SUR LA RÉALISATION DES MODULES INSTABLES

DONGHUA JIANG

RÉSUMÉ. Dans cet article, on donne des restrictions sur la structure d'un module instable, qui doivent être vérifiées pour que celui-ci soit la cohomologie réduite d'un espace. On commence par une étude sur la structure des sous-modules de $\Sigma^s \tilde{H}^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$, i.e., les modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur 1. Ensuite, on généralise le résultat aux modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur finie, et qui vérifie une condition supplémentaire. Le résultat dit que sous certaines hypothèses, la cohomologie réduite d'un espace ne contient pas de lacunes de longueur arbitrairement grande. Ce résultat est obtenu par application du célèbre théorème d'Adams sur l'invariant de Hopf et de la classification des modules instables injectifs.

Ce travail est effectué sous la direction de L. Schwartz.

1. INTRODUCTION

En topologie algébrique, pour distinguer les espaces, on introduit des invariants, tels que l'homologie, la cohomologie et l'homotopie des espaces. Nous nous intéressons dans cet article à la cohomologie réduite des espaces en tant que module instable sur l'algèbre de Steenrod.

Un problème central sur les modules instables est de savoir quand un tel module est la cohomologie réduite d'un espace. Un résultat célèbre de J. F. Adams impose des restrictions fortes à un module instable pour qu'il soit la cohomologie réduite d'un espace. Voici le résultat d'Adams dont il est question :

Théorème 1. (Adams, [1]) Soit X un espace ou un spectre, $k \geq 4$, soit $x \in H^n(X; \mathbb{Z}/2)$ tel que $Sq^{2^i}x = 0$, $\forall\ i < k$, alors $Sq^{2^k}x \in \sum_{i<k} \operatorname{Im}(Sq^{2^i})$.

Définition 1. Un module sur l'algèbre de Steenrod M est un **module instable** si pour tout élément $x \in M$, $Sq^i x = 0$, $\forall\ i > |x|$. Ici, $|x|$ désigne le degré de x.

Définition 2. Par **lacune** de longueur d dans un module instable M, on entend une suite d'entiers $I = \{i, \cdots, i+d-1\}$ telle que $M^j = \{0\}$, si $j \in I$, $M^{i-1} \neq \{0\}$, $M^{i+d} \neq \{0\}$. On note cette lacune par $(i-1, i+d)$ ou $(i-1, i+d-1]$.

Issue du théorème d'Adams, une question intéressante est de savoir si dans la cohomologie mod 2 d'un espace, il peut exister ou non des lacunes de longueur arbitrairement grande.

Dans cet article, on démontre que c'est impossible sous certaines hypothèses supplémentaires sur la structure de module instable.

Nous devons rappeler, pour énoncer ces conditions, diverses définitions. Rappelons qu'un module M est connexe si $M^0 = \{0\}$.

Définition 3. La **suspension** d'un module instable M est le module ΣM tel que $(\Sigma M)^0 = \{0\}$ et $(\Sigma M)^n = M^{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$.

Définition 4. Un module instable M est **réduit** si le morphisme $Sq_0 : M \to M$ défini par $Sq_0(x) = Sq^{|x|}(x) = x^2$, $\forall\ x \in M$, est injectif.

On va se restreindre dans la suite à étudier des modules instables dont l'enveloppe injective est somme directe finie d'objets injectifs indécomposables. D'après la classification des $\mathcal{U}-$injectifs (Lannes-Schwartz, [5]), on sait que pour un tel module instable réduit M, il existe d, α_d tels que M se plonge dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$. Si M est connexe, on peut supposer $\alpha_d = 1$. Donc pour établir une propriété pour les modules instables réduits, il suffit de le faire pour les sous-modules instables de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$. Dans la suite on supposera $\alpha_d = 1$, les démonstrations s'étendont sans problème.

Définition 5. (Schwartz, [8]) Un module instable M est $s-$**nilpotent** s'il est l'union de ses sous-modules ayant une filtration finie dont les quotients sont des $s-$ème suspensions.

Soit $\mathcal{U}$ la catégorie des modules instables. On désigne $\mathcal{N}il_s$ la sous-catégorie abélienne pleine de $\mathcal{U}$ des modules $s-$nilpotents. La sous-catégorie $\mathcal{N}il_s$ est épaisse (voir [2], [9]). On a une filtration de $\mathcal{U}$:

$$\cdots \subset \mathcal{N}il_2 \subset \mathcal{N}il_1 = \mathcal{N} \subset \mathcal{N}il_0 = \mathcal{U}.$$

Soit $nil_s : \mathcal{U} \to \mathcal{N}il_s$ l'adjoint à droite de l'inclusion $\mathcal{N}il_s \hookrightarrow \mathcal{U}$, $nil_s M$ est le plus grand sous-module d'un module instable M dans $\mathcal{N}il_s$ et on a la filtration nilpotente de M :

$$\cdots \subset nil_2 M \subset nil_1 M \subset nil_0 M = M.$$

Proposition 1. ([4], [7]) Soit M un module instable. Alors

$$nil_s M / nil_{s+1} M = \Sigma^s R_s$$

est la $s-$ème suspension d'un module instable réduit.

Définition 6. La filtration nilpotente d'un module instable M est **de longueur finie** s'il existe un $n \geq 0$ tel que $nil_n M = 0$.

Définition 7. Soit M un module instable connexe réduit non trivial. On désigne par $n_1 < n_2 < \cdots$ les degrés n tels que $M^n \neq \{0\}$. Supposons que M se plonge dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$. M sera dit **de type** $\mathcal{T}$, si en degré supérieur ou égal à n_1, il contient une lacune de longueur

$$l \geq \max\{2^{d+4}, n_{j+1} - n_j, j = 1, \cdots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Remarque. Le module M est nécessairement infini car M est réduit connexe non trivial.

Théorème 2. Soit un module instable connexe M qui est une suspension itérée d'un sous-module instable connexe de type $\mathcal{T}$ de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$. Alors M n'est pas réalisable, i.e., il n'existe aucun espace X tel que $M = \tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/2)$.

