

# Sur l'anneau de Grothendieck de la catégorie des modules instables

Lionel Schwartz

19 octobre 2003

## Résumé

Dans cet article on calcule l'anneau de Grothendieck de la catégorie des modules instables de type fini et de la catégorie obtenue par quotient par la sous-catégorie des modules instables nilpotents. Les résultats principaux montrent que la série de Poincaré, ou un substitut adéquat déterminent ces groupes. On peut de plus caractériser les séries représentant un module instable. Ce type de sujet a déjà été abordé par N. Kuhn dans [K2] d'un point de vue de théorie des représentations, on retrouve ses résultats au long du développement.

## 1 Introduction

Soit  $\mathcal{U}$  la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ . Un  $\mathcal{A}_2$ -module  $M$  est dit instable si pour tout  $x \in M$  on a  $\text{Sq}^i(x) = 0$  dès que  $i < |x|$ , où  $|x|$  désigne le degré de l'élément  $x$ . Dans toute la suite  $\mathcal{A}_2$ -module instable sera abrégé module instable.

L'objet de cet article est de déterminer l'anneau de Grothendieck  $G_0(\mathcal{U})$  des modules instables de type fini, c'est-à-dire ayant un nombre fini de générateurs en tant que  $\mathcal{A}_2$ -module. Cet anneau est défini, comme groupe, comme suit :

- $\mathcal{L}(\mathcal{U})$  est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme de  $\mathcal{A}_2$ -modules de type fini, étant un module  $M$  de type fini on note  $[M]$  sa classe dans  $\mathcal{L}(\mathcal{U})$  ;
- $\mathcal{R}$  est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme  $[M] - [M'] - [M'']$  pour toute suite exacte  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  ;
- $G_0(\mathcal{U})$  est alors le groupe quotient  $\mathcal{L}(\mathcal{U})/\mathcal{R}$ .

La formule de Cartan permet de définir sur le produit tensoriel de deux  $\mathcal{A}_2$ -modules une structure de  $\mathcal{A}_2$ -module. En particulier le produit tensoriel de deux modules instables est naturellement un module instable. Le groupe  $G_0(\mathcal{U})$  est donc muni d'une structure d'anneau.

L'application qui à un module  $M$  associe sa série de Poincaré  $P_M(q)$  est un homomorphisme d'anneaux de  $G_0(\mathcal{U})$  dans  $\mathbf{Z}[[q]]$ . Le premier résultat principal de cet article est :

**Théorème 1.1** *L'homomorphisme  $G_0(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{Z}[[q]]$  est injectif.*

Ce résultat avait été énoncé dans [Sc1].

Soit  $\mathcal{N}il$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{U}$  constituée par les modules instables nilpotents, c'est-à-dire les modules qui sont limites directes de modules instables ayant une filtration finie dont les quotients sont des suspensions. On considère aussi l'anneau de Grothendieck de la catégorie quotient  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ , soit  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ , défini de manière analogue à ce qui est fait ci-dessus.

Cet anneau va être identifié à un anneau de fonctions. A cette fin introduisons des notations. Pour un entier  $n$   $\alpha(n)$  désigne le nombre de puissances de 2 dans la décomposition 2-adique de  $n$ .

Etant donnée une famille -supposée croissante- d'entiers impairs  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_t)$ , ou la famille constituée par l'entier 0 on notera  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  pour l'ensemble des entiers de la forme  $\sum_i k_i 2^{u_i}$ , la famille des entiers  $u_i$  étant quelconque. L'entier  $t$  sera appelé la longueur de  $\mathbf{k}$  et noté  $\ell(\mathbf{k})$ , l'entier  $\sum_i \alpha(k_i)$  sera appelé la longueur 2-adique de  $\mathbf{k}$  et noté  $\alpha(\mathbf{k})$ .

Soit  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  le sous-groupe des fonctions  $\gamma$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{Z}$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.  $\gamma(2i) = \gamma(i)$  pour tout  $i$  ;
2.  $\gamma(i) = 0$  dès que  $\alpha(i)$  est assez grand ;
3. pour tout  $\mathbf{k}$  la fonction  $\gamma$  est constante sur  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ , sauf éventuellement sur l'intersection avec  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  d'une réunion finie de  $\mathbf{V}_{\mathbf{l}}$ , où soit  $\alpha(\mathbf{l}) < \alpha(\mathbf{k})$ , soit  $\alpha(\mathbf{l}) = \alpha(\mathbf{k})$  et  $\ell(\mathbf{l}) < \ell(\mathbf{k})$ .

Le groupe  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  peut être muni, grâce à la première et à la seconde condition, d'une structure d'algèbre *via* le produit de convolution défini pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$  par :

$$\varphi * \psi(i) = \sum_{l+k=2^h i} \varphi(l)\psi(k) \quad .$$

Voici le second résultat principal de l'article.

**Théorème 1.2** *L'anneau de Grothendieck  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  est isomorphe à  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ .*

Voici maintenant une version "rationnelle" de ce résultat :

**Proposition 1.3** *L'anneau  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \otimes \mathbf{Q} \cong \mathcal{I}_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$  est isomorphe à une algèbre polynômiale  $\mathbf{Q}[\chi_1, \chi_3, \dots, \chi_{2h+1}, \dots]$ .*

Des versions préliminaires de ces résultats avait été annoncé entre autres au MSRI en 1989.

Ce problème a été étudié dans un contexte quelque peu différent par N. Kuhn [K2], celui de ce qu'il appelle "les représentations génériques", son résultat identifie un certain anneau de Grothendieck au  $\lambda$ -anneau universel en un générateur quotienté par la relation  $\psi^2 = \text{Id}$ , relation que l'on verra apparaître dans l'article. En fait le résultat de Kuhn vaut pour tout les corps finis. L'équivalence des points de vue entre "représentations génériques" et modules instables modulo les modules nilpotents avait été démontré dans [HLS] (antérieurement

à la terminologie introduite par Kuhn). Ceci étant les théorèmes ci-dessus, sauf 1.3, ne dérivent pas de cette équivalence et du résultat de Kuhn. Ils nécessitent la technologie de [Sc1]. De plus les invariants introduits (et ce malgré leur nom de "caractères") sont spécifiques aux modules instables, leur interprétation en termes de représentations (génériques ou non) demeure à bien des égards mystérieuses. Un autre aspect qui distingue ce travail de celui de Kuhn est qu'il est relié aux représentations des groupes symétriques et non des groupes linéaires (ce qui est le cas de l'analyse de Kuhn), et qu'il présente donc l'autre versant de la correspondance classique entre module de Specht et modules de Weyl.

Le plan de l'article suit.

Dans la seconde section on rappelle les prérequis sur les modules instables : modules libres, réduits et nilpotents et le fait (Massey-Peterson) que la catégorie est localement noethérienne.

Dans la troisième on commence par une remarque sur le noyau  $G_0(\mathcal{U}) \rightarrow G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  et la structure de l'anneau gradué associé à la filtration de  $G_0(\mathcal{U})$  par les puissances de cet idéal. Puis on montre comment associer à la classe dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  d'un module instable  $M$  une fonction sur les entiers qui joue le rôle d'un caractère. Cette fonction associe à un entier  $k$  la dimension comme espace vectoriel de la colimite  $\hat{M}^k$  suivante :

$$\dots \longrightarrow M^{2^q k} \xrightarrow{\text{Sq}^{2^q k}} M^{2^{q+1} k} \longrightarrow \dots$$

Ces fonctions ont deux propriétés remarquables : elles prennent la même valeur en  $k$  et  $2k$  pour tout entier  $k$ , de plus elles sont nulles sur les entiers  $d$  dès que  $\alpha(d)$  est assez grand. Elles se comportent bien pour la somme et un produit de type convolution. On énonce alors (théorème 3.9) le fait qu'elles déterminent la classe de l'objet dans l'anneau de Grothendieck. Plus précisément l'homomorphisme d'anneau qui à un élément de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  associe la fonction définie plus haut (dans l'espace des fonctions de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{Z}$ ) est injectif.

La démonstration du théorème 3.9 est donné dans les sous-sections 3.2 et 3.3. Elle repose dans une large mesure sur la construction d'objets particuliers dans  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ , construction inspirée par la construction de M. Atiyah des opérations d'Adams. Les fonctions correspondant à ces éléments sont celles qui prennent la valeur 1 sur tous les entiers de la forme  $k2^h$ , avec  $k$  entier impair fixé et  $h$  quelconque, ces fonctions engendrent une sous-algèbre polynômiale.

Dans la section 4 on rappelle quelques résultats de base sur les  $\lambda$ -anneaux que l'on applique au contexte en particulier en section 5 pour la construction d'objets spécifiques. Puis on démontre aussi le théorème 1.1 qui est alors conséquence de 3.9 et de l'existence et des propriétés de la filtration nilpotente sur les modules instables. On fait le lien avec le travail de Kuhn. Dans la cinquième on étudiera la structure de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  à l'aide de l'algèbre décrite ci-dessus.

On ne travaillera dans cet article que pour  $p = 2$ , mais les résultats s'étendent à  $p$  quelconque, et même à des corps finis quelconques suivant les constructions de Kuhn.

