$, le morphisme induit par g

$$E(Y) \rightarrow f_Y(*_{\mathcal{B}}(Y))$$

est une équivalence faible de $n + 1$ -précats de Segal.

En effet, on a

$$E(Y) = \Gamma \mathbf{Hom}(*_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{X}/Y}, nSe\mathbf{CHAMP}'|_{\mathcal{X}/Y})_{1/}(*, f),$$

mais aussi $*_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{X}/Y} = *_{\mathcal{X}/Y}$ et donc

$$\begin{aligned} E(Y) &= \Gamma(\mathcal{Y}/Y, nSe\mathbf{CHAMP}'|_{1/}(*, f|_{\mathcal{X}/Y})) \\ &\cong nSe\mathbf{CHAMP}(Y)_{1/}(*, f_Y(*_{\mathcal{B}}(Y))) \cong f_Y(*_{\mathcal{B}}(Y)). \end{aligned}$$

Notons C le résultat obtenu à partir de $*_{\mathcal{B}} \times I$, en ajoutant librement au-dessus de chaque objet de \mathcal{B} , une cellule correspondant à la cofibration $I \hookrightarrow \bar{I}$. On a un morphisme de C vers $*_{\mathcal{B}} \times \bar{I}$. Ce morphisme est une équivalence, car par [95] 2.5.1, le fait de faire (pour inverser la même flèche) plusieurs fois le coproduit avec la cofibration $I \rightarrow \bar{I}$ a le même effet que de le faire une seule fois. Maintenant, l'énoncé (*) ci-dessus implique que g s'étend en un morphisme $C \rightarrow nSe\mathbf{CHAMP}'$. Par les arguments habituels, cela implique que g s'étend en \bar{g} comme annoncé.

Grâce à ce résultat, on peut poser

$$V := (*_{\mathcal{B}} \times \bar{I}) \cup^{*_{\mathcal{B}} \times 0} *_{\mathcal{X}}.$$

L'application $V \rightarrow *_X$ est une équivalence faible pour la topologie grossière. L'application

$$cst(E) : *_X \rightarrow nSe\text{CHAMP}'$$

se recolle avec l'application

$$\bar{g} : *_B \times \bar{I} \rightarrow nSe\text{CHAMP}'$$

car on a, par construction,

$$\bar{g}|_{*_B \times 0} = cst(E).$$

On obtient une application

$$V \rightarrow nSe\text{CHAMP}'$$

dont la restriction sur $*_B \times 1$ est égale à f . Soit

$$V \rightarrow V' \rightarrow *_X$$

une factorisation avec comme premier morphisme une cofibration triviale et comme deuxième morphisme une fibration triviale (le tout pour la topologie grossière). L'application ci-dessus s'étend en une application

$$\alpha : V' \rightarrow nSe\text{CHAMP}'$$

dont la restriction à $*_B \times 1 \subset V \subset V'$ est encore égale à f . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} *_B & \rightarrow & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ *_X & = & *_X. \end{array}$$

La flèche du haut est l'inclusion

$$i : *_B = *_B \times 1 \subset V \subset V'.$$

On peut écrire $\alpha \circ i = f$. La flèche de droite est une fibration triviale pour la topologie grossière, en particulier elle possède la propriété de relèvement pour toute cofibration. Donc il existe un relèvement $j : *_X \rightarrow V'$ égal à i sur $*_B$. Le morphisme

$$\alpha \circ j : *_X \rightarrow nSe\text{CHAMP}'$$

est l'extension de f que nous recherchons, ce qui complète la démonstration du théorème 20.1. \square

Corollaire 20.3 *Les préfaisceaux de catégories simpliciales $X \mapsto L(nSePCh(\mathcal{X}/X))$ sont des 1-champs de Segal. En particulier le préfaisceau de catégories simpliciales*

$$X \mapsto L(PrefSpl(\mathcal{X}/X), W^{Illusie})$$

est un 1-champ de Segal.

Preuve: Par le théorème 20.1, $nSeCHAMP$ est un $n + 1$ -champ de Segal. Donc (cf §10) son intérieur 1-groupe est un 1-champ de Segal. On applique 11.11. \square

Ce corollaire montre que les données de descente homotopiques pour les préfaisceaux simpliciaux ou n -préchamps de Segal, sont effectives, à équivalence près.

Soit $nSeChamp(\mathcal{X})$ la 1-catégorie stricte des préfaisceaux de n -catégories de Segal qui sont des n -champs de Segal sur \mathcal{X} . Ici, la notion de \mathcal{G} -équivalence coïncide avec celle d'équivalence objet-par-objet. On obtient que *pour $L(nSeChamp(\mathcal{X}))$ les données de descente sont effectives*, ce qui veut dire que les n -champs de Segal se recollent, à équivalence objet-par-objet près. Cet énoncé est l'analogie du résultat classique de recollement des faisceaux.

Enoncés pour les n -champs (non de Segal)

Pour l'essentiel, tous les énoncés du présent travail, sauf ceux concernant directement les localisées de Dwyer-Kan, sont aussi valables pour les n -catégories, n -champs etc., non de Segal. Sans entrer dans les détails, nous indiquons ici les faits principaux (entre autres, pour justifier le titre choisi!).

D'abord, la catégorie nPC des n -précats remplace $nSePC$, celle des n -précats de Segal, et on dispose de l'opération Cat (analogue à $SeCat$), et la notion de n -catégorie a la même définition—tout cela se trouve dans [98] et [94]. Un n -préchamp sur \mathcal{X} est un préfaisceau sur \mathcal{X} à valeurs dans nPC ; on note $nPCh(\mathcal{X})$ la catégorie des n -préchamps.