En fait le théorème d'Adams s'applique aussi aux spectres. Il en est donc de même du théorème précédent, la suspension itérée peut être positive ou négative et le module n'est ni la cohomologie réduite d'un espace ni la cohomologie réduite d'un spectre.

Une généralisation de ce théorème est faite sous certaines hypothèses pour les modules instables connexes ayant une filtration nilpotente de longueur finie.

Définition 8. Un module instable connexe M dont la filtration nilpotente est de longueur finie est **de type** $\mathcal{T}$, si

1) M est non nul dans des degrés arbitrairement grands ;

2) Les quotients $nil_s M / nil_{s+1} M$ non triviaux s'écrivent sous la forme $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$, R_{m_i} réduits, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$, alors l'un des R_{m_i} (que l'on note R_m) est non-trivial dans les degrés $n_1 < n_2 < \cdots$, et on suppose qu'il existe d tel que tous les R_{m_i} se plongent dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$;

3) On suppose alors qu'en degré supérieur ou égal à $m + n_1$, M contient une lacune de longueur

$$l \geq \max\{m_t 2^{d+4}, n_{j+1} - n_j, j = 1, \cdots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Condition 1. Soit M un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. On désigne par $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$ les quotients $nil_s M / nil_{s+1} M$ non triviaux, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$.

On dira que M vérifie la condition 1 si

$$\begin{aligned} m_{i+1} - m_i &\neq 1, 2, 4, 8, \quad 1 \leq i \leq t-1, \\ m_{i+2} - m_i &\neq 8, \qquad\quad 1 \leq i \leq t-2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, $m_j - m_i = 2^\beta$ n'a pas de solution pour $1 \leq i, j \leq t$ et $0 \leq \beta \leq 3$.

Théorème 3. Tout module instable connexe M dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type $\mathcal{T}$ et vérifie la condition 1, n'est pas réalisable, i.e., il n'existe aucun espace ou spectre X tel que $M = \tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/2)$.

Corollaire 1. La longueur des lacunes ne peut pas être arbitrairement grande dans un module instable connexe réalisable dont la filtration nilpotente est de longueur finie et vérifie la condition 1.

Dans cet article, on suppose que tous les modules sont de dimension finie en chaque degré, que leur enveloppe injective est somme directe finie de modules injectifs réduits. Les résultats obtenus sont conséquences du théorème d'Adams et de la classification de Lannes-Schwartz.

Voici quelques détails sur le plan de cet article. Dans la section 2, on définit des opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$. La section 3 contient un résultat combinatoire. En utilisant ce résultat, le théorème 2 est démontré dans la section 4. Ensuite, le théorème 3 est démontré dans la section 5. La dernière section contient des généralisations pour le cas p premier impair. Il y a un appendice à la fin sur les opérations de Steenrod.

2. Les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$

Dans cette section, on définit les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$ et on donne brièvement leur propriétés utilisées dans les sections suivantes. Pour plus de détails sur ces opérations, on renvoie les lecteurs à l'appendice.

Définition 9. Les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$ sont définies récursivement comme suit :

1. $Q_0^s = Sq^{2^s}$;
2. $Q_{t+1}^s = Q_t^s Sq^{2^{t+s+1}} - Sq^{2^{t+s+1}} Q_t^s$.

Notation 1. On note souvent Q_t^0 par Q_t, qui est la notation usuelle de l'opération de Milnor concernée.

Pour établir les propriétés de ces opérations Q_t^s, on a besoin d'introduire quelques notations.

Notation 2. Le symbole $(n_1, \cdots, n_d)$ désignera le monôme $u^{n_1} \otimes \cdots \otimes u^{n_d}$ ou $x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}$ dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$ qui s'identifie à $\mathbb{F}_2[u]^{\otimes d}$ ou $\mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_d]$, u et les x_i étant de degré 1. Un tel monôme sera dit **basique**.

Notation 3. Comme d'habitude, Sq_0 désigne l'opération définie dans un module instable par $Sq_0 x = Sq^{|x|} x$. On a donc $Sq_0^s(n_1, \cdots, n_d) =$

$(2^s n_1, \cdots, 2^s n_d)$, et $\mathrm{Im}(Sq_0^s)$ est l'ensemble des éléments $x = \sum_{i \in I}(2^s n(i)_1, \cdots, 2^s n(i)_d)$ de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$. Ici, I est un ensemble de $d-$uplets i, qu'on écrit $(n(i)_1, \cdots, n(i)_d)$, $n(i)_\alpha$ peut être nul.

Lemme 1. Soit M un module instable, on a pour tout $n \geq 1$,

$$Sq^{2n} Sq_0 x = Sq_0 Sq^n x, \qquad \forall\ x \in M.$$

De la définition de Q_t^s et de Sq_0, on déduit que :

Lemme 2. Soit M un module instable, on a $\forall\ x \in M$,

$$Q_t^{s+r} Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^r x, \qquad \forall\ r, s, t.$$

En particulier,

$$Q_t^s Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^0 x, \qquad \forall\ s, t.$$

Corollaire 2. 1. Soit M un module instable, on a $\forall\ x \in M$,
$Q_r^s Q_t^s Sq_0^s x = Q_t^s Q_r^s Sq_0^s x$, $\forall\ t, r \geq 0$; $(Q_t^s)^2 Sq_0^s x = 0$.
2. Pour M, N deux modules instables,
$Q_t^s(x \otimes y) = Q_t^s x \otimes y + x \otimes Q_t^s y$, $\forall\ x \in Sq_0^s(M)$, $y \in Sq_0^s(N)$.
3. Si u est le générateur de $H^1(B(\mathbb{Z}/2); \mathbb{Z}/2)$,
$Q_t^s Sq_0^s u^{2l} = 0$ et $Q_t^s Sq_0^s u^{2l+1} = Sq_0^s u^{2l+2^{t+1}} = u^{2^s(2l+2^{t+1})}$.