L'auteur tient à remercier N. Kuhn pour des remarques pertinentes sur la rédaction de l'article, et F. Neumann de l'avoir motivé pour l'achever.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappels sur les modules instables</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Théorie des caractères pour la catégorie <math>\mathcal{U}/\mathcal{N}il</math></b>	<b>8</b>
3.1	Caractères pour les objets de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . . . . .	8
3.2	Démonstration du théorème 3.9 . . . . .	10
3.3	Démonstration de la proposition 3.14 . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Structure de <math>\lambda</math>-anneau, démonstration du théorème 1.1.</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>La structure d'algèbre de <math>G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)</math>.</b>	<b>20</b>
5.1	L'algèbre $\mathcal{I}_{\mathbf{z}}$ . . . . .	20
5.2	La structure d'algèbre de $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ . . . . .	23

## 2 Rappels sur les modules instables

Un  $\mathcal{A}_2$ -module  $M$  est dit instable si pour tout  $x \in M$  on a  $\text{Sq}^i(x) = 0$  dès que  $i < |x|$ , où  $|x|$  désigne le degré de l'élément  $x$ . Suivant l'usage on note  $\Sigma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  le foncteur suspension : étant donné un module instable  $M$  le module instable  $\Sigma M$  est donné par  $(\Sigma M)^n = M^{n-1}$  et, avec une notation évidente,  $\theta(\Sigma x) = \Sigma(\theta x)$ . Pour tout  $n \geq 0$  le module instable  $\Sigma^n \mathbf{F}_2$  est simple. En fait :

**Proposition 2.1** *Tout objet simple de  $\mathcal{U}$  est isomorphe à  $\Sigma^n \mathbf{F}_2$  pour un entier  $n$  bien déterminé.*

**Démonstration :** Soit  $M$  un module instable, soit  $M^{*\geq n}$  le sous-espace des éléments de degré supérieur ou égal à  $n$ . C'est un sous-module. Ceci détermine une filtration décroissante par des modules instables  $M$ . On en conclut aisément qu'un module instable simple ne peut être non nul qu'en un seul degré.

Mais l'anneau  $G_0(\mathcal{U})$  n'est pas engendré par les classes  $[\Sigma^n \mathbf{F}_2]$ , en effet la classe d'équivalence d'un module monogène infini n'est pas combinaison linéaire de celles ci.

Le "module instable libre en un générateur  $\iota_n$  de degré  $n$ ", noté  $F(n)$ , est uniquement déterminé à isomorphisme près par le fait que la transformation :

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M) \longrightarrow M^n, \quad f \mapsto f(\iota_n) \quad ,$$

est une équivalence naturelle de foncteurs. Le module  $F(n)$  est le quotient du module  $\Sigma^n \mathcal{A}_2$  par le sous-module engendré par les éléments de la forme  $\Sigma^n \text{Sq}^I$  où  $\text{Sq}^I$  est une opération dont l'excès  $e(I)$  est strictement plus grand que  $n$ . Il admet pour base comme  $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel gradué les éléments  $\Sigma^n \text{Sq}^I$ , que l'on notera aussi  $\text{Sq}^I \iota_n$ , avec  $e(I) \leq n$ . On renvoie à [SE] pour les détails. Par définition les modules  $F(n)$  sont projectifs. Un module instable de type fini est un module instable qui admet un nombre fini de générateurs comme  $\mathcal{A}_2$ -module.

**Proposition 2.2** *Tout module instable de type fini est quotient d'une somme directe finie  $\bigoplus_{\alpha} F(n_{\alpha})$ .*

On saisit l'opportunité pour rappeler le :

**Théorème 2.3** (Massey, Peterson) *Tout sous-module d'un module instable de type fini est de type fini.*

Dans le contexte présent il sera commode de décrire les modules  $F(n)$  comme suit [LZ]. La cohomologie modulo 2 du classifiant  $B\mathbf{Z}/2$  est isomorphe à l'algèbre de polynômes  $\mathbf{F}_2[u]$  en un générateur  $u$  de degré 1. Le module  $F(1)$  s'identifie au sous-module engendré par cette classe. Il a pour base en tant que  $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel gradué le système  $\{u, u^2, \dots, u^{2^n}, \dots\}$ . La formule de Cartan itérée munit  $F(1)^{\otimes n}$  d'une structure de module instable. L'action du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  qui agit par permutation des facteurs est  $\mathcal{A}_2$ -linéaire. Par définition de  $F(n)$  la classe  $\underbrace{u \otimes \dots \otimes u}_{n \text{ fois}}$  détermine une application  $\varphi_n$  de  $F(1)^{\otimes n}$  dans  $F(n)$  :

**Proposition 2.4 (LZ)** *L'application  $\varphi_n$  est un isomorphisme de  $F(n)$  vers le sous-module des invariants du groupe symétrique  $(F(1)^{\otimes n})^{S_n}$ .*

Voici un corollaire immédiat des énoncés précédents :

**Proposition 2.5** *Soit  $M$  un module instable de type fini. Si  $\alpha(d)$  est supérieur à une constante ne dépendant que de  $M$  alors  $M^d = \{0\}$ .*

En effet le résultat est vrai pour les modules  $F(n)$ .

Introduisons encore quelques définitions. Soit  $M$  un module instable, l'application

$$\mathrm{Sq}_0 x \mapsto \mathrm{Sq}^{|x|}(x), M \longrightarrow M \quad ,$$

est notée  $\mathrm{Sq}_0$ .

**Définition 2.6** *Un module instable est réduit si pour tout  $i$  et tout  $q$  l'application  $\mathrm{Sq}_0$  est injective.*

Par exemple les modules  $F(n)$  sont réduits ; le module  $\Sigma^n \mathbf{F}_2$  est réduit si et seulement si  $n = 0$ .

**Définition 2.7** *Un module instable  $M$  est nilpotent si il est limite directe de modules instables ayant des filtrations finies dont les quotients sont des suspensions.*

**Lemme 2.8** *Un module instable est nilpotent si et seulement si l'application  $\mathrm{Sq}_0$  est nilpotente sur tout élément  $x$ .*

Observons qu'un module est réduit si et seulement si tout sous-module nilpotent contenu dans  $M$  est trivial. La sous-catégorie pleine  $\mathcal{N}il_i$  de  $\mathcal{U}$  est la plus petite sous-catégorie abélienne épaisse, stable par limite directe, contenant toutes les  $i$ -ième suspensions [Sc1]. Un module instable  $M$  possède une filtration nilpotente :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset \cdots \quad ,$$

où  $M_i$  est le plus grand sous-objet de  $M$  qui soit dans  $\mathcal{N}il_i$ .

**Proposition 2.9** (voir [Sc1] lemme 6.1.4) *Le module quotient  $M_i/M_{i+1}$  est la  $i$ -ième suspension d'un module réduit que l'on notera  $R_i(M)$ .*

*Si le module  $M$  est de type fini la filtration nilpotente de  $M$  est finie :  $M_{h+i} = \{0\}$  pour tout  $i > 0$ , pour un entier  $h$  assez grand. Si  $M_h \neq \{0\}$  l'entier  $h$  sera appelé la profondeur de  $M$ .*

Le lecteur pourra aussi consulter [K] section 2 sur ces questions.

### 3 Théorie des caractères pour la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$

#### 3.1 Caractères pour les objets de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$

La catégorie  $\mathcal{N}il$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{U}$  dont les objets sont les modules instables nilpotents. Autrement dit c'est la plus petite sous-catégorie pleine, épaisse, stable par limite directe qui contienne toutes les suspensions.

La sous-catégorie  $\mathcal{N}il$  est épaisse dans  $\mathcal{U}$  on peut définir la catégorie quotient  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  ([HLS], [Sc1]), cette catégorie est abélienne, ses objets sont ceux de la catégorie  $\mathcal{U}$ , ses morphismes sont obtenus à partir de ceux dans  $\mathcal{U}$  en inversant formellement ceux dont le noyau et le conoyau sont des modules nilpotents. En particulier un module nilpotent est isomorphe à l'objet trivial dans la catégorie quotient. Le produit tensoriel dans  $\mathcal{U}$  induit un produit tensoriel dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . Le foncteur oubli  $\mathcal{O} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}il$  est exact et tout foncteur exact de  $\mathcal{U}$  vers une catégorie abélienne qui est trivial sur  $\mathcal{N}il$  factorise de manière unique au travers de ce foncteur.

On définit l'anneau  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  comme on a défini l'anneau  $G_0(\mathcal{U})$ , étant entendu que par définition un objet de type fini dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  est l'image par le foncteur oubli d'un module de type fini dans  $\mathcal{U}$ . On fait alors la même construction que pour  $G_0(\mathcal{U})$ .

On va donner dans cette section donner une première approximation aux calculs de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  et de  $G_0(\mathcal{U})$ , l'essentiel de la section sera consacré au cas de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ . Cependant on va commencer par préciser leurs liens.

Le foncteur oubli  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}il$  induit un homomorphisme d'anneaux :

$$G_0(\mathcal{U}) \rightarrow G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \quad ,$$

et que si  $\sigma$  désigne la classe de  $\Sigma\mathbf{F}_2$  dans  $G_0(\mathcal{U})$  on a la :

**Proposition 3.1** *Le noyau de l'oubli  $G_0(\mathcal{U}) \rightarrow G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  est l'idéal engendré par la classe  $\sigma$ . De plus le gradu de  $G_0(\mathcal{U})$  associé à la filtration induite par l'idéal engendré par la classe  $\sigma$  est isomorphe à  $G_0(\mathcal{U})[\sigma]$ .*

**Démonstration :** Soit un module instable  $M$  de type fini, sa filtration nilpotente :

$$\{0\} = M_{h+1} \subset M_h \subset M_{h-1} \subset \dots \subset M_0 = M$$

$M_i/M_{i+1}$  est de la forme  $\Sigma^i R_i$ , avec  $R_i$  réduit (Proposition 2.9). Comme  $\Sigma^i R \cong \Sigma^i \mathbf{F}_2 \otimes R$  on a  $[M] = \sum_{i=0, \dots, h} \sigma^i [R^i] \in G_0(\mathcal{U})$ . Le résultat suit car par construction de la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  un module réduit non trivial a une classe non nulle dans  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  alors que  $\sigma$  a une image nulle. En fait le noyau est par les résultats classiques de  $K$ -théorie l'image de  $G_0(\mathcal{N}il)$  dans  $G_0(\mathcal{U})$ .

La seconde partie du résultat suit (Chapitre 6 de [Sc1] ou [K] section 2, on peut aussi se référer à l'article originel L. Schwartz, Proceedings LLN, Springer LNM 1318 (1988)).