Les catégories nPC et $nPCh(\mathcal{X})$ ont des structures de cmf analogues à celles de 2.3 et 3.1, et $nPCh(\mathcal{X})$ a également la structure de type HBKQ de 5.1.

On dit (de la même façon qu'au §9) qu'un n -préchamp A est un n -champ si le morphisme $A \rightarrow A'$ de remplacement fibrant pour la topologie \mathcal{G} , est une équivalence objet-par-objet. Les propriétés du §9 et l'autre définition du §10 s'adaptent *mutatis mutandis*.

Les cmf nPC et $nPCh(\mathcal{X})$ sont internes (§11; pour nPC c'est dans [94]), ce qui permet de définir les $n + 1$ -catégories

$$nCAT \quad \text{et} \quad nCHAMP(\mathcal{X})$$

ainsi que le $n + 1$ -champ $nCHAMP(\mathcal{X})$.

On définit une famille universelle et un morphisme Φ comme au §12. Le théorème 12.1 prend la forme suivante.

Théorème 20.4 Soit $nCAT'$ un remplacement fibrant de $nCAT$. Si la topologie de \mathcal{X} est grossière alors $nCHAMP(\mathcal{X})$ est équivalent via Φ à la $n+1$ -catégorie $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nCAT')$.

Si \mathcal{X} est muni d'une topologie quelconque \mathcal{G} alors $nCHAMP(\mathcal{X})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\underline{Hom}(\mathcal{X}^o, nCAT')$ formée des morphismes $F : \mathcal{X}^o \rightarrow nCAT'$ qui satisfont à la condition de descente ([95] 6.3) qui dit que la flèche

$$\lim_{\leftarrow} F|_{\mathcal{X}/X} \rightarrow \lim_{\leftarrow} F|_{\mathcal{B}}$$

est une équivalence pour tout crible $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}/X$ de \mathcal{G} .

□

On a un foncteur “champ associé” entre $n+1$ -catégories

$$\mathbf{ch} : nCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}}) \rightarrow nCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}})$$

avec transformation naturelle $F \rightarrow \mathbf{ch}(F)$, et (théorème 13.4) cette transformation naturelle fait de ce foncteur l'adjoint homotopique de l'inclusion

$$nCHAMP(\mathcal{X}^{\mathcal{G}}) \subset nCHAMP(\mathcal{X}^{\text{gro}}).$$

Enfin, le théorème principal du présent chapitre 20.1 devient:

Théorème 20.5 *Le $n+1$ -préchamp $nCHAMP(\mathcal{X})$ est un $n+1$ -champ au-dessus de \mathcal{X} .*

La preuve directe s'adapte *mutatis mutandis*. Si on veut obtenir une preuve par application de 19.4, il faut observer le fait suivant:

Proposition 20.6 *La $n+1$ -catégorie $nCAT$, considérée par induction comme une $n+1$ -catégorie de Segal, est équivalente à la sous- $n+1$ -catégorie de Segal pleine de $nSeCAT$ formée des objets qui sont n -tronqués.*

La $n+1$ -catégorie $nCHAMP(\mathcal{X})$, considérée de la même façon comme une $n+1$ -catégorie de Segal, est équivalente à la sous- $n+1$ -catégorie de Segal pleine de $nSeCHAMP$ formée par les n -champs de Segal qui sont n -tronqués objet-par-objet au-dessus de \mathcal{X} .

Le $n+1$ -préchamp $nCHAMP(\mathcal{X})$, considéré par induction comme un $n+1$ -préchamp de Segal, est équivalent au sous-préchamp de Segal plein de $nSeCHAMP(\mathcal{X})$ formé des objets dont les valeurs (sur tout $X \in \mathcal{X}$) sont des n -champs de Segal (sur \mathcal{X}/X) qui sont n -tronqués objet-par-objet.

□

On peut alors appliquer 10.15.

□

21. Exemple: la descente pour les complexes

Quand on parle des champs, l'exemple des complexes a toujours été présent aussi bien en géométrie algébrique qu'en topologie algébrique (voir [4], [12], [41], [83], [56], [62], [102], [14], [58], [60] par exemple). C'est d'ailleurs cet exemple des complexes qui nous a entraîné dans ce travail, et qui nous a guidé notamment dans la formulation et démonstration des résultats des §17-§18-§19.

Soit \mathcal{X} un site muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O} . On suppose que \mathcal{X} admet des produits fibrés et a suffisamment de sommes disjointes compatibles aux produits fibrés. Pour $X \in \mathcal{X}$, soit $Cpx_{\mathcal{O}}(X)$ la catégorie des complexes de faisceaux de \mathcal{O} -modules sur \mathcal{X}/X . Soit

$$qis(X) \subset Cpx_{\mathcal{O}}(X)$$

la sous-catégorie des flèches qui sont des quasi-isomorphismes.

Notons $Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X)$ la sous-catégorie des complexes concentrés en degrés ≥ 0 . D'après Quillen [83], $Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X)$ a une structure de catégorie de modèles fermée où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les cofibrations sont les injections.

Récemment Hinich [58] et Hovey [60] ont muni la catégorie $Cpx_{\mathcal{O}}(X)$ de tous les complexes (non-nécessairement bornés) d'une structure de cmf dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les cofibrations sont les injections.