3. Un résultat combinatoire

Dans cette section, on établit d'abord un résultat combinatoire. Ensuite, on l'applique à un élément quelconque de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$ pour obtenir des contraintes imposées par certaines conditions d'annulation induites par l'existence de lacunes.

Soit un élément $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$, $x = \sum_{i \in I}(n(i)_1, \cdots, n(i)_d)$ somme des monômes basiques deux à deux distincts $(n(i)_1, \cdots, n(i)_d)$, $i \in I$.

Pour commencer, on définit quelques notations combinatoires.

Définition 10. Soit $l \geq 0$. On dira qu'il y a un $l-$**échange** entre deux monômes basiques s'il existe i, j tels que ces deux monômes constituent une paire de la forme

$$(u_1, \cdots, u_{i-1}, 2u_i + 1, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, 2u_j + 2^{l+1}, u_{j+1}, \cdots, u_d)$$

et

$$(u_1, \cdots, u_{i-1}, 2u_i + 2^{l+1}, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, 2u_j + 1, u_{j+1}, \cdots, u_d).$$

Remarque. C'est l'annulation sous l'action de l'opération Q_l sur un élément x qui suggère cette définition, puisque l'opération Q_l est une dérivation.

Définition 11. On dira qu'il y a une $(l,s)-$**chaîne**, $l \leq s$, entre deux monômes basiques α et β d'un élément $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d};\mathbb{Z}/2)$ s'il existe des monômes basiques

$$\alpha_0 = \alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_t = \beta$$

de cet élément tels qu'il y ait un $m-$échange, $l \leq m \leq s$, entre α_i et α_{i+1}, $\forall\ i = 0, 1, \cdots, t-1$.

Définition 12. Un sous-ensemble de l'ensemble des monômes basiques d'un élément $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d};\mathbb{Z}/2)$ est une $(l,s)-$**classe**, $l \leq s$, si pour tout monôme basique α dans ce sous-ensemble, et pour tout m, $l \leq m \leq s$, il existe un monôme β dans ce sous-ensemble et un $m-$échange entre α et β.

Remarque. C'est l'annulation sous l'action des opérations Q_m, $l \leq m \leq s$, sur un élément x qui suggère cette définition, puisque les opérations Q_m sont des dérivations.

Voici une propriété fondamentale des $(l,s)-$classes :

Proposition 2. Pour toute $(l,s)-$classe d'un élément $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d};\ \mathbb{Z}/2)$, on a $s - l \leq d - 2$.

Démonstration. On dira qu'un élément $x \in H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d};\mathbb{Z}/2)$ est de support $T \subset \{1, \cdots, d\}$, si pour tout monôme basique $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ de x, et $\forall\ i \in T$, l'exposant α_i ne dépend que de x et non du mônome basique choisi. On note $\tau = \#T$ qu'on apellera la taille de x, les monômes basiques de x ont τ exposants en commun au moins.

Considérons donc une $(l,s)-$classe de x et soit x_s la somme des monômes de cette classe, T_s son support et τ_s sa taille. On va construire récursivement des sous$-(l, s-t)-$classes de support T_{s-t} et de taille τ_{s-t} telle que $\tau_{s-t} \geq \tau_{s-t+1} + 1$.

Supposons avoir construit une sous$-(l, s-t+1)-$classe de support T_{s-t+1} et de taille τ_{s-t+1}. On choisit une paire de monômes basiques α et β de cette sous-classe telle qu'il y ait un $(s-t+1)-$échange entre α et β. On suppose de plus que l'exposant impair qui apparait dans cet échange dans le monôme basique α est maximum pour ce type d'échange. On note cet exposant de α par $\alpha_p = 2a+1$, où p désigne la position de α où cet exposant apparait. Donc $\beta_p = 2a + 2^{s-t+2}$.

Le choix de α fait que toute $(l, s-t)-$chaîne contenant β ne change pas la valeur (paire) correspondante. Raisonnons par l'absurde. Car sinon, choisissons la $(l, s-t)-$chaîne la plus courte contenant β, disons de β à γ, telle que γ ait une valeur impaire sur cet exposant, une telle chaîne existe par hypothèse. Il y a un $m-$échange, $l \leq m \leq s-t$, qui change la valeur de l'exposant, entre γ et un monôme basique dans la chaîne. La valeur de l'exposant considéré est la même que la valeur de celui de β par hypothèse. Ceci implique que l'exposant de γ, en cette place, est $\gamma_p = 2a + 2^{s-t+2} - 2^{m+1} + 1$ et est strictement plus grand que celui de α, α_p, en la même place. Il y a donc une contradiction.

En choisissant tous les monômes basiques de la sous$-(l, s-t+1)-$classe tels qu'il existe une $(l, s-t)-$chaîne entre ces monômes et β, on obtient un ensemble de monômes basiques.

Cet ensemble est une sous$-(l, s-t)-$classe car pour tout monôme η de cet ensemble, et pour tout m, $l \leq m \leq s-t$, il y a d'une part un $m-$échange entre η et un monôme μ dans la sous$-(l, s-t+1)-$classe, d'autre part une $(l, s-t)-$chaîne entre η et β, donc il y a une $(l, s-t)-$chaîne entre μ et β. On déduit que μ est un monôme de l'ensemble et que le $m-$échange entre η et μ est un échange dans l'ensemble, d'où l'ensemble considéré est une sous$-(l, s-t)-$classe.

Si on note par T_{s-t} le plus grand sous-ensemble de $\{1, \cdots, d\}$ tel que cette sous$-(l, s-t)-$classe est de support T_{s-t}, alors il est clair que T_{s-t} contient $T_{s-t+1} \cup \{p\}$. Donc on a construit une sous$-(l, s-t)-$classe de support T_{s-t} et de taille $\tau_{s-t} \geq \tau_{s-t+1} + 1$.

