LE THÉORÈME DE QUILLEN, D'ADJONCTION DES FONCTEURS DÉRIVÉS, REVISITÉ

par

Georges MALTSINIOTIS

Résumé. — Le but de cet article est de donner une preuve originale très facile, voire purement formelle, du théorème d'adjonction des foncteurs dérivés, dû à Quillen [**8**], ainsi que de ses variantes et généralisations plus récentes [**3**], [**9**]. Pour cela, on démontre un résultat, encore plus général, d'adjonction des foncteurs dérivés ´ absolus ˇ. En contraste avec toutes les preuves connues, la démonstration de ce théorème est indépendante de la construction explicite des foncteurs dérivés.

Abstract. — The aim of this paper is to present a very simple original, purely formal, proof of Quillen's adjunction theorem for derived functors [**8**], and of some more recent variations and generalizations of this theorem [**3**], [**9**]. This is obtained by proving an abstract adjunction theorem for "absolute" derived functors. In contrast with all known proofs, the explicit construction of the derived functors is not used.

On rappelle que pour toute catégorie $\mathcal{C}$, et toute classe de flèches W de $\mathcal{C}$, il existe, modulo des difficultés ensemblistes, une catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$, appelée *localisation de* $\mathcal{C}$ *par* W, et un foncteur $P : \mathcal{C} \longrightarrow W^{-1}\mathcal{C}$, appelé *foncteur de localisation*, transformant toute flèche de $\mathcal{C}$ appartenant à W en un isomorphisme de $W^{-1}\mathcal{C}$, et universel pour cette propriété : pour toute catégorie $\mathcal{D}$, et tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que $F(W)$ soit contenu dans la classe des isomorphismes de $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que $F = \widetilde{F}P$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] & \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

La catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ est obtenue de $\mathcal{C}$ en inversant formellement les flèches appartenant à W ; elle a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, les morphismes étant des classes d'équivalence de ´ zigzag composables ˇ de morphismes de $\mathcal{C}$, les flèches allant dans le ´ mauvais sens ˇ appartenant à W (voir [**4**]). La catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ peut ne pas être *localement*

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18A40, 18E35, 18G10, 18G55, 55P60, 55U35.

petite, autrement dit, la *classe* des flèches d'un objet vers un autre n'est pas en général un *ensemble*. Ce problème peut être contourné en utilisant la théorie des univers de Grothendieck [**1**]. Dans cet article, pour simplifier, on pose la définition suivante.

Définition. — Un *localisateur* est un couple formé d'une catégorie $\mathcal{C}$, et d'une classe W de flèches de $\mathcal{C}$ telles que la catégorie localisée $W^{-1}\mathcal{C}$ soit localement petite.

Exemples. — Si $\mathcal{C}$ est une *petite* catégorie, pour tout ensemble de flèches W de $\mathcal{C}$, le couple $(\mathcal{C}, W)$ est un localisateur. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles au sens de Quillen, et W la classe des équivalences faibles de C, alors $(\mathcal{C}, W)$ est un localisateur [**8**, Ch. I, 1.13, Th. 1′].

Soient $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ le foncteur canonique de localisation, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On rappelle qu'un *foncteur dérivé à droite* de F est un couple $(\mathsf{R}F, \alpha)$, où $\mathsf{R}F : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur, et $\alpha : F \to \mathsf{R}F \circ P$ un morphisme de foncteurs,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[drr, "F"] & & \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathsf{R}F"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\alpha" near start] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour tout foncteur $G : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et tout morphisme de foncteurs $\gamma : F \to G \circ P$, il existe un unique morphisme de foncteurs $\delta : \mathsf{R}F \to G$ tel que $\gamma = (\delta \star P)\,\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
\mathsf{R}F \circ P \arrow[r, "\delta \star P"'] & G \circ P
\end{tikzcd}$$

Cela signifie exactement que le foncteur $\mathsf{R}F$ (muni du morphisme de foncteurs α) est une extension de Kan *à gauche* de F, le long du foncteur de localisation P. On dit que le couple $(\mathsf{R}F, \alpha)$ est un foncteur dérivé à droite *absolu* de F si pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le couple $(H \circ \mathsf{R}F, H \star \alpha)$ est un foncteur dérivé à droite de $H \circ F$. Un foncteur dérivé à droite absolu de F est en particulier un foncteur dérivé à droite de F (prendre $H = 1_{\mathcal{D}}$).