En fait, Quillen aussi bien que Hinich (et Hovey dans une version précédente de [60]) travaillent dans la situation duale, i.e. où les fibrations sont les surjections; on doit donc appliquer leurs constructions à la catégorie abélienne duale de celle des \mathcal{O} -modules. Cette dualité pourrait éventuellement poser des problèmes de nature ensembliste. Hovey y fait allusion dans son livre [60], et attribue à Grodal la construction où les cofibrations sont les injections. Dans la version la plus récente de [60], Hovey donne la construction de cette cmf qu'il appelle la "structure injective de cmf pour les complexes", et il prouve qu'elle est engendrée par cofibrations ([60] Def. 2.3.13). Le lecteur pourra aussi retrouver ce résultat en appliquant le critère 2.5 à la catégorie $Cpx_{\mathcal{O}}(X)$ avec $W = qis(X)$ et cof les injections terme-à-terme de complexes. On vérifie les propriétés (4) et (5) de 2.5 en utilisant encore la technique de Jardine [63] (les autres propriétés sont faciles).

On a donc bien une cmf $Cpx_{\mathcal{O}}(X)$ engendrée par cofibrations, et on vérifie que le foncteur

$$X \mapsto Cpx_{\mathcal{O}}(X)$$

est un préfaisceau de Quillen à gauche sur \mathcal{X} . On applique 19.4 pour obtenir le corollaire suivant. Il est à noter que ce corollaire est essentiellement la "descente cohomologique" des complexes de SGA 4 [4] exposé Vbis, mais avec un volet supplémentaire "strictification des données de descente" (voir §18) qui n'apparaît pas dans SGA 4. Pour ce corollaire,

on peut remplacer la partie de la démonstration de 19.4 qui se trouve au §19, par les arguments de [4].

Corollaire 21.1 *Supposons que \mathcal{X} admet des produits fibrés et suffisamment de sommes disjointes. Alors le préfaisceau de catégories simpliciales*

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}) := (X \mapsto L(Cpx_{\mathcal{O}}(X), qis(X)))$$

est un 1-champ de Segal sur \mathcal{X} qu'on appelle le 1-champ de Segal de modules des complexes sur (X, \mathcal{O}) .

Preuve: Appliquer 19.4. La compatibilité (3) avec les produits est immédiate, de même que la compatibilité (2) avec les sommes disjointes. La condition (1) est conséquence du caractère local de la notion de quasi-isomorphisme. Pour la condition (0) on applique le théorème 17.1 (II), en disant comme d'habitude que la vérification de la première partie de l'hypothèse (celle qui correspond aux conditions (4) et (5) de 2.5) fait appel aux techniques de [63]. \square

On conjecture bien évidemment que l'hypothèse sur \mathcal{X} n'est pas nécessaire.

Soit $Cpx_{\mathcal{O}}^{\{0,\infty\}}(X)$ la sous-catégorie des complexes concentrés cohomologiquement en degrés ≥ 0 . Par 8.2 $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{\{0,\infty\}}(X)) \subset L(Cpx_{\mathcal{O}}(X))$ est une sous-catégorie simpliciale pleine. La descente préserve la condition de troncation cohomologique. Un argument à base de troncation de complexes montre que

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X)) \rightarrow L(Cpx_{\mathcal{O}}^{\{0,\infty\}}(X))$$

est une équivalence. On obtient ainsi que $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})$ est un 1-champ de Segal. Alternativement on pourrait munir $Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X)$ d'une structure de cmf engendrée par cofibrations et appliquer directement 19.4 comme dans le corollaire ci-dessus, pour obtenir que $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})$ est un 1-champ de Segal.

On peut identifier les préfaisceaux simpliciaux de morphismes dans $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})$. Soit DP la construction de Dold-Puppe ([27] cf [62]) qui transforme un préfaisceau de complexes de groupes abéliens en un préfaisceau de groupes abéliens simpliciaux; et notons $\tau^{\leq 0}C$ la troncation "intelligente" (i.e. celle qui préserve la cohomologie) en degrés ≤ 0 d'un complexe C . Pour $U, V \in Ob Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X)$, on a

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})_{1/}(U, V) \cong DP(\tau^{\leq 0}\mathbf{R}\underline{Hom}(U, V))$$

où pour $Y \in \mathcal{X}/X$,

$$\mathbf{R}\underline{Hom}(U, V)(Y) := Hom_{\mathcal{O}}(U|_{\mathcal{X}/Y}, V'|_{\mathcal{X}/Y})$$

désigne le *préfaisceau* \underline{Hom} interne avec $V \rightarrow V'$ un quasi-isomorphisme vers un complexe de faisceaux injectifs. Plus généralement si \mathcal{F} est une catégorie abélienne avec suffisamment d'injectifs, si $Cpx^{[0,\infty)}(\mathcal{F})$ est la catégorie des complexes en degrés ≥ 0 d'objets de \mathcal{F} , alors on obtient la catégorie simpliciale $L(Cpx^{[0,\infty)}(\mathcal{F}), qis)$. On a la même formule

$$L(Cpx^{[0,\infty)}(\mathcal{F}), qis)_{1/}(U, V) \cong DP(\tau^{\leq 0} \mathbf{R}\underline{Hom}(U, V)).$$

En particulier, $L(Cpx^{[0,\infty)}(\mathcal{F}), qis)$ est très proche de la *catégorie différentielle graduée* des complexes considérée par Bondal-Kapranov [14]. D'autre part la troncation

$$\tau_{\leq 2} L(Cpx^{[0,\infty)}(\mathcal{F}), qis),$$

qui peut être choisie comme une 2-catégorie stricte, est celle qui a été considérée par Gabriel-Zisman [41].