Si on prend $t = s - l$, alors on a une sous$-(l, l)-$classe de support T_l et de taille τ_l telle que $\tau_l \geq \tau_{l+1} + 1 \geq \cdots \geq \tau_s + s - l \geq s - l$. Comme il existe des $l-$échanges dans cette classe, il y a au plus $d-2$ exposants invariants. D'où, $d - 2 \geq \tau_l \geq s - l$. □

Corollaire 3. Soit x un élément d'un sous-module instable de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$ tel que $x \in \mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$ et que $Q_t^s x = 0$, $\forall\, p \leq t \leq q$. Alors on a $q - p \leq d - 2$.

Démonstration. Puisque $x = Sq_0^s x' \in \mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$, il existe au moins un monôme basique α de x' avec au moins un exposant impair. L'ensemble des monômes basiques de x' qui sont dans une $(p, q)-$chaîne contenant α est une $(p, q)-$classe. Puisque d'après la définition, chaque monôme β de cet ensemble contient au moins un exposant impair, et comme l'action de l'opération Q_t^s sur β donne un monôme qui contient un exposant pair en la même place, l'annulation de Q_t^s sur x entraîne l'existence d'un $m-$échange, $p \leq m \leq q$, entre β et un monôme de l'ensemble. Par conséquent, on a $q - p \leq d - 2$. □

Corollaire 4. Soit x un élément d'un sous-module instable de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$. Si $\mathcal{A}_2 x$ contient une lacune $(|x|, |x| + l]$, $l \geq 2^k$ pour un certain $k \geq d - 2$, alors $x \in \mathrm{Im}(Sq_0^{k-d+2})$.

Démonstration. Soit α tel que $x = Sq_0^\alpha x' \in \mathrm{Im}(Sq_0^\alpha) - \mathrm{Im}(Sq_0^{\alpha+1})$. Si $\alpha > k$, on a $\alpha \geq k - d + 2$. Si $\alpha \leq k$, alors l'existence de la lacune dans

$\mathcal{A}_2 x$ implique que $\forall\ t = 0, \cdots, k-\alpha$,

$$Sq_0^{\alpha} Sq^{2^t} x' = Sq^{2^{t+\alpha}} Sq_0^{\alpha} x' = Sq^{2^{t+\alpha}} x = 0.$$

Donc $Sq^{2^t} x' = 0$, $\forall\ t = 0, \cdots, k-\alpha$. Donc $Q_t x' = 0$, $\forall\ t = 0, \cdots, k-\alpha$. D'après le corollaire 3, on a $k - \alpha \leq d - 2$, d'où $\alpha \geq k - d + 2$. $\square$

Remarque. 1. Les énoncés de cette section sont aussi vrais pour un élément quelconque de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$. Ci-dessus, on a traité le cas où $\alpha_d = 1$. Pour tenir compte du fait que l'on peut se placer dans $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$, il faudrait compliquer un peu les notations en rajoutant un indice $1 \leq a \leq \alpha_d$. On dit que les $(n(i)_{1,a}, \cdots, n(i)_{d,a})$ sont les monômes basiques de x.

2. Comme la suspension commute avec les opérations de Steenrod : $\sigma^q Sq^i = Sq^i \sigma^q$. Ces corollaires sont aussi vrais pour une suspension quelconque d'un sous-module instable quelconque de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$.

4. La démonstration du théorème 2

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 2. Soit donc M un module instable qui est la cohomologie réduite d'un espace. Supposons de plus que M est réduit. Alors :

Théorème 4. (Lannes-Schwartz, [5]) Un module instable réduit (resp. connexe) M dont l'enveloppe injective est somme directe finie d'injectifs indécomposables est isomorphe à un sous-module de $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)^{\oplus \alpha_d}$ ($\alpha_d > 0$) (resp. $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$) pour d assez grand.

On va considérer dans la suite des modules non réduits mais suspensions itérées de modules réduits.

Démonstration du Théorème 2. Soit M un sous-module instable connexe de $\Sigma^s H^*(B(\mathbb{Z}/2)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/2)$ qui est la cohomologie réduite d'un espace. Reprenons les notations introduites avant le théorème 2 : M est non trivial dans les degrés $s + n_1 < s + n_2 < \cdots$. Supposons qu'en degré supérieur ou égal à $s + n_1$, $(n, n+l]$ est la première lacune de longueur l telle que :

$$l \geq \max\{2^{d+4}, n_{j+1} - n_j, j = 1, \cdots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Soit k l'unique entier ($\geq d+4$) tel que $2^{k+1} > l \geq 2^k$.

Soit donc $x \in M^n$, $x \neq 0$, $\mathcal{A}_2 x$ contient une lacune $(n, n+l]$. Le corollaire 4 entraîne $2^{k-d+2} | n$.

Lemme 3. En degré strictement inférieur à n, il n'existe pas de degrés m tels que $2^{k-d+2} \not| m$ et $M^m \neq \{0\}$.

Démonstration. Supposons qu'en degré strictement inférieur à n, il existe des degrés m tels que $2^{k-d+2} \not| m$ et $M^m \neq \{0\}$. Soit m_0 le plus grand de ces degrés, et soit $y \in M^{m_0}$, $y \neq 0$. On suppose que $y = Sq_0^\alpha z \in \mathrm{Im}(Sq_0^\alpha) - \mathrm{Im}(Sq_0^{\alpha+1})$. Comme $2^{k-d+2} \not| m_0$, on a $\alpha \leq k-d+1$.

Si $\mathcal{A}_2 y$ contient une lacune $(|y|, n+l]$, le corollaire 4 implique que $\alpha \geq k-d+2$, ce qui est impossible. Donc le plus petit degré non nul supérieur ou égal à m_0+1 dans $\mathcal{A}_2 y$ est inférieur à $n+l$ et est donc de la forme $2^{k-d+2}q = p$ d'après l'hypothèse de maximalité de m_0.