Exemple. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles au sens de Quillen, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur transformant les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes de $\mathcal{D}$. Alors F admet un foncteur dérivé à droite *absolu* $(\mathsf{R}F, \alpha)$. En effet, en vertu de [**8**, Ch. I, 4.2, Prop. 1], F admet un foncteur dérivé à droite $(\mathsf{R}F, \alpha)$ construit comme suit. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on choisit une résolution fibrante $i_X : X \to X'$, et alors $\mathsf{R}F(X) = F(X')$ et $\alpha_X = F(i_X) : F(X) \to F(X') = \mathsf{R}F(X)$. Comme pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le foncteur composé $H \circ F$ transforme les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$, la même construction fournit un foncteur dérivé à droite du composé $H \circ F$ qui n'est autre que $(H \circ \mathsf{R}F, H \star \alpha)$, ce qui prouve l'assertion.

Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux localisateurs, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ et $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ les foncteurs de localisation, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. Un *foncteur dérivé total à droite* (resp. *foncteur dérivé total à droite absolu*) de F est un couple $(\underline{\mathsf{R}}F, \alpha)$, formé d'un foncteur $\underline{\mathsf{R}}F : W^{-1}\mathcal{C} \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ et d'un morphisme de foncteurs $\alpha : P' \circ F \to \underline{\mathsf{R}}F \circ P$, qui est un foncteur dérivé à droite (resp. un foncteur dérivé à droite absolu) de $P' \circ F$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow\alpha"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

Exemple. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de modèles au sens de Quillen, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur transformant les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en équivalences faibles de $\mathcal{C}'$. Alors F admet un foncteur dérivé total à droite *absolu*. En effet, si P' désigne le foncteur de localisation de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles, le foncteur $P' \circ F$ transforme les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes, et l'assertion est un cas particulier de l'exemple précédent.

Les notions de *foncteur dérivé à gauche*, de *foncteur dérivé à gauche absolu*, de *foncteur dérivé total à gauche*, et de *foncteur dérivé total à gauche absolu* se définissent de façon duale.

Théorème. — *Soient* $(\mathcal{C}, W)$ *et* $(\mathcal{C}', W')$ *deux localisateurs,* $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ *et* $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ *les foncteurs de localisation,*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \quad , \qquad G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

un couple de foncteurs adjoints, et

$$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$$

les morphismes d'adjonction. On suppose que le foncteur F (resp. G) *admet un foncteur dérivé total à gauche* (resp. *à droite*) *absolu* $(\underline{\mathsf{L}}F, \alpha)$ (resp. $(\underline{\mathsf{R}}G, \beta)$).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\not\Uparrow"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{L}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "P'"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[d, "P"] \\ W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}G"'] & W^{-1}\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Alors les foncteurs

$$\underline{\mathsf{L}}F : W^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow W'^{-1}\mathcal{C}' \quad , \qquad \underline{\mathsf{R}}G : W'^{-1}\mathcal{C}' \longrightarrow W^{-1}\mathcal{C}$$

forment un couple de foncteurs adjoints, et on peut choisir les morphismes d'adjonction

$$\underline{\varepsilon} : \underline{L}F \circ \underline{R}G \longrightarrow 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \quad , \qquad \underline{\eta} : 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{R}G \circ \underline{L}F$$

de sorte que les deux carrés suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\underline{L}F \circ P \circ G \arrow[r, "\underline{L}F \star \beta"] \arrow[d, "\alpha \star G"'] & \underline{L}F \circ \underline{R}G \circ P' \arrow[d, "\underline{\varepsilon} \star P'"] \\
P' \circ F \circ G \arrow[r, "P' \star \varepsilon"'] & P'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{R}G \circ P' \circ F & \underline{R}G \circ \underline{L}F \circ P \arrow[l, "\underline{R}G \star \alpha"'] \\
P \circ G \circ F \arrow[u, "\beta \star F"] & P \arrow[l, "P \star \eta"] \arrow[u, "\underline{\eta} \star P"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Comme $(\underline{R}G, \beta)$ (resp. $(\underline{L}F, \alpha)$) est un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) absolu de G (resp. de F), autrement dit un foncteur dérivé à droite (resp. à gauche) absolu de $P \circ G$ (resp. de $P' \circ F$), le couple $(\underline{L}F \circ \underline{R}G, \underline{L}F \star \beta)$ (resp. $(\underline{R}G \circ \underline{L}F, \underline{R}G \star \alpha)$) est un foncteur dérivé à droite (resp. à gauche) de $\underline{L}F \circ P \circ G$ (resp. de $\underline{R}G \circ P' \circ F$). La propriété universelle de ce foncteur affirme que pour tout foncteur $H' : W'^{-1}\mathcal{C}' \longrightarrow W'^{-1}\mathcal{C}'$ (resp. $H : W^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow W^{-1}\mathcal{C}$) et tout morphisme de foncteurs $\gamma' : \underline{L}F \circ P \circ G \longrightarrow H' \circ P'$ (resp. $\gamma : H \circ P \longrightarrow \underline{R}G \circ P' \circ F$), il existe un morphisme de foncteurs unique