Revenons à nos complexes de faisceaux. On peut voir directement que

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})_{1/}(U, V)$$

est un champ (c'est la partie (a) du critère 10.2). En effet, soit $I := \mathbf{R}\underline{Hom}(U, V)$; c'est un complexe de faisceaux de groupes abéliens acycliques. Alors $DP(\tau^{\leq 0} I)$ admet un dévissage par produits fibrés homotopiques successifs avec des préfaisceaux simpliciaux de la forme $DP(I^k[k]) = K(I^k, k)$, où les I^k sont acycliques; ces derniers sont des champs d'après [63] [19] et au départ ($k = 0$) on a $K(\ker(I^0 \rightarrow I^1), 0)$ qui est un faisceau d'ensembles, donc un champ. En appliquant le lemme 9.5 on obtient que $DP(\tau^{\leq 0} I)$ est un champ.

Pour $0 \leq a < \infty$ on note $Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}(X)$ (resp. $Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}(X)$) la sous-catégorie des complexes à cohomologie nulle en degré $> a$ (resp. à composantes nulles en degré $> a$). En utilisant la propriété 8.2 on obtient que

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}(X), qis(X)) \rightarrow L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)}(X), qis(X))$$

est une sous-catégorie simpliciale pleine, et avec un argument de troncation de complexes (utilisant par exemple 8.2) on obtient que le morphisme

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}(X), qis(X)) \rightarrow L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}(X), qis(X))$$

est une équivalence. On obtient une équivalence objet-par-objet entre préfaisceaux de catégories simpliciales sur \mathcal{X}

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}) \cong L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]}).$$

Ce sont des sous-1-préchamps de Segal pleins de $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,\infty)})$, en particulier la condition (a) de 10.2 est automatique; mais comme l'annulation de la cohomologie en degrés $> a$

est une propriété locale, la condition (b) de 10.2 est vérifiée par $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]})$. On conclut que $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[0,a]})$ est un 1-champ de Segal.

Par translation, $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]})$ est un 1-champ de Segal. Pour $n = b - a$ les champs de morphismes ici sont des préfaisceaux simpliciaux n -tronqués. En particulier (cf les notations de §2),

$$L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]}) \cong \mathfrak{R}_{\geq 1} \Pi_n \circ L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]}),$$

donc par abus de notation on peut identifier $L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]})$ avec le $n + 1$ -champ (non de Segal)

$$\tau_{\leq n+1} L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]}) = \Pi_n \circ L(Cpx_{\mathcal{O}}^{[a,b]}).$$

Ce $n + 1$ -champ est 1-groupique (en effet il provient d'un 1-champ de Segal $n + 1$ -tronqué).

Complexes parfaits

Les références principaux sont SGA 6 ([12]), Illusie [62] et Thomason-Trobaugh [102], mais il y a de nombreux autres travaux sur ce sujet.

Soit $CpxParf^{[a,b]}(X)$ la catégorie des complexes parfaits de *tor*-amplitude contenue dans l'intervalle $[a, b]$, et soit W la sous-catégorie des quasi-isomorphismes. D'après la théorie de Dwyer-Kan [33] cf §8, on obtient des ∞ -catégories $L(CpxParf^{[a,b]}(X))$ qui sont en fait des catégories simpliciales strictes et que nous considérons comme 1-catégories de Segal, mais qui sont d'autre part $n + 1$ -tronqués pour $n = b - a$ et qu'on pourrait donc considérer comme des $n + 1$ -catégories. Quand X varie ceci fournit un $n + 1$ -préchamp $\mathcal{A}^{[a,b]}$ au-dessus de \mathcal{X} :

$$\mathcal{A}^{[a,b]}(X) := \Pi_n \circ L(CpxParf^{[a,b]}(X)).$$

Comme corollaire de 21.1 on a:

Proposition 21.2 *Le $n + 1$ -préchamp $\mathcal{A}^{[a,b]}$ est un $n + 1$ -champ ($n = b - a$).*

□

Soit $CpxFib^{[a,b]}(X)$ la catégorie des complexes de fibrés (i.e. de faisceaux de \mathcal{O} -modules localement libres de rang fini) à support dans l'intervalle $[a, b]$. On définit un nouveau $n + 1$ -préchamp $L(CpxFib^{[a,b]})$ en posant

$$L(CpxFib^{[a,b]})(X) := L(CpxFib^{[a,b]}(X)).$$

Ce $n + 1$ -préchamp vient avec un morphisme

$$L(CpxFib^{[a,b]}) \rightarrow \mathcal{A}^{[a,b]} = L(CpxParf^{[a,b]}).$$

On introduit la sous-catégorie $CpxProj^{[a,b]}(X) \subset CpxFib^{[a,b]}(X)$ des complexes de $\mathcal{O}(X)$ -modules projectifs. Notons qu'à tout complexes de $\mathcal{O}(X)$ -modules projectifs M on peut associer le complexe de faisceaux sur \mathcal{X}/X

$$\tilde{M} : Y \mapsto M_Y := M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Y).$$

Sur $CpxProj^{[a,b]}(X)$, on dispose de la structure de cmf de Quillen, dans laquelle on a

$$L(CpxProj^{[a,b]}(X))_{1/}(U, V) \cong DP(\tau^{\leq 0} \mathbf{R}\underline{Hom}(U, V)).$$