Comme les Sq^{2^h} engendrent multiplicativement $\mathcal{A}_2$, on a $p = m_0 + 2^\beta$ (rappelons l'hypothèse de minimalité de p). En particulier, $Sq^{2^\beta} y$ est non nul. Comme $y \in \mathrm{Im}(Sq_0^\alpha)$, on a alors $\beta \geq \alpha$ car $Sq^{2^\beta} Sq_0^\alpha z = Sq_0^\alpha Sq^{2^{\beta-\alpha}} z$ qui est nul si $\alpha > \beta$. On en déduit que pour $\alpha \leq k-d$ et $t \geq 1$, 2^{k-d+2} ne divise pas le degré de $Q_t^\alpha y$, en effet on a :

$$\begin{aligned} |Q_t^\alpha y| &= m_0 + 2^\alpha(2^{t+1}-1) \\ &= 2^{k-d+2}q - 2^\beta + 2^{\alpha+t+1} - 2^\alpha. \end{aligned}$$

Tant que ce degré est inférieur ou égal à $n+l$, $Q_t^\alpha y$ est donc nul à cause de l'hypothèse sur m_0. Or pour $1 \leq t \leq k-\alpha-1$,

$$\begin{aligned} |Q_t^\alpha y| &= m_0 + 2^\alpha(2^{t+1}-1) \\ &\leq m_0 + 2^\alpha(2^{k-\alpha}-1) \\ &\leq n+l \end{aligned}$$

Donc d'après le corollaire 3, $k-\alpha-2 \leq d-2$, $\alpha \geq k-d$.

Donc α doit être $k-d$ ou $k-d+1$. Par conséquent, $\beta \geq \alpha \geq k-d \geq 4$. Mais β ne peut pas être plus grand que 4 à cause du théorème d'Adams. Ceci implique qu'un tel m_0 n'existe pas. □

Notons donc les degrés plus petits que n pour lesquels M est non trivial comme suit

$$r_0 = n > r_1 > \cdots \quad \text{et} \quad \forall\, i,\ 2^{k-d+2} | r_i.$$

On a

Lemme 4. Pour tout x_i de degré r_i, $\mathcal{A}_2 x_i$ contient la lacune $(r_i, n+l]$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si l'énoncé est faux, on choisit un élément x_i de degré maximal tel que $\mathcal{A}_2 x_i$ contienne des éléments non-nuls de degré supérieur à r_i et inférieur à $n+l$. On choisit dans $(r_i, n+l]$ le plus petit degré dans lequel $\mathcal{A}_2 x_i$ est non-nul. En utilisant la base multiplicative de $\mathcal{A}_2$, il est de la forme $r_i + 2^\gamma$, $\gamma \geq 0$. Comme les degrés dans l'intervalle $(r_i, n+l]$ où il y a des éléments non-nuls sont divisibles par 2^{k-d+2}, on a $\gamma \geq k-d+2 \geq 6$. Par conséquent, on a une lacune $(r_i, r_i + 2^\gamma)$, $\gamma \geq 6$, dans $\mathcal{A}_2 x_i$ avec $Sq^{2^\gamma} x_i \neq 0$ en degré

$r_i + 2^\gamma$. Par la maximalité de x_i, il n'y a aucun élément y de degré supérieur à r_i tel que $\mathcal{A}_2 y$ contienne des éléments non-nuls de $\mathcal{A}_2 x_i$ en degré supérieur à $|y|$ et inférieur à $n+l$. Donc l'élément non-nul $Sq^{2^\gamma} x_i$ ne peut pas être dans $\sum_{j<\gamma} \mathrm{Im}(Sq^{2^j})$. Alors l'existence de cette lacune (r_i, r_i+2^γ) dans $\mathcal{A}_2 x_i$ est impossible à cause du théorème d'Adams. $\square$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall\ i \geq j2^{d-2}, \qquad 2^{k-d+j+2}|r_i.$$

Supposons que c'est vrai pour j, alors

$$\begin{aligned} n+l-r_{(j+1)2^{d-2}} &= l + \textstyle\sum_{i=0}^{(j+1)2^{d-2}-1}(r_i - r_{i+1}) \\ &= l + \textstyle\sum_{h=0}^{j} \sum_{i=h2^{d-2}}^{(h+1)2^{d-2}-1}(r_i - r_{i+1}) \\ &\geq 2^k + \textstyle\sum_{h=0}^{j} 2^{d-2}2^{k-d+h+2} \\ &= 2^k + \textstyle\sum_{h=0}^{j} 2^{k+h} \\ &= 2^{k+j+1}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{A}_2 x_i$ contient une lacune $(r_i, n+l]$ et d'après le corollaire 4, on a donc $2^{k-d+j+3}|r_i$, $\forall\ i \geq (j+1)2^{d-2}$. Comme le cas $j=0$ est démontré ci-dessus, on a

$$2^{k-d+j+2}|r_i, \qquad \forall\ i \geq j2^{d-2}.$$

Si on pose $w = (d-1)2^{d-2}$, alors $2^{k+1}|r_w$ et $2^{k+1}|r_{w+1}$. L'intervalle (r_{w+1}, r_w) est donc aussi une lacune de M, en degré inférieur ou égal à n et supérieur ou égal à $s+n_1$, d'une longueur $\geq 2^{k+1}-1 \geq l \geq \max\{2^{d+4}, n_{j+1}-n_j, j=1,\cdots,1+(d-1)2^{d-2}\}$. Ceci est contradictoire au choix de $(n, n+l]$.

Fin de la démonstration du Théorème 2. $\square$

5. La démonstration du théorème 3

Dans cette section, on va étudier des modules instables dont la filtration nilpotente est de longueur finie. Un exemple trivial d'un tel module instable est un module instable quelconque de dimension finie. Un autre exemple est la suspension d'un module réduit, la cohomologie d'un groupe fini ou compact vérifie aussi cette hypothèse [3].

Ci-dessous, on démontre un résultat sur la non-existence de grandes lacunes dans les modules instables connexes réalisables dont la filtration nilpotente est de longueur finie qui vérifie la condition 1.