On introduit maintenant une fonction qui tient lieu de caractère pour les objets de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . Soit  $M$  un module instable de type fini, et soit  $i$  un entier, considérons le système direct suivant indexé par  $q$  :

$$\dots \longrightarrow M^{2^q i} \xrightarrow{\text{Sq}^{2^q i}} M^{2^{q+1} i} \longrightarrow \dots ,$$

soit  $\hat{M}^i$  sa colimite. C'est un espace vectoriel de dimension finie. En effet, par exactitude à droite de la limite directe, il suffit de le vérifier pour les modules instables  $F(n)$  et donc pour les modules  $F(1)^{\otimes n}$ . Pour ce dernier cas c'est un problème facile de combinatoire.

**Lemme 3.2 (FS)** *Soit  $M$  un module instable réduit de type fini, alors la limite ci-dessus est atteinte, i.e l'application  $\text{Sq}^{2^q i}$  est un isomorphisme pour  $q$  assez grand.*

Encore une fois il suffit de le vérifier pour les modules instables  $F(n)$ .  
Etant donné un module instable  $M$  on définit la fonction  $\gamma_M : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$  par

$$\gamma_M(i) = \dim_{\mathbf{F}_2}(\hat{M}^i) .$$

**Proposition 3.3** *La fonction  $\gamma_M$  ne dépend que de la classe de  $M$  dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ .*

**Démonstration :** En effet, par construction de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  il suffit de montrer que si on a un homomorphisme  $\varphi : M \longrightarrow N$  dont le noyau et le conoyau sont objets de la catégorie  $\mathcal{N}il$ , alors  $\gamma_M = \gamma_N$ . Le résultat résulte alors du lemme suivant, lui même conséquence directe de la définition d'un module nilpotent :

**Lemme 3.4** *Si  $K \in \mathcal{N}il$  alors la fonction  $\gamma_K$  est nulle.*

En effet l'espace vectoriel  $\hat{K}^i$  est trivial pour tout  $i$ .

La proposition 3.3 suit car si on a une suite exacte  $\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$ , alors  $\gamma_M = \gamma_{M'} + \gamma_{M''}$ .

Par construction :

**Proposition 3.5** *On a  $\gamma_M(2i) = \gamma_M(i)$  pour tout  $i$ .*

**Proposition 3.6** *La fonction  $\gamma_M$  est nulle sur les valeurs  $i$  telles que  $\alpha(i)$  est assez grand.*

**Démonstration :** Cette dernière proposition résulte de 2.5.

Soit  $\mathcal{C}$  le sous-groupe des fonctions de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{Z}$  satisfaisant aux propriétés de (3.5) et (3.6). Le groupe  $\mathcal{C}$  peut être muni d'une structure d'algèbre *via* le produit de convolution défini par le lemme suivant :

**Lemme 3.7** *Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$ , la valeur*

$$\varphi * \psi(i) = \sum_{l+k=2^h i} \varphi(l)\psi(k) \quad ,$$

*ne dépend pas de  $h$ , dès que celui ci est choisi assez grand. Cette formule détermine une structure d'algèbre sur  $\mathcal{C}$ .*

On doit vérifier d'abord que la somme ci-dessus est finie. Ceci est conséquence des hypothèses de la proposition 3.6. Puis on doit vérifier que la valeur obtenue ne dépend pas de  $h$  dès que celui ci est assez grand. Cela résulte des hypothèses de la proposition 3.5. Ces deux exercices sont faciles. Par calcul direct on a :

**Lemme 3.8** *Soient  $M$  et  $N$  deux modules instables, la fonction  $\gamma_{M \otimes N}$  est égale à  $\gamma_M * \gamma_N$ .*

Comme il a été dit plus haut si on a une suite exacte  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  on a  $\gamma_M = \gamma_{M'} + \gamma_{M''}$  on en conclut que l'on a un homomorphisme d'anneaux :

$$G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \rightarrow \mathcal{C} \quad .$$

Voici le résultat fondamental de cette section.

**Théorème 3.9** *L'homomorphisme  $[M] \mapsto \gamma_M, G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \rightarrow \mathcal{C}$ , est injectif.*

### 3.2 Démonstration du théorème 3.9

La démonstration dépend de la filtration "polynômiale" sur la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  que l'on commence par rappeler. Soit  $\mathcal{V}_n$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  définie comme suit. Un objet  $M$  de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  est dans  $\mathcal{V}_n$  si et seulement si la fonction  $\gamma_M$  est nulle sur tout  $d$  tel que  $\alpha(d) > n$ . D'après le lemme 2.5 la classe dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  de tout module instable  $M$  de type fini est dans une sous-catégorie  $\mathcal{V}_n$  pour un certain entier  $n$ .

**Remarque 3.10** *On remarquera que cette condition a lieu pour tout module instable réduit  $L$  dont la classe dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  est égale à  $M$ .*

La filtration de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  par les sous-catégories pleines  $\mathcal{V}_n$  est convergente :

**Proposition 3.11** *La plus petite sous-catégorie de  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  contenant tous les  $\mathcal{V}_n$  et stable par limite directe est  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  elle même.*

De plus on a :

**Théorème 3.12** *La catégorie quotient  $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$  est équivalente à la catégorie des modules sur  $\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$ .*

On renvoie à [FS] et [Sc1] pour les détails.

**Corollaire 3.13** *On a des isomorphismes de groupes*

$$G_0(\mathcal{V}_n) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq n} G_0(\mathcal{M}od_{\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_i]}) \quad ;$$

et

$$G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \cong \bigoplus_{n \geq 0} G_0(\mathcal{M}od_{\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]}) \quad .$$

La démonstration du corollaire est laissée au lecteur, elle est essentiellement dans [Sc1], et expliquée en détails dans [Pi] et est conséquence en tout état de cause des énoncés de [Ga].

Le rang de  $G_0(\mathcal{V}_n)$  est donc la somme des rangs des groupes  $G_0(\text{Mod}_{\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_i]})$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Or le rang de  $G_0(\text{Mod}_{\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_i]})$  est égal au nombre de classes d'isomorphisme de  $\mathbf{F}_2$ -représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_i$ . La théorie des représentations en caractéristique 2 [Se] montre que c'est aussi le nombre de classe de conjugaison d'ordre premier à 2 dans le groupe symétrique  $\mathcal{S}_i$ . Le rang de  $G_0(\text{Mod}_{\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_i]})$  est donc égal au nombre de partitions de l'entier  $i$  en entiers impairs et le rang de  $G_0(\mathcal{V}_n)$  est égal à la somme sur  $i$  compris entre 0 et  $n$  du nombre de partitions de l'entier  $i$  en entiers impairs.

Soit la  $\mathbf{Q}$ -sous-algèbre  $\mathcal{I} \subset \mathcal{C} \otimes \mathbf{Q}$  engendrée (comme  $\mathbf{Q}$ -algèbre) par les fonctions  $\chi_k$ , pour  $k$  entier impair, définies par :

- $\chi_k(n) = 1$  si  $n = 2^h k$ ,
- $\chi_k(n) = 0$  sinon.

**Proposition 3.14** *La sous-algèbre  $\mathcal{I}$  est polynômiale en les  $\chi_k$ .*

Il en résulte :

**Corollaire 3.15** *L'image de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  dans  $\mathcal{C}$  est, après tensorisation par  $\mathbf{Q}$ , égale à  $\mathbf{Q}[\chi_1, \dots, \chi_k, \dots]$ .*

La preuve de (3.14) sera donnée dans la section 3.3, celle de (3.9) et celle de (3.15) sont données maintenant. L'ingrédient essentiel de ces démonstrations est le suivant :

**Théorème 3.16** *Pour tout entier impair  $k$  il existe un élément*

$$X_k \in G_0(\mathcal{V}_k) \subset G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$$

*tel que  $\gamma_{X_k} = \chi_k$ .*

Supposant ce théorème démontré on commence par la :

**Démonstration du théorème 3.9 et du corollaire 3.15 :** Pour démontrer le résultat on peut tensoriser l'application par  $\mathbf{Q}$ , ceci sera supposé implicitement dans la suite. On filtre  $\mathcal{I}$  comme suit, soit  $\mathcal{I}^n$  le sous-espace vectoriel engendré par les monômes  $\chi_1^{a_1} \dots \chi_k^{a_k}$  tels que  $a_1 + 3a_3 + \dots + ka_k \leq n$ . Le produit envoie  $\mathcal{I}^n \otimes \mathcal{I}^m$  vers  $\mathcal{I}^{n+m}$ .

Le rang de  $\mathcal{I}^n$  est égal à la somme sur  $i$ , compris entre 0 et  $n$ , du nombre de partitions de l'entier  $i$  en entiers impairs. Cette quantité est aussi, ainsi qu'on l'a vu plus haut, le rang de  $G_0(\mathcal{V}_n)$ .

On montre maintenant que  $G_0(\mathcal{V}_n)$  est envoyé dans  $\mathcal{I}^n$ . Les éléments  $X_1^{a_1} \dots X_k^{a_k}$  de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  forment un système libre, en effet leurs images, les monômes  $\chi_1^{a_1} \dots \chi_k^{a_k}$  par l'application  $\gamma$  forme un tel système.

Ensuite comme  $X_k \in G_0(\mathcal{V}_k)$  les monômes  $X_1^{a_1} \dots X_k^{a_k}$  tels que  $a_1 + 3a_3 + \dots + ka_k \leq n$  sont dans  $G_0(\mathcal{V}_n)$ . A l'aide de (3.13) on en déduit qu'ils forment une base de  $G_0(\mathcal{V}_n)$  après

tensorisation par  $\mathbf{Q}$ , en effet leur nombre est égal au rang de  $G_0(\mathcal{V}_n)$ . L'injectivité de  $\gamma$  en résulte ainsi que 3.15 admettant 3.14.