Il s'agit ici du $\mathbf{R}\underline{Hom}$ des complexes de $\mathcal{O}(X)$ -modules. En général, il diffère du $\mathbf{R}\underline{Hom}$ des faisceaux, i.e. la flèche

$$\mathbf{R}\underline{Hom}(U, V) \rightarrow \mathbf{R}\underline{Hom}(\tilde{U}, \tilde{V})(X)$$

n'est pas en général une équivalence. Ceci tient à la non-trivialité cohomologique de X (dans le site des schémas on pourrait se restreindre aux X affines et on n'aurait pas ce problème). Cependant on peut voir (admettons qu'il faudrait fournir plus de détails sur ce point, ce qui sera fait dans un travail ultérieur) que le morphisme de préchamps sur \mathcal{X}/X :

$$(Y \mapsto \mathbf{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}(Y)}(U_Y, V_Y)) \rightarrow \mathbf{R}\underline{Hom}(\tilde{U}, \tilde{V})$$

est une \mathcal{G} -équivalence faible. Or on a

$$L(CpxParf^{[a,b]})_{1/}(\tilde{U}, \tilde{V}) = DP\tau^{\leq 0} \mathbf{R}\underline{Hom}(\tilde{U}, \tilde{V})$$

et en particulier, ce dernier est un champ. Donc c'est le champ associé au préchamp

$$L(CpxProj^{[a,b]})_{1/}(U, V) = (Y \mapsto \mathbf{R}\underline{Hom}_{\mathcal{O}(Y)}(U_Y, V_Y)).$$

Par le lemme 13.5 on conclut que le morphisme

$$(\mathbf{ch}L(CpxProj^{[a,b]}))_{1/}(U, V) \rightarrow L(CpxParf^{[a,b]})_{1/}(\tilde{U}, \tilde{V})$$

est une équivalence, i.e. que

$$\mathbf{ch}L(CpxProj^{[a,b]}) \rightarrow L(CpxParf^{[a,b]})$$

est pleinement fidèle. Le morphisme

$$L(CpxProj^{[a,b]}) \rightarrow L(CpxParf^{[a,b]})$$

est clairement \mathcal{G} -essentiellement surjectif, donc on obtient que ce morphisme induit une équivalence

$$\mathbf{ch}L(CpxProj^{[a,b]}) \xrightarrow{\cong} L(CpxParf^{[a,b]}).$$

Il s'ensuit (en utilisant la suite d'inclusions $CpxProj \subset CpxFib \subset CpxParf$ et le résultat de la ligne précédente) que $\mathbf{ch}L(CpxFib^{[a,b]})$ se rétracte sur $\mathbf{ch}L(CpxProj^{[a,b]})$.

On voit d'autre part, à partir de la description de $L(CpxFib^{[a,b]})(X)$ par “hamacs” (Dwyer-Kan [32], cf §8), que toute i -flèche dans cette $n + 1$ -catégorie provient localement (par rapport à la topologie \mathcal{G}) d'une i -flèche de $L(CpxProj^{[a,b]})$. Ceci implique que la rétraction trouvée est une équivalence

$$\mathbf{ch}L(CpxProj^{[a,b]}) \cong \mathbf{ch}L(CpxFib^{[a,b]}).$$

On a finalement obtenu la proposition suivante.

Proposition 21.3 $\mathcal{A}^{[a,b]} = L(CpxParf^{[a,b]})$ est le $n + 1$ -champ associé au $n + 1$ -préchamp $L(CpxFib^{[a,b]})$.

□

On indique maintenant une démonstration alternative du résultat d'Illusie [62] sur l'existence des puissances symétriques etc. des complexes parfaits. Cette démonstration donne vie à l'intuition selon laquelle “un complexe parfait étant localement un complexe de fibrés vectoriels, il suffit de prendre la puissance symétrique de chacun de ces complexes de fibrés et de les recoller”.

Corollaire 21.4 Toute construction (telle la puissance symétrique) qui provient d'un foncteur (naturel en $X \in \mathcal{X}$)

$$CpxFib^{[a,b]}(X) \rightarrow CpxFib^{[a',b']}(X)$$

et qui est compatible aux équivalences faibles, s'étend en un morphisme de $n + 1$ -champs

$$L(CpxParf^{[a,b]}) \rightarrow L(CpxParf^{[a',b']}).$$

Ce morphisme se tronque par la suite en un morphisme entre les catégories dérivées

$$\mathcal{D}_{\text{parf}}^{[a,b]}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{parf}}^{[a',b']}(X).$$

Preuve: Appliquer la propriété universelle du champ associé à un préchamp (voir §13) pour obtenir le morphisme entre les champs associés. En notant l'égalité

$$\mathcal{D}_{\text{parf}}^{[a,b]}(X) = \tau_{\leq 1} \left(L(CpxParf^{[a,b]})(X) \right),$$

on obtient le morphisme entre les catégories dérivées.

□

On se tourne maintenant vers le cas du site $\mathcal{X} = Sch$ des schémas. On dispose alors d'une notion de *n-champ localement géométrique* de *n*-groupoïdes [93], qui est l'analogue pour les *n*-champs de la notion de *1-champ algébrique* d'Artin [6]. La notion s'étend aux *n*-champs non nécessairement de groupoïdes. Sans entrer dans les détails de cette définition, on peut dire que si *A* est un *n*-champ (localement) géométrique alors son intérieur $A^{int,0}$ est un *n*-champ de groupoïdes (localement) géométrique au sens de [93]. On énonce ici un résultat qui fera l'objet d'un autre travail.