Démonstration du Théorème 3. Soit M un module instable connexe qui est la cohomologie réduite d'un espace. Reprenons les notations introduites avant le théorème 3 : les quotients $nil_s M/nil_{s+1}M$ non triviaux s'écrivent sous la forme $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$, R_{m_i} réduits, $i=1,\cdots,t$, $m_1 < \cdots < m_t$ que l'un des R_{m_i} (que l'on note R_m) soit non-trivial dans les degrés $n_1 < n_2 < \cdots$. Supposons qu'en degré supérieur ou égal à $m + n_1$, la lacune $(n, n+l]$ soit la première de longueur

$$l \geq \max\{m_t 2^{d+4}, n_{j+1} - n_j, j = 1, \cdots, 1 + (d-1)2^{d-2}\}.$$

Soit k l'unique entier tel que $2^{k+1} > l \geq 2^k$.

De la démonstration du théorème 2, il résulte qu'il suffit de montrer que pour tout élément x de M de degré inférieur à n, $\mathcal{A}_2 x$ contient une lacune $(|x|, n+l]$. Pour montrer cela, on raisonne par l'absurde. A tout élément x de M, on associe son degré de nilpotence, c'est-à-dire, l'entier m_x tel que $x \in nil_{m_x} M - nil_{m_x+1} M$.

Soit x un élément non-nul de degré maximal tel que $\mathcal{A}_2 x$ est non réduit à $\{0\}$ dans l'intervalle $(|x|, n]$. ($\mathcal{A}_2 x$ contient la lacune $(n, n+l]$ par l'hypothèse.)

Soit donc y, $|x| < |y| < n$, $\bar{y} \in \Sigma^{m_y} R_{m_y}$ sa réduction que l'on note $\sigma^{m_y} z$, $z \in R_{m_y}$. Alors le corollaire 4 implique que $z \in \mathrm{Im}(Sq_0^{k-d+2})$. (Rappelons l'hypothèse de maximalité de x.) Donc on a $|y| = m_y + 2^{k-d+2} l_y$.

Soit de même $\bar{x} \in \Sigma^{m_x} R_{m_x}$. Supposons que $\bar{x} = \sigma^{m_x} u$ tel que $u \in \mathrm{Im}(Sq_0^s) - \mathrm{Im}(Sq_0^{s+1})$. Alors comme la non-existence de m_0 dans la démonstration du lemme 3, on sait que pour $s \leq k-d$ et $t \geq 1$, 2^{k-d+2} ne divise pas le degré de $Q_t^s u$, en effet on a :

$$\begin{aligned} |Q_t^s u| &= |Q_t^s x| - m_x \\ &= |u| + 2^s(2^{t+1} - 1) \\ &= 2^{k-d+2} q - 2^\beta + 2^{s+t+1} - 2^s, \end{aligned}$$

où 2^β désigne le plus petit entier strictement positif e tel que $Sq^e \bar{x}$ soit non nul et on note le degré de $Sq^e \bar{x}$ par $m_x + 2^{k-d+2} q$. Tant que le degré de $Q_t^s x$ est inférieur ou égal à $n + l$, $Q_t^s u$ est donc nul à cause de l'hypothèse sur x. Or pour $1 \leq t \leq k - s - 1$,

$$\begin{aligned} |Q_t^s x| &= m_x + |u| + 2^s(2^{t+1} - 1) \\ &\leq m_x + |u| + 2^s(2^{k-s} - 1) \\ &\leq n + l \end{aligned}$$

Donc d'après le corollaire 3, $k - s - 2 \leq d - 2$, $s \geq k - d$.

Donc $|x| = m_x + 2^{k-d} l_x$. On choisit l'élément non-nul de plus petit degré, supérieur ou égal à $|x| + 1$, dans $\mathcal{A}_2 x$. A l'aide de la base multiplicative de $\mathcal{A}_2$, on sait que c'est un élément de la forme $Sq^{2^\alpha} x$. De plus, le théorème d'Adams implique que $\alpha \leq 3$. On note cet élément par $y = Sq^{2^\alpha} x$.

On a alors $|x| + 2^\alpha = |y|$ pour un certain $y = Sq^{2^\alpha} x \in nil_{m_y} M$. D'où, $m_x + 2^{k-d} l_x + 2^\alpha = m_y + 2^{k-d+2} l_y$, ce qui implique, en modulo 2^{k-d}, que $m_x + 2^\alpha = m_y$. Comme cette égalité ne possède pas de solution à cause de la condition 1, un tel x n'existe pas. Donc pour tout élément x de M de degré inférieur à n, $\mathcal{A}_2 x$ contient une lacune $(|x|, n+l]$. On achève la démonstration en appliquant la démonstration du théorème 2 à R_m. $\square$

6. Le cas p premier impair

On indique brièvement les résultats pour le cas où p est un premier impair. On donne d'abord les ingrédients essentiels, i.e., les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$, et P_0^s, $s \geq 0$. En tenant compte des signes, les formules et les résultats combinatoires sont établis de la même manière. Ensuite, on donne les résultats principaux dont les démonstrations sont similaires à celles du cas où $p = 2$.

Définition 13. Les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$ sont définies récursivement comme suit :
1) $Q_0^0 = \beta$ et $Q_{k+1}^0 = [P^{p^k}, Q_k^0]$, ce sont des Q_t définis par Milnor ;
2) $Q_0^s = P^{p^{s-1}}$ et $Q_{k+1}^s = [P^{p^{k+s}}, Q_k^s]$, $s \geq 1$.

Notation 4. Le symbole $(n_1, \cdots, n_d) = (2m_1 + \epsilon_1, \cdots, 2m_d + \epsilon_d)$, $\epsilon_i = 0$ ou 1 $(1 \leq i \leq d)$, désigne l'élément $t^{\epsilon_1} u^{m_1} \otimes \cdots \otimes t^{\epsilon_d} u^{m_d} \in H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/p)$, t étant de degré 1 et u étant de degré 2. Un tel élément est dit **basique**.