On revient maintenant sur la démonstration du théorème 3.16, c'est-à-dire la construction des éléments  $X_k$ . On suit une approche due à Atiyah [At] pour la construction des opérations d'Adams,  $k$  étant un entier impair soit  $\mathcal{S}_k$  l'ensemble des classes d'équivalence de représentations simples du groupe symétrique  $\mathcal{S}_k$  sur le corps  $\mathbf{F}_2$ ,  $c_\varrho$  désignera le caractère de Brauer (ou modulaire) de la représentation simple  $\varrho$ , et  $P_\varrho$  son recouvrement projectif [Se]. Notons enfin  $\sigma_k$  la classe de conjugaison des  $k$ -cycles dans  $\mathcal{S}_k$ .

On définit  $X_k$  par la formule suivante :

$$X_k = \sum_{\varrho \in \mathcal{S}_k} c_\varrho(\sigma_k) [\text{Hom}_{\mathcal{S}_k}(P_\varrho, F(1)^{\otimes k})] \quad .$$

On notera que dans cette formule  $c_\varrho(\sigma_k)$  est bien un entier [Se], et que  $X_k$  n'est pas la classe d'un module instable sauf pour  $k = 1$ , c'est un module "virtuel". La notation  $\text{Hom}_{\mathcal{S}_k}(P_\varrho, F(1)^{\otimes k})$  désigne le module instable qui est isomorphe en degré  $n$  à  $\text{Hom}_{\mathcal{S}_k}(P_\varrho, (F(1)^{\otimes k})^n)$ , avec l'action évidente de l'algèbre de Steenrod. Par construction l'élément  $X_k$  appartient à  $G_0(\mathcal{V}_k)$ .

Calculons maintenant la fonction  $\gamma_{X_k}$ , l'entier  $\gamma_{X_k}(n)$  est égal à la somme

$$\sum_{\varrho \in \mathcal{S}_k} c_\varrho(\sigma_k) \dim_{\mathbf{F}_2} \text{Hom}_{\mathcal{S}_k}(P_\varrho, (F(1)^{\otimes k})^{2^h n}) \quad ,$$

$h$  assez grand.

La dimension de  $\text{Hom}_{\mathcal{S}_k}(P_\varrho, M)$  est égale à  $n_\varrho(M) \dim_{\mathbf{F}_2} \text{End}_{\mathcal{S}_k}(\varrho)$ , où  $n_\varrho(M)$  est le nombre d'occurrence de  $\varrho$  dans la série de composition, en tant que  $\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_k]$ -module, de  $M$ . Comme  $\mathbf{F}_2$  est un corps de scindement pour  $\mathcal{S}_k$  on a  $\dim_{\mathbf{F}_2} \text{End}_{\mathcal{S}_k}(\varrho) = 1$ . L'entier  $\gamma_{X_k}(n)$  est donc la valeur en  $\sigma_k$  du caractère modulaire de  $(F(1)^{\otimes k})^{2^h n}$  considéré comme représentation de  $\mathcal{S}_k$ . Mais cette représentation est somme directe de représentations de permutations de la forme :  $\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_\mu]$ ,  $\mathcal{S}_\mu$  étant un sous-groupe de la forme  $\mathcal{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_t}$ ,  $(F(1)^{\otimes k})^n$ , où  $(\mu_1, \dots, \mu_t)$  est une partition de  $k$ . Ces représentations sont engendrées comme  $\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_k]$ -modules par les tenseurs :

$$\underbrace{u^{2^{a_1}} \otimes \dots \otimes u^{2^{a_1}}}_{\mu_1 \text{ fois}} \otimes \dots \otimes \underbrace{u^{2^{a_t}} \otimes \dots \otimes u^{2^{a_t}}}_{\mu_t \text{ fois}} \quad ,$$

tels que  $\sum_i \mu_i 2^{a_i} = 2^h n$ .

La représentation triviale apparaît parmi ces représentations de permutation pour la partition triviale ( $k$ ). Elle apparaît donc seulement dans les degrés  $n$  tels que  $n = 2^u k$ , elle apparaît alors avec multiplicité 1. Enfin le caractère modulaire de  $\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_\mu]$  évalué en  $\sigma_k$  est égal au caractère ordinaire du relèvement  $\mathbf{Z}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_\mu]$  évalué sur le même cycle [Se]. Il est nul si  $\mathcal{S}_k \neq \mathcal{S}_\mu$  et vaut 1 si  $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_\mu$ . Le calcul de  $\gamma_{X_k}$  en résulte.

On trouve par exemple  $X_1 = [F(1)]$  et

$$X_3 = 3[\Lambda^3(F(1))] + 2[\Lambda^2(F(1))] + [\Lambda^1(F(1))] - [\Lambda^2(F(1)) \otimes \Lambda^1(F(1))]$$

En fait, il est possible de montrer que le module instable  $F(1)^{\otimes 3}$  est somme directe de deux copies du noyau,  $S_{(2,1)}F(1)$ , de la multiplication  $\Lambda^2(F(1)) \otimes \Lambda^1(F(1)) \rightarrow \Lambda^3(F(1))$  et d'un module  $P_{(1)}(F(1))$  qui est le recouvrement projectif de  $\Lambda^3(F(1))$  dans  $\mathcal{V}_3$ . Une autre caractérisation de ce dernier module est que  $F(1)^{\otimes 3} \cong S_{(2,1)}F(1)^{\oplus 2} \oplus P_{(1)}(F(1))$ . Alors

$$X_3 = [P_{(1)}(F(1))] - [S_{(2,1)}(F(1))] \quad .$$

De telles formules ont lieu en général, la classe  $X_k$  est la somme, avec des coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , de classes d'isomorphisme d'objets projectifs (et en fait également injectifs) dans  $\mathcal{V}_k$ .

### 3.3 Démonstration de la proposition 3.14

Cette proposition est "intuitive" et peut se démontrer de diverses manières. On en donne ci-dessous une démonstration détaillée. Au passage on notera que le résultat est aussi conséquence de l'existence d'une structure d'algèbre de Hopf sur  $\mathcal{I}$  et du fait que les  $\chi_k$  sont linéairement indépendants.

Il faut montrer que  $\mathcal{I}$  est polynômiale en les  $\chi_k$ , on va donc vérifier que les monômes en les  $\chi_k$  sont linéairement indépendants. C'est une conséquence du lemme qui suit.

**Proposition 3.17** *Soit  $n$  un entier, et soit  $(1^{a_1}, 3^{a_3}, \dots, k^{a_k})$ ,  $a_i \geq 0$ , une partition de  $n$  en entiers impairs, on a donc  $\sum_{i=1,3,\dots,k} ia_i = n$ . Soit un monôme  $\chi_1^{a_1} \chi_3^{a_3} \dots \chi_k^{a_k}$  en un entier de la forme :*

$$\sum_{1 \leq i \leq k, i \text{ impair}} i \left( \sum_{0 \leq j \leq a_i} 2^{\alpha_{i,j}} \right) \quad .$$

*Supposons que  $\min_{(i,j) \neq (i',j')} |\alpha_{i,j} - \alpha_{i',j'}|$  est grand, relativement à  $k$ .*

*La valeur du monôme en cet entier est  $a_1! a_3! \dots a_k!$ . Un monôme associé à une partition distincte de  $n$ , ou à une partition d'un entier inférieur prend la valeur nulle en tout entier de cette forme.*

La démonstration utilise le lemme élémentaire, mais casse-pieds, suivant.

**Lemme 3.18** *Soient  $\{b_1, \dots, b_t\}$  et  $\{a_1, \dots, a_k\}$  deux familles d'entiers positifs non-nuls (ils sont impairs dans l'application) positifs, strictement bornés dans leur ensemble par un entier  $C$ . Soit  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  une suite strictement croissante d'entiers positifs, supposons que  $k \leq t$  et que*

$$\min_{i \neq j} \{|\beta_i - \beta_j|\} > 4^k \log_2(tC) \quad ,$$

*Alors, quelle que soit la suite d'entiers positifs  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  :*

*- on ne peut avoir, si  $t > k$ , d'identité de la forme*

$$\sum_{1 \leq i \leq k} 2^{\alpha_i} a_i = \sum_{1 \leq j \leq t} 2^{\beta_j} b_j \quad ;$$

*- et si  $t = k$ , et si on a :*

$$\sum_{1 \leq i \leq k} 2^{\alpha_i} a_i = \sum_{1 \leq j \leq t} 2^{\beta_j} b_j \quad ,$$

*on a (quitte à réordonner)  $\alpha_i = \beta_i$  et  $a_i = b_i$ .*

**Démonstration :** Plaçons nous dans le premier cas et supposons que l'on ait l'égalité. On peut supposer que  $2^{\alpha_i} \leq 2^{\alpha_{i+1}}$  pour tout  $i$  et que  $2^{\beta_j} \leq 2^{\beta_{j+1}}$  pour tout  $j$ . On a  $2^{\beta_t} \leq kC2^{\alpha_k}$  et  $2^{\alpha_k} \leq tC2^{\beta_t}$ . Soit

$$\alpha_k - \log_2(tC) \leq \beta_t \leq \alpha_k + \log_2(kC) \quad ,$$

et

$$\beta_t - \log_2(kC) \leq \alpha_k \leq \beta_t + \log_2(tC) \quad .$$

Notons que si dans  $m = \sum_{1 \leq j \leq t} 2^{\beta_j} b_j$  on substitue aux  $b_j$  leur décomposition 2-adique, on obtient la décomposition 2-adique de l'entier  $m$ , *i.e.* toutes les puissances de 2 obtenues en développant les produits sont deux à deux distinctes, en effet,  $\min_{i \neq j} \{|\beta_i - \beta_j|\} > 4^k \log_2(tC) > \log_2(C)$ .