Théorème 21.5 *Sur le site des schémas, le $n+1$ -champ $\mathcal{A}^{[a,b]}$ est localement géométrique ($n = b - a$). Il est couvert par les sous-champs ouverts $\mathcal{A}^{s_a, \dots, s_b}$ obtenus en imposant à la cohomologie en tout point la majoration $h^i \leq s_i$; ces sous-champs sont géométriques.*

En fait, le lecteur pourra peut-être trouver la démonstration de ce théorème en s'appuyant sur la "théorie homologique des perturbations" de Gugenheim *et al.* [52] [53]. Il s'agit pour l'essentiel de prouver que le morphisme du schéma évident de paramètres pour un complexe de fibrés triviaux (de rangs donnés) vers le champ $\mathcal{A}^{[a,b]}$ est lisse.

Le 1-tronqué $\tau_{\leq 1}\mathcal{A}^{[a,b]}$ (dont les valeurs sont les 1-tronquées des $n + 1$ -catégories $\mathcal{A}^{[a,b]}(X)$) est le préfaisceau de catégories qui à *X* associe la *catégorie dérivée* des complexes parfaits d'amplitude contenue dans $[a, b]$. Ni le théorème 21.2 ni le théorème 21.5 ne restent vrais pour ce tronqué: ceci montre l'intérêt de "considérer les homotopies supérieures".

On peut utiliser les $L(Cpx_{\mathcal{O}})$ et $\mathcal{A}^{[a,b]}$ pour définir les notions de complexe, complexe parfait etc. sur des *n*-champs de Segal (en particulier, sur des 1-champs e.g. des 1-champs algébriques d'Artin). Si *B* est un *n*-champ de Segal, on dira qu'un *complexe de \mathcal{O} -modules sur *B** est un morphisme (vers le remplacement fibrant)

$$B \rightarrow L(Cpx_{\mathcal{O}})'$$

Un *complexe parfait d'amplitude contenue dans $[a, b]$* est un morphisme

$$B \rightarrow (\mathcal{A}^{[a,b]})'$$

Les résultats ci-dessus montrent que si *B* est le 0-champ représenté par un objet du site (e.g. un schéma), alors ces définitions coïncident avec les définitions habituelles.

References

- [xxx] Pour les preprints alg-geom, q-alg, math.AT voir
<http://xxx.lanl.gov/form/math>
(il convient de chercher d'abord le site miroir le plus proche voir
<http://xxx.lanl.gov/servers.html>).
- [Hopf] Pour les preprints Hopf voir
<http://hopf.math.purdue.edu/pub/new-html/cgi-interface.html>
(faire recherche par auteur).
- [1] J. Adams. *Infinite Loop Spaces*, Princeton University Press *Annals of Math. Studies* **90** (1978).
- [2] C. Albert, P. Molino. *Pseudogroupes de Lie transitifs, II: théorèmes d'intégrabilité*, Hermann, Paris (1987).
- [3] M. Artin, J. Verdier, A. Grothendieck. *SGA 4: Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas* Springer Lecture Notes in Mathematics **269**, Heidelberg (1972-1973).
- [4] M. Artin, J. Verdier, A. Grothendieck. *SGA 4: Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas* Springer Lecture Notes in Mathematics **270**, Heidelberg (1972-1973).
- [5] M. Artin, J. Verdier, A. Grothendieck. *SGA 4: Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas* Springer Lecture Notes in Mathematics **305**, Heidelberg (1972-1973).
- [6] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks, *Inventiones Math.* **27** (1974), 165-189.
- [7] J. Baez, J. Dolan. n -Categories, sketch of a definition. Lettre à R. Street, 29 nov. et 3 déc. 1995, disponible à <http://math.ucr.edu/home/baez/ncat.def.html>
- [8] J. Baez, J. Dolan. Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. *Jour. Math. Phys* **36** (1995), 6073-6105.
- [9] J. Baez, J. Dolan. Higher dimensional algebra III: n -categories and the algebra of opetopes. Preprint q-alg 9702014, à paraître dans *Adv. Math.*.
- [10] M. Batanin. On the definition of weak ω -category. Macquarie mathematics report number 96/207, Macquarie University, NSW Australia.

- [11] J. Bénabou. *Introduction to Bicategories*, Lect. Notes in Math. **47**, Springer-Verlag (1967).
- [12] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie. *S.G.A. 6: Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch* Springer Lecture Notes in Mathematics **225**, Heidelberg (1971).
- [13] J. Boardman, R. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces* Springer Lecture Notes in Mathematics **347**, Berlin (1973).
- [14] A. J. Bondal, M.M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR Sb.*, **70** (1991) 93-107.
- [15] A. Bousfield, D. Kan. *Homotopy limits, completions and localisations*. Lecture Notes in Math. **304**, Springer-Verlag (1972).
- [16] A. Bousfield, E. Friedlander. Homotopy theory of Γ -spaces, spectra and bisimplicial sets. *Lecture Notes in Math.* **658**, Springer (1978), 80-150.
- [17] L. Breen. Extensions du groupe additif. *Publ. Math. I.H.E.S.* **48** (1978), 39-126.
- [18] L. Breen. On the classification of 2-gerbs and 2-stacks. *Astérisque* **225**, Soc. Math. de France (1994).
- [19] K. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Trans. A.M.S.* **186** (1973), 419-458.
- [20] K. Brown, S. Gersten. *Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology* Springer Lecture Notes in Math. **341** (1973), 266-292.
- [21] R. Brown. The twisted Eilenberg-Zilber theorem, *Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Simposiod e topologia* (1967), 34-37.
- [22] C.-L. Chai, G. Faltings. *Degenerations of Abelian Varieties*, Springer-Verlag (1990).
- [23] P. Cobb. P_n -spaces and n -fold loop spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 910-914.
- [24] J.-M. Cordier, T. Porter. Homotopy-coherent category theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1-54.
- [25] P. Deligne, D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of a given genus, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36**, (1969), 75-110.