Notation 5. Comme d'habitude, P_0 désigne l'opération définie dans un module instable par

$$P_0 x = \begin{cases} P^{|x|/2} x, & \text{si } |x| = 0 \bmod 2; \\ \beta P^{(|x|-1)/2} x, & \text{si } |x| = 1 \bmod 2. \end{cases}$$

On a donc

$$P_0^s(2m_1 + \epsilon_1, \cdots, 2m_d + \epsilon_d) = (2p^s m_1 + 2p^{s-1}\epsilon_1, \cdots, 2p^s m_d + 2p^{s-1}\epsilon_d),$$

et $\mathrm{Im}(P_0^s)$ $(s \geq 1)$ est l'ensemble des éléments $x = \sum_{j \in J} (2p^{s-1} n(j)_1, \cdots, 2p^{s-1} n(j)_d)$ de $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/p)$. Par convention, $P_0^0 = id$. Ici, J est un ensemble de $d-$uplets j, qu'on écrit $(n(j)_1, \cdots, n(j)_d)$, $n(j)_1, \cdots, n(j)_d = 0, 1 \bmod p$, $n(j)_\alpha$ peut être nul.

Puisqu'on a pour tout élément x d'un module instable et tout $n \geq 1$,

$$P^{pn} P_0 x = P_0 P^n x \qquad \text{et} \qquad P^1 P_0 x = P_0 \beta x,$$

on peut donc établir les propriétés de Q_t^s, $s, t \geq 0$, à partir de celles de $Q_t = Q_t^0$. Une autre façon d'établir les propriétés de Q_t^s est d'utiliser le fait que

$$\psi^*(P^{p^{s-1}}) = P^{p^{s-1}} \otimes 1 + P^{p^{s-1}-1} \otimes P^1 + \cdots + 1 \otimes P^{p^{s-1}}$$

devient $P^{p^{s-1}} \otimes 1 + 1 \otimes P^{p^{s-1}}$, une dérivation sur $\mathrm{Im}(P_0^s)$.

Lemme 5. Soit x un élément d'un sous-module instable de $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/p)$ tel que $x \in \mathrm{Im}(P_0^s) - \mathrm{Im}(P_0^{s+1})$ et que $Q_t^s x = 0$, $\forall$ $t = q, \cdots, r$. Alors $r - q \leq d - 2$.

Théorème 5. ([6], [10]) Soit X un espace ou un spectre, $k \geq 1$, soit $x \in H^n(X; \mathbb{Z}/p)$ tel que $\beta x = 0$ et $P^{p^i} x = 0$, $\forall$ $i < k$, alors $P^{p^k} x \in \sum_{i<k} \mathrm{Im}(P^{p^i}) + \mathrm{Im}(\beta)$.

Définition 14. Un module instable connexe M dont la filtration nilpotente est de longueur finie est **de type $\mathcal{T}$**, si

1) M est non nul dans des degrés arbitrairement grands ;

2) Les quotients $nil_s M/nil_{s+1} M$ non triviaux s'écrivent sous la forme $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$, alors l'un des R_{m_i} (que l'on note R_m) est non-trivial dans les degrés $n_1 < n_2 < \cdots$, et on suppose qu'il existe d tel que tous les R_{m_i} se plongent dans $H^*(B(\mathbb{Z}/p)^{\oplus d}; \mathbb{Z}/p)^{\oplus \alpha_d}$;

3) On suppose alors qu'en degré supérieur ou égal à $m + n_1$, M contient une lacune de longueur

$$l \geq \max\{2m_t(p-1)p^{d+4}, n_{j+1} - n_j, j = 1, \cdots, 1 + d(p-1)^2 p^{d-2}\}.$$

Condition 2. Soit M un module instable connexe dont la filtration nilpotente est de longueur finie. On désigne par $\Sigma^{m_i} R_{m_i}$ les quotients $nil_s M/nil_{s+1} M$ non triviaux, $i = 1, \cdots, t$, $m_1 < \cdots < m_t$.

On dit que M vérifie la condition 2 si

$$m_j - m_i \neq 1, 2(p-1), \qquad \forall\ 1 \leq i < j \leq t.$$

Théorème 6. Tout module instable connexe M dont la filtration nilpotente est de longueur finie, qui est de type $\mathcal{T}$ et vérifie la condition 2, n'est pas réalisable, i.e., il n'existe aucun espace ou spectre X tel que $M = \tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/p)$.

Appendice. Notes sur les opérations Q_t^s

Dans la base de Milnor de l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$, on a des opérations Q_t, $t \geq 0$, définies récursivement par les relations suivantes :

1. $Q_0 = Sq^1$;
2. $Q_{t+1} = Q_t Sq^{2^{t+1}} - Sq^{2^{t+1}} Q_t$.

Ces opérations ont des bonnes propriétés, plus précisément [8],

Proposition 3. 1. Soit M un module instable, on a $\forall$ $x \in M$,
$Q_r Q_t x = Q_t Q_r x$, $\forall$ $t, r \geq 0$; $Q_t^2 x = 0$.
2. Pour M, N deux modules instables,
$Q_t(x \otimes y) = Q_t x \otimes y + x \otimes Q_t y$, $\forall$ $x \in M$, $y \in N$.
3. Si u est le générateur de $H^1(B(\mathbb{Z}/2); \mathbb{Z}/2)$,
$Q_t u^{2l} = 0$ et $Q_t u^{2l+1} = u^{2l+2^{t+1}}$.

Inspiré par ces propriétés, on a construit dans la section 2 les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$, qui possèdent aussi ces propriétés sur $\mathrm{Im}(Sq_0^s)$. Dans le reste de cette section, on décrit quelques propriétés élémentaires de ces opérations. Puis, on donne à la fin les démonstrations du lemme 2 et du corollaire 2.

D'abord, on compare ces opérations avec les opérations connues, P_{t+1}^s, $s, t \geq 0$. Voici deux propriétés élémentaires :

1. $Q_t^0 = Q_t = P_{t+1}^0$, $Q_0^s = Sq^{2^s} = P_1^s$.
2. Q_t^s est une opération de degré $2^s(2^{t+1}-1)$.

D'après ces deux propriétés, plus le fait que P_{t+1}^s est aussi une opération de degré $2^s(2^{t+1}-1)$, une question curieuse est de savoir quand ces deux opérations coincident. En fait, quand $st \neq 0$, il semble que le seul cas où ces deux opérations coincident est $Q_1^1 = P_2^1$.