$$\delta' : \underline{L}F \circ \underline{R}G \longrightarrow H' \qquad (\text{ resp.} \quad \delta : H \longrightarrow \underline{R}G \circ \underline{L}F \ )$$

tel que

$$\gamma' = (\delta' \star P')(\underline{L}F \star \beta) \qquad (\text{ resp.} \quad \gamma = (\underline{R}G \star \alpha)(\delta \star P) \ ) \quad .$$

En appliquant cette propriété universelle au foncteur $H' = 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'}$ (resp. $H = 1_{W^{-1}\mathcal{C}}$) et au morphisme de foncteurs composé

$$\gamma' = (P' \star \varepsilon)(\alpha \star G) : \ \underline{L}F \circ P \circ G \xrightarrow{\alpha \star G} P' \circ F \circ G \xrightarrow{P' \star \varepsilon} P' = 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \circ P'$$

$$(\text{resp.} \ \ \gamma = (\beta \star F)(P \star \eta) : \ 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \circ P = \ P \xrightarrow{P \star \eta} P \circ G \circ F \xrightarrow{\beta \star F} \underline{R}G \circ P' \circ F \ \ ),$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[d, "P'"'] \arrow[drr, "\underline{L}F \circ P \circ G"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \underline{L}F \star \beta"] & & \\
W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[rr, "\underline{L}F \circ \underline{R}G"'] & & W'^{-1}\mathcal{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[d, "P'"'] \arrow[drr, "\underline{L}F \circ P \circ G"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow (P' \star \varepsilon)(\alpha \star G)"] & & \\
W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[rr, "1_{W'^{-1}\mathcal{C}'}"'] & & W'^{-1}\mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[drr, "\underline{R}G \circ P' \circ F"] \arrow[dr, phantom, "\underline{R}G \star \alpha \Nearrow"] & & \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[rr, "\underline{R}G \circ \underline{L}F"'] & & W^{-1}\mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[drr, "\underline{R}G \circ P' \circ F"] \arrow[dr, phantom, "(\beta \star F)(P \star \eta) \Nearrow"] & & \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[rr, "1_{W^{-1}\mathcal{C}}"'] & & W^{-1}\mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

on en déduit qu'il existe un morphisme de foncteurs

$$\underline{\varepsilon} : \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \longrightarrow 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \qquad (\text{resp.} \quad \underline{\eta} : 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \ \ )$$

tel que

$$(P' \star \varepsilon)(\alpha \star G) = (\underline{\varepsilon} \star P')(\underline{\mathsf{L}}F \star \beta) \qquad (\text{resp.} \quad (\beta \star F)(P \star \eta) = (\underline{\mathsf{R}}G \star \alpha)(\underline{\eta} \star P) \ \ ),$$

et que ce morphisme est unique.

Pour conclure, il reste à montrer les relations

$$(\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon})(\underline{\eta} \star \underline{\mathsf{R}}G) = 1_{\underline{\mathsf{R}}G} \qquad \text{et} \qquad (\underline{\varepsilon} \star \underline{\mathsf{L}}F)(\underline{\mathsf{L}}F \star \underline{\eta}) = 1_{\underline{\mathsf{L}}F} \quad .$$

$$\underline{\mathsf{R}}G \xrightarrow{\underline{\eta} \star \underline{\mathsf{R}}G} \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \xrightarrow{\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon}} \underline{\mathsf{R}}G$$

$$\underline{\mathsf{L}}F \xrightarrow{\underline{\mathsf{L}}F \star \underline{\eta}} \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \xrightarrow{\underline{\varepsilon} \star \underline{\mathsf{L}}F} \underline{\mathsf{L}}F$$

En vertu de la partie unicité de la propriété universelle des foncteurs dérivés, il suffit de montrer que

$$\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon})(\underline{\eta} \star \underline{\mathsf{R}}G)\big) \star P'\Big]\beta = \beta \qquad \text{et} \qquad \alpha\Big[\big((\underline{\varepsilon} \star \underline{\mathsf{L}}F)(\underline{\mathsf{L}}F \star \underline{\eta})\big) \star P\Big] = \alpha \quad .$$