On montre dans une première étape que  $2^{\alpha_k} a_k \leq 2^{\beta_t} b_t$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $2^{\alpha_k} a_k > 2^{\beta_t} b_t$ . La plus petite puissance de 2 qui apparaît dans la décomposition 2-adique de  $2^{\alpha_k} a_k$  est minorée par  $2^{\beta_t - \log_2(kC)}$ , dans  $2^{\beta_t} b_t$  elle est minorée par  $2^{\beta_t}$ . On a donc :

$$2^{\alpha_k} a_k - 2^{\beta_t} b_t \geq 2^{\beta_t - \log_2(kC)} \quad .$$

Puis :

$$tC2^{\beta_{t-1}} < 2^{\beta_t - \log_2(tC)} \leq 2^{\beta_t - \log_2(kC)} \leq 2^{\alpha_k} a_k - 2^{\beta_t} b_t \quad .$$

La première inégalité est équivalente à  $t^2 C^2 < 2^{\beta_t - \beta_{t-1}}$  qui est réalisée par hypothèse.

Comme :

$$\sum_{1 \leq i \leq t-1} 2^{\beta_i} b_i < tC2^{\beta_{t-1}} \quad ,$$

ceci démontre l'assertion, car cette dernière inégalité impliquerait que  $m < 2^{\alpha_k} a_k$ , qui est impossible.

Supposons que maintenant que  $2^{\beta_t} b_t \leq 2^{\alpha_k} a_k$ . On obtient alors

$$2^{\beta_t} b_t - 2^{\alpha_k} a_k \geq 2^{\alpha_k - \log_2(tC)} \quad .$$

Mais on ne peut procéder comme ci-dessus car on n'a pas d'hypothèse sur  $|\alpha_i - \alpha_j|$ . On considère alors l'entier

$$m' = \sum_{1 \leq j \leq t-1} 2^{\beta_j} b_j + (2^{\beta_t} b_t - 2^{\alpha_k} a_k) \quad .$$

Notons  $\beta'_t$  pour  $\min(\beta_t, \alpha_k)$ , l'entier  $m'$  s'écrit

$$\sum_{1 \leq j \leq t-1} 2^{\beta_j} b_j + 2^{\beta'_t} b'_t$$

avec  $b'_t < t^2 C^3$ .

En effet la plus petite puissance de 2 qui apparaît dans  $2^{\beta'_t} b'_t$  est au moins  $2^{\beta_t} \geq 2^{\alpha_k - \log_2(tC)}$  ou  $2^{\alpha_k}$ , donc au moins  $2^{\alpha_k - \log_2(tC)}$ . De même la plus grande puissance de 2 qui apparaît

dans  $2^{\beta_i} b'_i$  est au plus  $2^{\beta_t + \log_2(C)}$  ou  $2^{\alpha_k + \log_2(C)}$ , enfin on a vu plus haut que  $|\beta_t - \alpha_k| \leq \log_2(tC)$  c'est au plus  $2^{\alpha_k + \log_2(C) + \log_2(tC)}$ . L'inégalité  $b'_i < t^2 C^3$  suit.

Que le dernier terme du membre de droite soit non nul ou non on est ramené au cas  $k - 1$  d'une hypothèse de récurrence qu'on laisse au lecteur le soin d'écrire en détails. Cependant il convient de vérifier que les constantes en jeu satisfont aux hypothèses.

Si le dernier terme du membre de droite est non nul  $t$  est inchangé,  $k$  devient  $k - 1$  et  $C$  est remplacé par  $t^2 C^3$ . Il suffit de vérifier que

$$\min_{i \neq j} \{|\beta'_i - \beta'_j|\} > 4^{k-1} \log_2(t^3 C^3) \quad ,$$

avec  $\beta_i = \beta'_i$  si  $i < t$ . Or par définition de  $\beta'_i$  on a

$$\min_{i \neq j} \{|\beta'_i - \beta'_j|\} > 4^k \log_2(tC) - \log_2(tC) \quad ,$$

et

$$4^k \log_2(tC) - \log_2(tC) > 4^{k-1} \log_2(t^3 C^3) \quad ,$$

ce qui justifie cette formule baroque.

Si le dernier terme du membre de droite est nul on laisse au lecteur le soin de compléter les détails.

L'hypothèse de récurrence nous garantit l'impossibilité d'une telle équation, cela conclut le premier cas ( $t > k$ ).

Dans le second cas du lemme ( $t = k$ ) on peut appliquer le même procédé que ci-dessus. Alors soit on se ramène à un cas où le dernier terme du membre de droite est nul, auquel cas on se ramène à une hypothèse de récurrence. Soit le dernier terme du membre de droite est non nul et il n'y a pas de solutions de par le cas précédent ( $t > k$ ).

Jiang Dong Hua m'a signalé une démonstration plus directe du lemme si tous les  $k_i$  sont impairs.

**Démonstration de la proposition 3.17 :** Elle résulte aisément de ce qui précède par application des définitions et du lemme 5.2 qui permet d'effectuer les calculs.

La valeur du monôme est le nombre de manière d'écrire l'entier donné :

$$\sum_{1 \leq i \leq k, i \text{ impair}} i \left( \sum_{0 \leq j \leq a_i} 2^{\alpha_{i,j}} \right) \quad ,$$

sous la même forme, c'est-à-dire :

$$\sum_{1 \leq i \leq k, i \text{ impair}} i \left( \sum_{0 \leq j \leq a_i} 2^{\delta_{i,j}} \right) \quad .$$

Mais d'après 5.2, et pourvu que l'on se place dans les conditions d'application, la seule chose autorisée est de permuter les  $\alpha_{i,j}$ , à  $i$  fixe. La seconde assertion suit.

**Démonstration de 3.14 :** Il suffit de montrer que toute combinaison linéaire de monômes  $\chi_1^{u_1} \chi_3^{u_3} \dots \chi_k^{u_k}$  forme un système libre. A cette fin on évalue une telle combinaison linéaire

$X$  sur des entiers appropriés, à savoir ceux donnés par les énoncés 5.1 et 5.2, pour montrer que tout monôme a un coefficient nul dans  $X$ . Donc, soit  $\alpha$  un entier de la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq k, i \text{ impair}} \sum_{1 \leq j \leq v_i} i 2^{\alpha_{i,j}} \quad ,$$

en prenant  $\sum_i v_i$  maximum. L'entier  $\sum_i v_i$  correspond au paramètre  $n$  de la proposition 5.1, la maximalité de la famille  $(v_1, \dots, v_k)$  étant entendue comme suit : tout monôme  $\chi_1^{u_1} \chi_3^{u_3} \dots \chi_k^{u_k}$  tel que  $\sum_i u_i > \sum_j v_j$  a un coefficient nul dans  $X$ .

Sous les conditions d'application du lemme sur l'entier  $\alpha$  on a alors :

$$X(\alpha) = \varepsilon \chi_1^{v_1} \chi_3^{v_3} \dots \chi_k^{v_k}(\alpha) \quad ,$$

où  $\varepsilon$  est le coefficient de  $\chi_1^{u_1} \chi_3^{u_3} \dots \chi_k^{u_k}$  dans  $X$ . Si  $X(\alpha) = 0$  on obtient donc  $\varepsilon = 0$ .

En faisant une récurrence descendante on obtient le résultat.

## 4 Structure de $\lambda$ -anneau, démonstration du théorème 1.1.

On a jusqu'ici obtenu une description de la structure de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  après tensorisation par le corps des rationnels, on va maintenant obtenir un énoncé sans cette restriction, et faire le lien avec l'approche de Kuhn. On reviendra dans la prochaine section sur l'algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  de la section 1. Des rappels sur les  $\lambda$ -anneaux [Kn] sont utiles, on va les faire dans cette section et en donner quelques conséquences, entre autres cela donnera une interprétation de la construction des éléments  $X_k$ .

Un  $\lambda$ -anneau  $R$  est un anneau muni d'opérations  $\lambda^i$  telles que :

1.  $\lambda^0 = 1$ ,
2.  $\lambda^1 = \text{Id}$ ,
3.  $\lambda^n(x + y) = \sum_{0 \leq i \leq n} \lambda^i(x) \lambda^{n-i}(y)$ .

En sus des propriétés que l'on vient d'énoncer on en demande deux autres.

- la première exprime  $\lambda^i(xy)$  comme un polynôme universel en les  $\lambda^k(x)$  et les  $\lambda^l(y)$  ;
- la seconde exprime  $\lambda^i(\lambda^j(x))$  comme un polynôme universel en les  $\lambda^k(x)$ .

Si  $R$  est de caractéristique 0 la manière la plus simple d'exprimer ces propriétés est d'introduire les opérations d'Adams  $\psi^k$ . Considérons la série formelle :

$$\lambda_t(x) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i(x) t^i \in R[[t]] \quad .$$

Les opérations d'Adams  $\psi^k$ , à valeurs dans  $R \otimes \mathbf{Q}$  sont définies par :

$$\frac{d}{dt} \log(\lambda_t(x)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \psi^{n+1}(x) t^n \quad .$$

Ces opérations sont additives dès que les deux premières conditions sont satisfaites. Si les deux conditions suivantes ont lieu on a :

- $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$  pour tous  $x, y, k$  ;
- $\psi^k\psi^l = \psi^{kl}$ , pour tous  $k$  et  $l$ .

La réciproque est vraie, si les opérations d'Adams satisfont à ces relations alors  $R$  est un  $\lambda$ -anneau (évidemment si on travaille sur un anneau sans torsion).

La structure de  $\lambda$ -anneau suivante sur l'algèbre de série formelle  $\mathbf{Z}[[q]]$  est la traduction en terme de série de Poincaré de l'action des foncteurs puissance extérieure sur les espaces vectoriels gradués :

**Théorème 4.1 (Kn)** *Il existe sur l'anneau  $\mathbf{Z}[[q]]$  une unique structure de  $\lambda$ -anneau telle que :*

- $\lambda^k(iq^n) = \binom{i}{k}q^{nk}$  pour tous les entiers  $n, k$ , et  $i \geq 0$  ;
- les applications  $\lambda^k$  sont continues pour la topologie  $q$ -adique ;
- les opérations d'Adams sont données par  $\psi^n(f(q)) = f(q^n)$ .