- [26] P. Deligne. Théorie de Hodge III. *Publ. Math. I.H.E.S.* **44** (1974), 5-78.
- [27] A. Dold, D. Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier* **11** (1961), 201-312.
- [28] G. Dunn. Uniqueness of n -fold delooping machines. *J. Pure and Appl. Alg.* **113** (1996), 159-193.
- [29] G. Dunn. Lax operad actions and coherence for monoidal n -categories, A_∞ rings and modules. *Theory and applications of categories* **3** (1997), 50-84.
- [30] W. Dwyer, P. Hirschhorn, D. Kan. Model categories and more general abstract homotopy theory: a work in what we like to think of as progress. Preprint, disponible à <http://www-math.mit.edu/~psh/>.
- [31] W. Dwyer, D. Kan. Simplicial localizations of categories. *J. Pure and Appl. Algebra* **17** (1980), 267-284.
- [32] W. Dwyer, D. Kan. Calculating simplicial localizations. *J. Pure and Appl. Algebra* **18** (1980), 17-35.
- [33] W. Dwyer, D. Kan. Function complexes in homotopical algebra. *Topology* **19** (1980), 427-440.
- [34] W. Dwyer, D. Kan. Equivalences between homotopy theories of diagrams. *Algebraic Topology and Algebraic K-theory, Annals of Math. Studies* **113**, Princeton University Press (1987), 180-205.
- [35] W. Dwyer, D. Kan, C. Stover. An E^2 model category structure for pointed simplicial spaces. *J. Pure and Appl. Alg.* **90** (1993), 137-152.
- [36] C. Ehresmann. Structures feuilletées. *Proc. of the 5th Canadian Math. Cong.*
- [37] C. Ehresmann. Structures locales et structures infinitésimales. *C.R.A.S.* **234** (1952), 587-589.
- [38] C. Ehresmann. Catégories topologiques et catégories différentiables. *Coll. Géom. Diff. Globale Bruxelles* (1958), 137-150.
- [39] C. Ehresmann. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. *Coll. Int. CNRS Strasbourg* (1959).
- [40] Z. Fiedorowicz. Classifying spaces of topological monoids and categories. *Amer. J. Math.* **106** (1984), 301-350.

- [41] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **35**, Springer-Verlag, New York (1967).
- [42] J. Giraud. *Cohomologie nonabélienne*, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften **179** Springer-Verlag (1971).
- [43] J. Giraud. *Méthode de la descente*. Memoire **2** de la S.M.F. (1964).
- [44] C. Godbillon. *Feuilletages: études géométriques* Birkhäuser Progress in Math. **98**, Boston (1991).
- [45] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris (1958).
- [46] P. Goerss, J. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, livre disponible en forme de preprint à <http://www.math.uwo.ca/~jardine/papers/simp-sets>.
- [47] P. Goerss, J. Jardine. Localization theories for simplicial presheaves. Preprint disponible aux archives Hopf.
- [48] R. Gordon, A.J. Power, R. Street. Coherence for tricategories *Memoirs A.M.S.* **117** (1995), 558 ff.
- [49] A. Grothendieck. *Pursuing Stacks*, non-publié, disponible auprès de l'Université de Montpellier 2 (J. Malgoire), ou l'Université de Wales (R. Brown).
- [50] A. Grothendieck. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam (1968).
- [51] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental* Springer Lecture Notes in Mathematics **224** Heidelberg (1971).
- [52] V.K.A.M. Gugenheim. On a chain complex of a fibration. *Illinois J. Math.* **3** (1972), 398-414.
- [53] V.K.A.M. Gugenheim, L. Lambe. Applications of perturbation theory to differential homological algebra I,II. *Illinois J. Math.* **33** (1989), 556-582; **35** (1991), 357-373.
- [54] A. Haefliger. Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoides. *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 215-223.
- [55] A. Haefliger. Groupoïdes de holonomie et classifiants. *Astérisque* **116** (1984), 70-97.

- [56] R. Hartshorne. *Residues and Duality* Springer *L.N.M.* **20** (1966).
- [57] V. Hinich. Descent of Deligne groupoids. Preprint alg-geom 9606010.
- [58] V. Hinich. Homological algebra of homotopy algebras. Preprint q-alg 9702015.
- [59] P. Hirschhorn. *Localization of model categories* livre en préparation; disponible à <http://www-math.mit.edu/~psh/>.
- [60] M. Hovey. *Model categories*. Livre–preprint, 1997, disponible sur Hopf.
- [61] M.Hovey. Monoidal model categories. Preprint, 1998, disponible sur les archives Hopf, aussi math.AT 9803002.
- [62] L. Illusie. *Le complexe cotangent I et II, Lecture Notes in Math.* **239**, **283**, Springer-Verlag, Berlin (1971,1972).
- [63] J.F. Jardine. Simplicial presheaves, *J. Pure and Appl. Algebra* *bf* 47 (1987), 35-87.
- [64] J. Jardine. Boolean localization, in practice. *Doc. Math.* **1** (1996), 245-275. Ce journal se trouve à <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/>.
- [65] A. Joyal, Lettre à A. Grothendieck (cf [63]).
- [66] G. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory* London Math. Soc. Lecture Notes **64**, Cambridge U. Press, Cambridge (1982).
- [67] M. M. Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. Proc. ICM 94. Birkhäuser-Verlag 1995, 120-139.
- [68] G. Laumon, L. Moret-Bailly. Champs algébriques. Preprint, Orsay **42** (1992).
- [69] O. Leroy. Sur une notion de 3-catégorie adaptée à l’homotopie. Preprint Univ. de Montpellier 2 (1994).
- [70] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer, Berlin (1988).
- [71] S. Mac Lane. Natural associativity and commutativity. *Rice U. Studies* **49** (1963), 28-46.
- [72] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg (1992).
- [73] S. Mochizuki. The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University* **31** (1995), 355-441.