Vérifions par exemple la première de ces deux égalités :

$$\begin{aligned}
&\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon})(\underline{\eta} \star \underline{\mathsf{R}}G)\big) \star P'\Big]\beta = (\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon} \star P')(\underline{\eta} \star \underline{\mathsf{R}}G \circ P')\beta = \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G \star \underline{\varepsilon} \star P')(\underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \star \beta)(\underline{\eta} \star P \circ G) = \Big[\underline{\mathsf{R}}G \star \big((\underline{\varepsilon} \star P')(\underline{\mathsf{L}}F \star \beta)\big)\Big](\underline{\eta} \star P \circ G) \\
&\quad = \Big[\underline{\mathsf{R}}G \star \big((P' \star \varepsilon)(\alpha \star G)\big)\Big](\underline{\eta} \star P \circ G) = (\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \star \varepsilon)(\underline{\mathsf{R}}G \star \alpha \star G)(\underline{\eta} \star P \circ G) \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \star \varepsilon)\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G \star \alpha)(\underline{\eta} \star P)\big) \star G\Big] = (\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \star \varepsilon)\Big[\big((\beta \star F)(P \star \eta)\big) \star G\Big] \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \star \varepsilon)(\beta \star F \circ G)(P \star \eta \star G) = \beta(P \circ G \star \varepsilon)(P \star \eta \star G) \\
&\quad = \beta\Big[\big(P \star \big((G \star \varepsilon)(\eta \star G)\big)\Big] = \beta \quad .
\end{aligned}$$

La seconde égalité se vérifie de façon duale. ☐

Corollaire. — **(Théorème d'adjonction de Quillen de foncteurs dérivés.)** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de modèles au sens de Quillen, et*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \quad , \qquad G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

un couple de foncteurs adjoints. On suppose que F (resp. G) *transforme les équivalences faibles entre objets cofibrants de $\mathcal{C}$* (resp. *entre objets fibrants de $\mathcal{C}'$*) *en équivalences faibles de $\mathcal{C}'$* (resp. *de $\mathcal{C}$*)*. Alors F* (resp. G) *admet un foncteur dérivé total à gauche $(\underline{\mathsf{L}}, \alpha)$* (resp. *à droite $(\underline{\mathsf{R}}G, \beta)$*)*, et le foncteur $\underline{\mathsf{L}}F$ est un adjoint à gauche du foncteur $\underline{\mathsf{R}}G$.*

Démonstration. — En effet, en vertu de l'exemple qui précède le théorème, ainsi que de son dual, ces foncteurs dérivés existent et sont *absolus*. Le corollaire est donc un cas particulier du théorème ci-dessus. □

Remarques. — Dans son livre [**8**], Quillen démontre son théorème d'adjonction sous les hypothèses supplémentaires que F respecte les cofibrations et G les fibrations [*loc. cit.* Ch. 1, 4.5 Th. 3], mais il résulte de ce qui précède que ces hypothèses sont superflues. Dans les livres plus récents de Hovey [**6**] et de Hirschhorn [**5**], on démontre le théorème d'adjonction de Quillen avec des hypothèses encore plus fortes en demandant que (F, G) soit une *adjonction de Quillen* entre catégories de modèles *fermées*, et de plus avec *décompositions fonctorielles*. Les variantes du théorème d'adjonction dans un cadre plus général que celui des catégories de modèles de Quillen, obtenues par Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith [**3**], ou par Radulescu-Banu [**9**], dans son texte sur les *catégories de modèles d'Anderson-Brown-Cisinski*, alias *catégories dérivables* [**2**], sont également des cas particuliers du ´ théorème d'adjonction des foncteurs dérivés absolus ˇ, démontré ci-dessus. Dans un texte en préparation avec Bruno Kahn [**7**], on appliquera ce dernier théorème pour prouver une généralisation du théorème d'adjonction de Radulescu-Banu, impliquant tous les cas connus d'adjonction de foncteurs dérivés.

Références

[1] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, Springer-Verlag, 1972.

[2] D.-C. Cisinski – ´ Catégories dérivables ˇ, Prépublication, 2002.

[3] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan & J. H. Smith – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[4] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Springer-Verlag, 1967.

[5] P. S. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 99, American Mathematical Society, 2002.

[6] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, American Mathematical Society, 1999.

[7] B. Kahn & G. Maltsiniotis – En préparation.

[8] D. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[9] A. Radulescu-Banu – ´ Cofibrations in homotopy theory ˇ, Prépublication, 2006.

Georges MALTSINIOTIS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE
E-mail : maltsin@math.jussieu.fr • *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/