Considérons maintenant le sous-anneau de  $\mathbf{Z}[[q]]$  constitué par les séries formelles  $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$  telles que :

- $a_n = 0$  dès que  $\alpha(n)$  est supérieur à une constante ;
- $a_n = a_{2n}$  dès que  $n$  est divisible par une puissance de 2 assez grande, puissance ne dépendant que de la série considérée.

**Le plus petit entier  $d$  tel que  $\alpha(n) > d$  implique que  $a_n = 0$  sera appelé le degré de la série.**

C'est un sous- $\lambda$ -anneau de  $\mathbf{Z}[[q]]$ , on le notera  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$ .

La série de Poincaré d'un module instable réduit de type fini est dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$ . La première propriété résulte de 2.5, pour ce qui est de la seconde seule l'existence d'une puissance de 2, soit  $2^h$ , universelle telle que si  $2^h | n$   $a_n = a_{2n}$  mérite des détails. Ceci est vrai car si  $M$  est un module instable de type fini réduit de  $\mathcal{N}il$ -localisation  $L$  il existe un entier  $k$  tel que  $\mathrm{Sq}_0^k L \subset M \subset L$ . Ce résultat se déduit de [Sc1] (chapitre 6) et [Sc2].

L'application

$$\Gamma : \mathcal{P}_{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui à une série formelle  $f = \sum a_n q^n$  associe la fonction  $\Gamma(f) \in \mathcal{C}$  définie par  $\Gamma(f)(i) = a_{i2^h}$ , où  $h$  est assez grand, est un homomorphisme d'anneau.

**Proposition 4.2** *Le noyau de l'homomorphisme  $\Gamma$  est un  $\lambda$ -idéal.*

Le noyau est constitué par les séries formelles  $f \in \mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$  dont les coefficients  $a_n$  sont nuls dès que  $n$  est divisible par une puissance de 2 assez grande, ne dépendant que de  $f$  car on est dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$ . Cette condition est préservée par application des opérations d'Adams, et donc par les opérations  $\lambda^i$ .

Le noyau de l'homomorphisme  $\Gamma$  étant un  $\lambda$ -idéal il y a une structure de  $\lambda$ -anneau sur le quotient. Cette structure est la restriction d'une sur  $\mathcal{C} \otimes \mathbf{Q}$ . Les opérations d'Adams étant données par les formules suivantes :

1.  $\psi^2 = \mathrm{Id}$  ;
2. si  $k$  est impair  $\psi^k(\varphi)(i) = \varphi(\frac{i}{k})$  si  $\frac{i}{k} \in \mathbf{N}$  ;

3.  $\psi^k(\varphi)(i) = 0$  si  $\frac{i}{k} \notin \mathbf{N}$ .

Elles vérifient les conditions requises pour que  $\mathcal{C}$  soit un  $\lambda$ -anneau.

**Proposition 4.3** *L'image de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  dans  $\mathcal{C}$  est contenue dans l'image de l'homomorphisme  $\Gamma$ ,  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  est un  $\lambda$ -anneau.*

La première partie est une vérification de routine et résulte des rappels de la section 2. Pour la seconde partie il suffit d'observer que l'image de  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  est stable sous les opérations  $\lambda^i$ . Or, pour tout module instable  $M$  on a la relation suivante :

$$\gamma_{\Lambda^i(M)} = \lambda^i(\gamma_M) \quad .$$

En effet si  $p_M$  désigne la série de Poincaré d'un espace vectoriel gradué  $M$  on a

$$p_{\Lambda^i(M)} = \lambda^i(p_M) \quad .$$

Prenant pour  $M$  un module instable de type fini, puis appliquant de  $\Gamma$  on obtient la formule précédente. La formule s'étend aux classes dans  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ .

Ceci justifie la définition des  $X_k$ , car  $X_1 = [F(1)]$ , et par application de 3.9 et la définition des opérations d'Adams :

**Proposition 4.4** *On a la formule suivante :*

$$X_k = \psi^k([F(1)]) \quad .$$

Ceci permet aussi de faire le lien avec le point de vue de Kuhn on notera que son résultat, si on étend les scalaires au corps des rationnels, s'exprime en disant que

$$G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \cong \mathbf{Q}[\psi^1, \dots, \psi^{2k+1}, \dots] \quad .$$

On va maintenant considérer le cas de  $G_0(\mathcal{U})$  et commencer la démonstration du théorème 1.1. On commence par introduire une terminologie liée à la filtration nilpotente d'un module instable  $M$  de type fini.

Puisque  $M$  est de type fini, et comme la catégorie  $\mathcal{U}$  est localement noethérienne, chacun des sous-quotients désuspendus  $R_i(M)$ ,  $0 \leq i \leq k$ , définis par la filtration nilpotente est de type fini.

**Définition 4.5** *L'entier  $d = \max_{i=0, \dots, k} d_i$ , où  $R_i(M) \in \mathcal{V}_{d_i}$  et  $R_i(M) \notin \mathcal{V}_{d_i-1}$ , est appelé le poids de  $M$ .*

Soit le sous-anneau  $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}[[q]]$  constitué par les séries formelles  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$  de la forme

$$\sum_{0 \leq i \leq k} q^i f_i(q)$$

où  $f_i(q)$  est une série dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$ .

Ces séries vérifient en particulier :

il existe  $k$  et  $\delta$  tels que :

- dès que  $\alpha(n) > \delta$  et  $i > k$  le coefficient  $a_{n+i}$ , est nul ;
- dès que  $n$  est divisible par une puissance de 2 assez grande, puissance ne dépendant que de la série  $f$ , le coefficient  $a_{n+i}$  est égal à  $a_{2n+i}$  ( $i$  quelconque) ;

**Définition 4.6** Si  $f_k(q) \neq 0$   $k$  est appelé la profondeur de la série.

Considérons une série  $f$  vérifiant les hypothèses ci-dessus.

**Définition 4.7** Soit  $i$  un entier donné et soit  $d_i$  le degré de la série  $f_i$  comme défini en 4.1. L'entier  $d = \max_{i=0, \dots, k} d_i$  sera appelé le degré de la série  $f$ .

Soit  $M$  un module instable de type fini, de filtration nilpotente :

$$\{0\} = M_{h+1} \subset M_h \subset M_{h-1} \subset \dots \subset M_0 = M$$

avec  $M_i/M_{i+1} \cong \Sigma^i R_i$ ,  $R_i$  réduit. On a :

$$p_M(q) = \sum_{i=0, \dots, k} q^i p_{R_i}(q) \quad .$$

Cette série est dans  $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ . Le sous-anneau  $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}[[q]]$  est stable par les opérations  $\lambda^i$ .

**Théorème 4.8** L'application qui à un module instable de type fini  $M$  associe sa série de Poincaré  $p_M$  détermine un isomorphisme d'anneaux de  $G_0(\mathcal{U})$  sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ . Si  $M$  est un module instable de type fini de profondeur  $k$  et de degré  $\ell$  la série associée a même profondeur et même degré total.

On commence par montrer que l'application est injective. Une classe  $X$  dans  $G_0(\mathcal{U})$  s'écrit -ainsi qu'il a été dit dans les sections 2 et 3- sous la forme

$$\sum_{i=0, \dots, k} \sigma^i([R_i] - [R'_i])$$

où  $R_i$  et  $R'_i$  sont des modules instables réduits. Si la série de Poincaré  $p_X$  de  $X$  est nulle il en est de même de  $\gamma_X = \Gamma(p_X)$ , or  $\gamma_X = \gamma_{R_0} - \gamma_{R'_0}$ . Si cette dernière quantité est nulle cela implique que  $[R_0] - [R'_0]$  est nul dans  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  d'après 3.9.

Autrement dit  $Y = [R_0] - [R'_0]$  appartient à l'idéal  $(\sigma) \subset G_0(\mathcal{U})$ .

La classe  $Y$  s'écrit donc sous la forme  $\sum_{1 \leq i \leq t} \sigma^i H_i$ ,  $H_i = [S_i] - [S'_i]$ , il se peut que  $t > k$ . On ne peut conclure par une récurrence descendante sur  $k$ , on en fait une, mais sur le poids des  $[R_i]$  et  $[R'_i]$ , le lemme suivant le permet.

**Lemme 4.9** Si  $R$  et  $R'$  sont des modules instables réduits de type fini tels que  $[R] - [R'] \in G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ , alors  $[R] - [R'] \in G$  peut s'écrire  $\sum_{1 \leq i \leq t} \sigma^i H_i$ , avec  $H_i = [S_i] - [S'_i]$  et les  $[S_i]$  et  $[S'_i]$  sont des modules instables réduits de type fini de poids strictement inférieur à celui de  $[R]$  et  $[R']$ .

Il faut démontrer que l'on peut supposer le degré des  $[S_i]$  et  $[S'_i]$  strictement inférieur à celui de  $[R]$ .

En effet si  $R \cong R'$  dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ ,  $R$  et  $R'$  réduits de type fini,  $R$  et  $R'$  contiennent tous les deux un sous-module isomorphe à un module  $T$ , que l'on notera aussi  $T$  par abus dans les deux cas, tel que  $R \cong R' \cong T$  dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . Ceci se démontre en plongeant  $R$  et  $R'$  dans leur  $\mathcal{N}il$ -localisation commune [Sc1]  $L$  puis en observant que  $Sq_0^k L$  est contenu dans  $R$  et  $R'$  pour  $k$  assez grand (voir [Sc1] chapitre 6 et [Sc2]).

Cet argument permet de se ramener au cas d'un module réduit de type fini  $R$  et d'un sous-module  $T$  tels que le quotient  $R/T$  soit nilpotent à cette fin on écrit  $[R] - [R'] = [R] - [T] + [T] - [R']$ .