- [74] I. Moerdijk. On the weak homotopy type of etale groupoides. *Progress in Math.* **145** (*Integrable systems and foliations*, C. Albert *et al* eds.) Birkhäuser, Boston (1997), 147-156.
- [75] P. Molino. *Riemannian foliations*. Birkhäuser, Boston (1988).
- [76] S. Morita. On characteristic classes of Riemannian foliations. *Osaka Math. Jour.* **16** (1979), 161-172.
- [77] N. R. O'Brian, D. Toledo, Y. L. Tong. Hirzebruch-Riemann-Roch for coherent sheaves, *Amer. Jour. Math.* **103** (1981), 253-271.
- [78] N. R. O'Brian, D. Toledo, Y. L. Tong. Grothendieck-Riemann-Roch for analytic maps. *Math Annalen* **271** (1985), 493-526.
- [79] J. Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales. *C.R.A.S.* **263** (1966), 907-910.
- [80] J. Pradines. Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des variétés différentiables. *C.R.A.S.* **264** (1967), 245-248.
- [81] J. Pradines. Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde. *C.R.A.S.* **266** (1968), 1194-1196.
- [82] J. Pradines. Troisième théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables. *C.R.A.S.* **267** (1968), 21-23.
- [83] D. Quillen. *Homotopical algebra*. Springer, *L.N.M.* **43** (1967).
- [84] D. Quillen. Rational homotopy theory. *Ann. of Math.* **90** (1969), 205-295.
- [85] D. Quillen. Higher algebraic K-theory I, *Higher K-theories* Springer *L.N.M.* **341** (1973), 85-147.
- [86] C. L. Reedy. Homotopy theory of model categories. Preprint non-publié (1974), récemment réédité par P. Hirschhorn et disponible à <http://www-math.mit.edu/psh/>
- [87] C. Rezk. Courrier électronique à P. Hirschhorn, le 4 juillet 1998.
- [88] G. Segal. Homotopy everything H -spaces. Preprint.
- [89] G. Segal. Configuration spaces and iterated loop spaces. *Inv. Math.* **21** (1973), 213-221.

- [90] G. Segal. Categories and cohomology theories. *Topology* **13** (1974), 293-312.
- [91] C. Simpson. Flexible sheaves. Preprint, q-alg 9608025.
- [92] C. Simpson. Homotopy over the complex numbers and generalized de Rham cohomology. *Moduli of Vector Bundles*, M. Maruyama (Ed.) *Lecture Notes in Pure and Applied Math.* **179**, Marcel Dekker (1996), 229-263.
- [93] C. Simpson. Algebraic (geometric) n -stacks. Preprint alg-geom 96-09014.
- [94] C. Simpson. A closed model structure for n -categories, internal Hom , n -stacks and generalized Seifert-Van Kampen. Preprint alg-geom 9704006.
- [95] C. Simpson. Limits in n -categories. Preprint alg-geom 9708010.
- [96] C. Simpson. Effective generalized Seifert-Van Kampen. Preprint q-alg 9710011.
- [97] J. Stasheff. Homotopy associativity of H -spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), 275-312.
- [98] Z. Tamsamani. Sur des notions de n -categoric et n -groupoide non-strictes via des ensembles multi-simpliciaux. Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse (1996) available on alg-geom (95-12 and 96-07).
- [99] R. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.* **85** (1979), 91-110.
- [100] R. Thomason. Algebraic K-theory and étale cohomology, *Ann. Sci. E.N.S.* **18** (1985), 437-552.
- [101] R. Thomason. **Cat** as a closed model category. *Cahiers Top. Géom. Diff.* **21** (1980), 305-324.
- [102] R. Thomason, T. Trobaugh. Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories. *The Grothendieck Festschrift, Vol. III* Birkhäuser, Boston (1990), 247-436.
- [103] B. Toën. Un théorème de descente. Note, Université de Toulouse 3 (1996).
- [104] D. Toledo, Y. L. Tong., A parametrix for d -bar and Riemann-Roch in Čech theory, *Topology*, **15** (1976), 273-301.
- [105] D. Toledo, Y. L. Tong. Duality and intersection theory in complex manifolds, II: The holomorphic Lefschetz formula, *Annals of Math.* **108** (1978).

- [106] D. Toledo, Y. L. Tong. Green's theory of Chern classes and the Riemann-Roch formula, *Contemporary Mathematics* Vol. 58, Part I, 261-275.
- [107] C. Wiebel. The mathematical enterprises of Robert Thomason. *Bulletin A. M. S.* **34** (1997) 1-13.