Pour effectuer le calcul des Q_t^s, on note que l'on a une autre façon de définir les opérations Q_t^s, $s, t \geq 0$:

1. $Q_0^s = P_1^s$;
2. $Q_{t+1}^s = [Q_t^s, P_1^{t+s+1}]$.

Avec cette définition, on peut exprimer Q_t^s en terme de la base de Milnor, à l'aide de la formule multiplicative de cette base. Voici quelques calculs qui comparent les Q_t^s et P_{t+1}^s :

1. $Q_1^1 = P_2^1$, $Q_1^2 = P_2^2 + Sq(3,3)$, $Q_1^3 = P_2^3 + Sq(6,6) + Sq(3,7)$.
2. $Q_2^1 = P_3^1 + Sq(7,0,1) + Sq(4,1,1)$.

Pour finir cette section, on donne ici les démonstrations du lemme 2 et du corollaire 2.

Démonstration. (Lemme 2) Soient M un module instable et x un élément de M.

Quand $t = 0$,

$$Q_0^{s+t} Sq_0^s x = Sq^{2^{s+r}} Sq_0^s x = Sq_0^s Sq^{2^r} x = Sq_0^s Q_0^r x.$$

Si on suppose que $Q_t^{s+r} Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^r x$ pour $t \leq t_0$, alors quand $t = t_0 + 1$, on a

$$\begin{aligned}
Q_{t_0+1}^{s+r} Sq_0^s x &= (Q_{t_0}^{s+r} Sq^{2^{t_0+s+r+1}} - Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Q_{t_0}^{s+r}) Sq_0^s x \\
&= Q_{t_0}^{s+r} Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Sq_0^s x - Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Q_{t_0}^{s+r} Sq_0^s x \\
&= Q_{t_0}^{s+r} Sq_0^s Sq^{2^{t_0+r+1}} x - Sq^{2^{t_0+s+r+1}} Sq_0^s Q_{t_0}^r x \\
&= Sq_0^s Q_{t_0}^r Sq^{2^{t_0+r+1}} x - Sq_0^s Sq^{2^{t_0+r+1}} Q_{t_0}^r x \\
&= Sq_0^s (Q_{t_0}^r Sq^{2^{t_0+r+1}} - Sq^{2^{t_0+r+1}} Q_{t_0}^r) x \\
&= Sq_0^s Q_{t_0+1}^r x.
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence sur t, on a $Q_t^{s+r} Sq_0^s x = Sq_0^s Q_t^r x$, $\forall\ r, s, t$. $\square$

Démonstration. (Corollaire 2) Les propriétés de Q_t utilisées ci-dessous sont dans la proposition 3.

1. Soit M un module instable. Par le lemme 2, on a $\forall\, x \in M$,

$$\begin{array}{rcl} Q_r^s Q_t^s Sq_0^s x &=& Q_r^s Sq_0^s Q_t^0 x \;=\; Sq_0^s Q_r^0 Q_t^0 x \\ &=& Sq_0^s Q_t^0 Q_r^0 x \;=\; Q_t^s Sq_0^s Q_r^0 x \\ &=& Q_t^s Q_r^s Sq_0^s x, \qquad \forall\, t, r \geq 0, \\ \text{et} \quad (Q_t^s)^2 Sq_0^s x &=& Q_t^s Sq_0^s Q_t^0 x \;=\; Sq_0^s (Q_t^0)^2 x \;=\; 0. \end{array}$$

2. Supposons qu'il existe $x' \in M$, $y' \in N$ tels que $x = Sq_0^s(x')$, $y = Sq_0^s(y')$, alors

$$\begin{array}{rcl} Q_t^s(x \otimes y) &=& Q_t^s(Sq_0^s(x') \otimes Sq_0^s(y')) \\ &=& Q_t^s Sq_0^s(x' \otimes y') \\ &=& Sq_0^s Q_t(x' \otimes y') \\ &=& Sq_0^s(Q_t x' \otimes y' + x' \otimes Q_t y') \\ &=& Sq_0^s Q_t x' \otimes Sq_0^s y' + Sq_0^s x' \otimes Sq_0^s Q_t y' \\ &=& Q_t^s x \otimes y + x \otimes Q_t^s y. \end{array}$$

3. On a

$$\begin{array}{rcl} Q_t^s Sq_0^s u^{2l} &=& Sq_0^s Q_t u^{2l} \;=\; 0. \\ Q_t^s Sq_0^s u^{2l+1} &=& Sq_0^s Q_t u^{2l+1} \;=\; Sq_0^s u^{2l+2^{t+1}} \;=\; u^{2^s(2l+2^{t+1})}. \end{array}$$

□

Références

[1] J.F.Adams, *On the nonexistence of elements of Hopf invariant one*, Annals of Mathematics, 72 (1960), pp. 20-104.

[2] P.Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), pp. 323-448.

[3] H.W.Henn, J.Lannes et L.Schwartz, *Localizations of unstable $\mathcal{A}$-modules and equivariant mod p cohomology*, Math. Ann. 301 (1995), No.1, pp. 23-68.

[4] N.J.Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Annals of Mathematics, 141 (1995), pp. 327-347.

[5] J.Lannes et L.Schwartz, *Sur la structure des $\mathcal{A}-$modules instables injectifs*, Topology (1989), Vol.28, No.2, pp. 153-169.

[6] A.Liulevicius, *The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations*, Mem. A.M.S. 42 (1962).

[7] L.Schwartz, *La filtration nilpotente de la categorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces de lacets*, Algebraic topology—rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), pp. 208–218, Lecture Notes in Math., 1318, Springer, Berlin (1988).

[8] L.Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series (1994).

[9] L.Schwartz, *La filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces*, Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), pp. 519-548 (electronic).

[10] N.Shimada et T.Yamanoshita, *On the triviality of the mod p Hopf invariant*, Japan J.Math. 31 (1961), pp. 1-24.

LAGA, Institut Galilée, Université Paris Nord, 93430 Villetaneuse, France

E-mail address: donghua.jiang@polytechnique.org