Si le poids de  $R$ , et donc celui de  $T$  est  $d$  et comme les séries de Poincaré de  $R$  et  $T$  coïncident dans les degrés divisibles par une puissance de 2 assez grande cela veut dire que la série de Poincaré de  $R/T$  est nulle dans les degrés  $2^h n$  tels que  $\alpha(n) \leq d$  et  $h$  assez grand (indépendamment de  $n$ ). Dans  $G_0(\mathcal{U})$  la classe de  $R/T$  s'écrit  $\sum_{i=1, \dots} \sigma^i [T_i]$ ,  $T_i$  module instable réduit. La série de Poincaré des  $T_i$  est nulle dans les degrés  $n$  tels que  $\alpha(n) \geq d$ , sinon il ne pourrait en être ainsi pour la série de Poincaré de  $R/T$ . En effet la série de Poincaré de  $R/T$  s'écrit  $f = \sum_i q^i p_{T_i}(q)$ , tous les coefficients sont positifs. Si l'une des séries  $p_{T_i}$  est de degré supérieur ou égal à  $d$  cela veut dire qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\alpha(n) \geq d$  et tous les coefficients de  $p_{T_i}$  en degré  $2^h n$  sont non nuls dès que  $h$  est assez grand. Mais alors le coefficient de  $q^i p_{T_i}$ , et donc celui de  $f$ , est non nul en degré  $i + 2^h n$ , or pour  $h$  assez grand  $\alpha(i + 2^h n) > \alpha(n) \geq d$ .

Il résulte alors de la définition des catégories  $\mathcal{V}_n$  que le module instable module  $T_i$ ) est de poids strictement inférieur à  $d$ , ce qui permet d'effectuer la récurrence descendante.

Ceci démontre l'injectivité.

Pour ce qui est de la surjectivité, clairement il suffit de montrer que toute série dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$  est dans l'image. Mais si  $f = \sum_i a_i q^i$  est une telle série, il résulte de la prochaine section que l'on peut trouver une série  $\bar{f} = \sum_i \bar{a}_i q^i$  où  $\bar{a}_i = a_i$  pour tout  $i$  divisible par une puissance de 2 assez grande ne dépendant que de  $f$  telle que  $\bar{f}$  soit la série de Poincaré d'un élément  $[R] - [S]$  dans  $G_0(\mathcal{U})$   $R$  et  $S$  réduits. La série  $f - \bar{f}$  (qui est dans  $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ ) est de degré strictement inférieur à celui de  $f$  et on peut procéder par récurrence descendante.

## 5 La structure d'algèbre de $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ .

### 5.1 L'algèbre $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$

Dans cette section on va décrire  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ , sans faire de tensorisation par  $\mathbf{Q}$ . En particulier on obtiendra le résultat qui permet d'achever la démonstration de 1.1 commencée dans la section précédente.

On introduit une sous-algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}} \subset \mathcal{C}$  déterminée par les conditions données dans l'introduction. Rappelons les : Soit  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_t)$  une famille d'entiers impairs, rangée en ordre croissant, ou la famille constituée par 0. L'entier  $t$  est appelé la longueur de  $\mathbf{k}$  et est

noté  $\ell(\mathbf{k})$ , l'entier  $\sum_i \alpha(k_i)$  est appelé la longueur 2-adique de  $\mathbf{k}$  et noté  $\alpha(\mathbf{k})$ .

On notera  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  l'ensemble des entiers de la forme  $\sum_i k_i 2^{u_i}$ , les  $u_i$  étant des entiers quelconques.

L'algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  est l'ensemble des fonctions  $\gamma$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{Z}$  telles que :

1.  $\gamma(2i) = \gamma(i)$  pour tout  $i$  ;
2.  $\gamma(i) = 0$  dès que  $\alpha(i)$  est assez grand ;
3. pour tout  $\mathbf{k}$  la fonction  $\gamma$  est constante sur  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ , sauf éventuellement sur l'intersection avec  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  d'une réunion finie de  $\mathbf{V}_{\mathbf{l}}$ , où soit  $\alpha(\mathbf{l}) < \alpha(\mathbf{k})$ , soit  $\alpha(\mathbf{l}) = \alpha(\mathbf{k})$  et  $\ell(\mathbf{l}) < \ell(\mathbf{k})$ .

L'intersection ci-dessus sera appelée le sous-ensemble critique de  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  pour la fonction  $\gamma$ . La condition ci-dessus équivaut à dire que la valeur de la fonction  $\gamma$  sur l'entier  $\sum_i k_i 2^{u_i}$  ne dépend pas des  $u_i$  dès que  $\min_{i \neq j} |u_i - u_j|$  est assez grand. On notera cette valeur  $\tilde{\gamma}(k_1, \dots, k_t)$ . On l'appellera aussi la valeur de la fonction sur  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ . On dira que la fonction ne prend pas la valeur nulle sur  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  si cette valeur est non nulle.

Evidemment c'est la troisième condition qui est nouvelle. La seconde condition permet comme plus haut de définir, pour  $\varphi, \psi \in \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ , un produit de convolution par :

$$\varphi * \psi(i) = \sum_{l+k=2^h i} \varphi(l)\psi(k) \quad .$$

Il faut cependant démontrer la :

**Proposition 5.1** *Si  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  alors  $\varphi * \psi \in \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ .*

Pour démontrer cette proposition on doit calculer pour une famille d'entiers impairs  $\mathbf{k}$  la quantité  $(\varphi * \psi)(\sum_i k_i 2^{u_i})$ . Par des arguments analogues à ceux de la section 3.3, en utilisant (entre autres) le fait que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont nulles sur les entiers  $n$  dès que  $\alpha(n)$  est assez grand, on obtient l'énoncé suivant :

**Proposition 5.2** *Si la quantité  $\min_{i \neq j} |u_i - u_j|$  est assez grande on a la formule :*

$$(\varphi * \psi)\left(\sum_i k_i 2^{u_i}\right) = \sum_{\{a_1, \dots, a_t; b_1, \dots, b_t\}} \varphi\left(\sum_i a_i\right) \psi\left(\sum_i b_i\right) \quad .$$

*La somme de droite est prise sur toutes les familles  $\{a_1, \dots, a_t; b_1, \dots, b_t\}$  satisfaisant à  $a_i + b_i = 2^h (k_i 2^{u_i})$ ,  $h$  grand, pour tout  $i$ , seuls un nombre fini de termes de la somme sont non nuls.*

Précisons l'inégalité contenue implicitement dans cette proposition. On pose  $c = \min_{i \neq j} |u_i - u_j|$ ,  $\kappa = \max(\log_2(k_i))$ . Enfin on suppose que  $\psi(n) = 0$ , et  $\varphi(n) = 0$  si  $\alpha(n) \geq d$ . La proposition a alors lieu dès que  $c - \kappa > 2d + 1$ .

La proposition 5.1 en résulte aisément, on y revient plus loin.

On ne détaillera pas la preuve de 5.2, mais il y a dans les lemmes qui suivent les indications essentielles, elles sont d'ailleurs également utiles pour passer de 5.2 à 5.1.

On suppose les  $u_i$  rangés en ordre croissant. La condition  $c - \kappa > 0$  montre que les  $k_i 2^{u_i}$  sont aussi rangés en ordre croissant.

L'observation clé dans la démonstration de cette proposition est que, si on écrit  $2^h(\sum_i k_i 2^i) = a + b$ ,  $h$  grand, et que  $\varphi(a) \neq 0$  et  $\psi(b) \neq 0$ , les développements 2-adiques de  $a$  et  $b$  ne peuvent faire apparaître de puissance de 2 ayant un exposant appartenant aux intervalles  $[h + u_i + \kappa, h + u_{i+1} - 2d - 1]$ , ces intervalles sont non vides pour tout  $i$  sous la condition  $c - \kappa > 2d + 1$ .

Cette assertion résulte de ce que si une puissance de 2 du développement de  $a$  ou  $b$  avait un exposant dans un intervalle  $[h + u_i + \kappa, h + u_{i+1} - 2d - 1]$  le développement 2-adique de  $a$  ou  $b$  serait de longueur strictement supérieur à  $d$ .

Il en résulte facilement que  $a$  s'écrit  $\sum a_i$  et  $b$  s'écrit  $\sum_i b_i$ , vérifiant  $a_i + b_i = k_i 2^{u_i+h}$ .

**Lemme 5.3** *Sous les hypothèses de 5.2 et si le terme  $\varphi(\sum_i a_i)\psi(\sum_i b_i)$  est non nul on a  $a_i = 2^{v_i}\alpha_i$ ,  $\alpha_i$  impair ou nul, et  $b_i = 2^{w_i}\beta_i$ ,  $\beta_i$  impair ou nul, avec  $\max(|u_i - v_i|, |u_i - w_i|) < \max\{2d, \kappa\}$ .*

Les équations qui déterminent les  $a_i$  et les  $b_i$  n'ont qu'un nombre fini de solutions pour lesquelles  $\varphi(\sum_i a_i)$  et  $\psi(\sum_i b_i)$  sont non nulles. Ceci car  $\varphi$  et  $\psi$  s'annulent sur les entiers  $n$  dès que  $\alpha(n) \geq d$ .

Donc :

**Lemme 5.4** *Sous les hypothèses de 5.3 les familles d'entiers  $\{\alpha_i, \beta_i\}$  déterminées par les familles de solutions  $\{a_i; b_i\}$  ne dépendent pas du choix des entiers  $u_i$ , mais seulement de  $\mathbf{k}$ , de  $\varphi$  et  $\psi$ . Si de plus l'entier  $\sum_i 2^{v_i}\alpha_i$  (resp.  $\sum_i 2^{w_i}\beta_i$ ) n'appartient pas au sous-ensemble critique de  $V_\alpha$  pour  $\phi$  (resp. de  $V_\beta$  pour  $\psi$ ) on a :*

$$(\varphi * \psi)\left(\sum_i k_i 2^{u_i}\right) = \sum_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_t; \beta_1, \dots, \beta_t\}} \tilde{\varphi}(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \tilde{\psi}(\beta_1, \dots, \beta_t) \quad .$$

La condition de la seconde partie du lemme est réalisée dès que  $\min_{i \neq j} |u_i - u_j|$  est assez grand.

Le lemme suivant n'est pas nécessaire à la suite, il est néanmoins utile de le mentionner :

**Lemme 5.5** *Soient  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{h}$  deux familles d'entiers impairs. Alors l'intersection  $\mathbf{V}_\mathbf{k} \cap \mathbf{V}_\mathbf{h}$  est réunion finie d'ensembles  $\mathbf{V}_\mathbf{u}$  avec  $\mathbf{u}$  de longueur 2-adique inférieure ou égale à  $\inf(\alpha(\mathbf{k}), \alpha(\mathbf{h}))$ .*

Il convient de préciser le sens de la phrase "est réunion finie d'ensembles  $\mathbf{V}_\mathbf{u}$ " dans ce contexte cela veut dire que pour un entier  $\ell$  assez grand :

$$2^\ell(\cup_{i=1, \dots, k} \mathbf{V}_{\mathbf{u}_i}) \subset \mathbf{V}_\mathbf{k} \cap \mathbf{V}_\mathbf{h} \subset \cup_{i=1, \dots, k} \mathbf{V}_{\mathbf{u}_i} \quad .$$

La démonstration du lemme est basée sur 3.18. Supposons par exemple que  $\ell(\mathbf{k}) \geq \ell(\mathbf{h})$ . Si on a une égalité  $\sum_i k_i 2^{u_i} = \sum_j h_j 2^{v_j}$  et que l'on est dans les conditions d'application de 3.18, essentiellement que  $\min_{i \neq j} |u_i - u_j|$  soit assez grand, les familles  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{h}$  coïncident. Si

on exclut ce cas pour que l'égalité ait lieu il faut par conséquent que l'une, au moins, des quantités  $|u_i - u_j|$  soit inférieure à une constante donnée. Autrement dit on est ramené à étudier l'intersection de  $\mathbf{V}_{\mathbf{h}}$  avec une famille finie de  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}_i}$  avec  $\ell(\mathbf{k}_i) = \ell(\mathbf{k}) - 1$ . On conclut par une récurrence descendante.

L'exemple de  $\mathbf{V}_{(1,1)} \cap \mathbf{V}_{(1,3)}$  et  $\mathbf{V}_{(1)}$  et  $\mathbf{V}_{(5)}$  montre qu'il ne peut y avoir égalité.

## 5.2 La structure d'algèbre de $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$ .

On va démontrer le :

**Théorème 5.6** *L'algèbre  $G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  est isomorphe à l'algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ .*

La démonstration est pour l'essentiel une collecte de résultats démontrés plus haut. D'abord l'application canonique :

$$\gamma : G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il) \longrightarrow \mathcal{C}$$

prend valeurs dans  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  car les fonctions  $\chi_k$  appartiennent à  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ , l'algèbre qu'elles engendrent est dans  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  d'après 5.1.

Or les fonctions  $\gamma_X$ ,  $X \in \mathcal{U}/\mathcal{N}il$  prennent des valeurs entières, et quitte à les multiplier par une constante sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de monômes en les  $\chi_k$  d'après le théorème 3.15.

La première partie du résultat suit.

L'application est injective, cela a été démontré dans la section 3.

Il reste à montrer qu'elle est surjective, il y a là encore un travail à faire, et c'est à cet effet que l'on utilise la structure de  $\lambda$ -anneau.

On considère une fonction  $\tau \in \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  et on veut montrer qu'elle est dans l'image de  $\gamma$ . On introduit une filtration double sur  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  en associant à  $\tau$  deux entiers.

D'abord à  $\tau$  on associe le plus grand entier  $h$  tel qu'il existe un ensemble  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$  tels que  $\alpha(\mathbf{k}) = h$  et sur lequel  $\gamma$  est non nulle. On rappelle que cela veut dire que la valeur de la fonction est non nulle en dehors d'un sous-ensemble critique  $C$ .

Pour définir le second entier on considère la famille des ensembles  $V_{\mathbf{u}}$  ayant cette propriété. La famille peut contenir  $\mathbf{V}_{\delta_h}$ , où  $\delta_h$  désigne  $(1, \dots, 1)$ , c'est-à-dire que la fonction est non nulle sur  $\mathbf{V}_{\delta_h}$ , le second indice de filtration est alors  $h$ .

Sinon la fonction est nulle sur  $\mathbf{V}_{\delta_h}$ , c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble  $C$  qui est réunion d'ensembles  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$ . Le second indice de filtration est alors défini comme étant la longueur maximale  $t$  d'un ensemble  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$  apparaissant dans la description de  $C$  comme réunion et tel que  $\alpha(\mathbf{u}) = h$ , on a  $t < h$ . La valeur de  $t$  à priori dépend de la décomposition explicite, il est possible de donner une définition univoque mais dans la suite on pourra se contenter de la présente définition.

On notera ce couple  $(h, t)$ ,  $t \leq h$ .

On passe à la démonstration du théorème 5.6. La remarque suivante sera utile plus bas :

**Remarque 5.7** *Supposons que  $\mathbf{V}_{\mathbf{h}}$  soit strictement inclus dans  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ , alors  $\ell(\mathbf{h}) < \ell(\mathbf{k})$ .*

Dans cet énoncé "strictement inclus" signifie qu'il existe  $\ell$  tel que  $2^\ell \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}_k$ , mais qu'il n'existe pas d'entier pour lequel l'inclusion inverse ait lieu.

Soit  $\tau$  d'indice de filtration  $(h, t)$ . On va construire un objet dans  $X \in G_0(\mathcal{U}/\mathcal{N}il)$  tel que  $\tau - \gamma_X$  soit d'indice de filtration au plus  $(h, t - 1)$  si  $t > 1$ , et  $(h - 1, h - 1)$  si  $t = 1$ . Une telle construction démontre 5.6.

L'ensemble critique  $C$  est réunion de  $\mathbf{V}_k$ , considérons seulement les indices  $\mathbf{k}_i$  tels que  $\alpha(\mathbf{k}_i) = h$ , il y en a par hypothèse. Soit donc  $\mathbf{k}$  un tel indice, supposons qu'il soit constitué de  $u_1$  fois  $a_1, \dots, u_m$  fois  $a_m$ , où les  $a_i$  sont des entiers impairs strictement croissants. Soit alors la fonction :

$$c\lambda^{u_1}(\chi_{a_1}) \dots \lambda^{u_m}(\chi_{a_m}) \quad ,$$

où  $c$  est la valeur de  $\tau$  sur  $V_k$  et les  $\lambda^k$  désignent les opérations dans le  $\lambda$ -anneau des fonctions.

Soit alors l'objet virtuel

$$X_{\mathbf{k}} = \Lambda^{u_1}(X_{a_1}) \dots \Lambda^{u_m}(X_{a_m}) \quad ,$$

on a :

$$\gamma_{X_{\mathbf{k}}} = \lambda^{u_1}(\chi_{a_1}) \dots \lambda^{u_m}(\chi_{a_m}) \quad .$$

On introduit des objets virtuels  $X_{\mathbf{k}_i}$  et des constantes  $c_i$  pour chaque  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}_i}$ .

L'énoncé suivant est alors conséquence directe de la construction ci-dessus et de la remarque ci-dessus :

**Lemme 5.8** *Soit  $(h, t)$  le couple associé à la fonction  $\tau$ . Le couple  $(h', t')$  associé à la fonction  $\tau - \sum_i c_i \gamma_{X_{\mathbf{k}_i}}$  vérifie  $h' < h$  ou  $h = h'$  et  $t' < t$ .*

Ce lemme permet évidemment de conclure par une démonstration par récurrence.

Ce théorème complète et d'achever la démonstration de 4.8 en assurant l'existence de la série  $\tilde{f}$ .

On peut munir l'algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ , et donc  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$  d'une structure d'algèbre de Hopf. Les éléments  $\chi_k$  soient primitifs pour cette structure, mais il y a une manière naturelle de procéder qui est expliquée ci-dessous.

Pour  $\varphi \in \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$  on définit une fonction  $\Delta\varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$  par la formule suivante :

$$\Delta\varphi(u, v) = \varphi(u + 2^h v)$$

pour  $h$  grand. Cette quantité est bien définie par hypothèse sur  $\varphi$ . Il n'est pas clair que  $\Delta\varphi \in \mathcal{I}_{\mathbf{Z}} \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}$ , ceci est laissé au lecteur. La compatibilité à la multiplication est elle facile à démontrer.

On notera aussi en corollaire :

**Corollaire 5.9** *L'algèbre  $\mathcal{I}_{\mathbf{Z}} \subset \mathcal{C}$  s'identifie à l'ensemble des  $f \in \mathcal{C}$  tels qu'il existe un entier  $n$  pour lequel  $nf \in \mathcal{I}$ .*

- [FS] V. Franjou & L. Schwartz, *Reduced unstable  $\mathcal{A}$ -modules and the modular representation theory of the symmetric groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 23 (1990), 593-624.
- [Ga] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323-348.
- [HLS] H.-W. Henn & J. Lannes & L. Schwartz, *The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. (1993), Vol 115, Number 5, 1053-1106.
- [K] N. Kuhn *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Ann. of Math. 141, (1995) 321-347.
- [K1] N. Kuhn *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra*, Am. Journal of Math. 116 (1993), 327-360.
- [K2] N. Kuhn, *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra II* K-Theory 8 (1994) 395-426.
- [Kn] D. Knutson,  *$\lambda$ -rings and the representation theory of the symmetric groups*, Springer LNM 308.
- [Sc1] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series 1994.
- [Sc2] L. Schwartz, *La filtration de Krull de la catégorie des modules instables et la cohomologie des espaces.*, **A. G. T. 1** (2001) 519-548.
- [Se] J.-P. Serre *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann.
- [SE] N.E. Steenrod & D.B.A. Epstein, *Cohomology operations*, Annals of Math. Studies 50, Princeton Univ. Press, 1962.

Lionel Schwartz, Université Paris-Nord, Institut Galilée, LAGA, UMR 7539 du CNRS,  
 Av. J.-B. Clément, 93430, Villetaneuse, France  
 email :schwartz@math.univ-paris13.fr