Homotopieeindeutigkeit von Produkten Orthogonaler Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Helmut Morgenroth
aus Bad Harzburg

Göttingen 1996

9.12.1996

D7
Referent: **Prof. Dr. Dietrich Notbohm**
Korreferent: **Prof. Dr. Ulrich Stuhler**
Tag der mündlichen Prüfung: **30.1.97**

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine der wesentlichen Fragestellungen der algebraischen Toplogie ist die folgende: Unter welchen Voraussetzungen ist ein topologischer Raum durch seine algebraischen Invarianten - gegeben etwa durch Homologie, Kohomologie oder Homotopiegruppen - bis auf Homotopieäquivalenz charakterisiert?

Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Selbst bei gutartigen Räumen wie endlich dimensionalen 1–zusammenhängenden CW–Komplexen liefert eine Isomorphie in der integralen Kohomologie nur dann eine Homotopieäquivalenz, wenn sie von einer topologischen Abbildung induziert wird. Das Problem besteht darin, die Existenz einer solchen Abbildung nachzuweisen.

Mit der Konstruktion einer solchen Abbildung in einer speziellen Situation beschäftigen wir uns in dieser Arbeit. Wir behandeln klassifizierende Räume kompakter Liescher Gruppen. Diese große Klasse topologischer Räume ist besonders geeignet für derartige Konstruktionen, da sich die Gruppenstruktur teilweise auf den klassifizierenden Raum überträgt. Mit den derzeit zur Verfügung stehenden Techniken läßt sich diese am besten auswerten, wenn man mod–p Kohomologie, also Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/\mathrm{p}$ betrachtet. Dann liefern nämlich die klassifizierenden Räume elementar–abelscher p–Gruppen den Ausgangspunkt unserer Konstruktion: Ist V eine elementar–abelsche p–Gruppe, so stimmen (unter leichten Voraussetzungen an den Raum BX) die Homotopieklassen topologischer Abbildungen $\mathrm{BV} \to \mathrm{BX}$ mit den algebraischen Abbildungen $\mathrm{H}^*(\mathrm{BX}; \mathbb{Z}/\mathrm{p}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbb{Z}/\mathrm{p})$ überein (Lannes, [L]). Da wir mod–p Kohomologie verwenden, müssen wir die Hoffnung auf integrale Resultate aufgeben und uns auf p–vollständige Räume beschränken. Mit Vollständigkeit meinen wir stets Vollständigkeit im Sinne von Bousfield und Kan [B-K].

Wir betrachten den klassifizierenden Raum BG einer kompakten Lieschen Gruppe G und einen Raum BX mit isomorpher mod–p Kohomologie. Ist die elementar–abelsche p–Gruppe V eine Untergruppe in G, liefert uns dies eine Abbildung $\mathrm{f_V} : \mathrm{BV} \to \mathrm{BX}$.

In vielen Fällen kann man den Raum $\mathrm{map}(\mathrm{BV}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_V}}$ mit einer weiteren Untergruppe in G identifizieren und mittels der Auswertungsabbildung auch von dieser Gruppe aus eine Abbildung nach BX konstruieren (Dwyer–Zabrodsky, Notbohm [D-Z, N 1]). Mit Konstruktionen wie denen aus Kapitel 2, die aber stark von der speziellen Gruppe G und der Primzahl p abhängen, konstruiert man damit schließlich für den Normalisator N(T) des maximalen Torus T in G eine Abbildung $\mathrm{BN(T)} \to \mathrm{BX}$.

Für eine große Klasse von Gruppen G und Primzahlen p ist damit das Problem gelöst: In dem Fall, daß p die Ordnung der Weylgruppe $\mathrm{W_G}$ von G nicht teilt, ist nämlich

(bis auf Komplettierung) BN homotopiäquivalent zu BG und mittels obiger Abbildung auch zu BX. Dies bewiesen Dwyer, Miller und Wilkerson in [D-M-W].
Für die Behandlung der verbleibenden Gruppen und Primzahlen stellte Notbohm ein Programm auf [N 2]. Es beruht auf der Approximation eines klassifizierenden Raumes BG durch die klassifizierenden Räume gewisser Untergruppen in G. Dies erlaubt uns, Abbildungen $BG \to BX$ aus unterschiedlichen Abbildungen $BP \to BX$ zusammenzusetzen. Die große Schwierigkeit bei der Durchführung dieses Programmes liegt in dem Nachweis, daß diese Abbildungen auf kleineren Gruppen tatsächlich zusammenpassen.

Notbohm hat dieses Programm für zusammenhängende Gruppen mit torsionsfreier ganzzahliger Kohomologie an ungeraden Primzahlen durchgeführt.

In dieser Arbeit werden die Methoden dem Fall Orthogonaler Gruppen und der Primzahl 2 angepaßt. Ein wesentlicher Unterschied zu den bekannten Resultaten liegt darin, daß $O(n)$ nicht zusammenhängend ist.

Diese allgemeinen Ausführungen werden jetzt konkretisiert.

Definition. *Ein* p–*vollständiger Raum* BX *heißt vom gleichen* mod–p *Typ wie* BG*, wenn ein Isomorphismus*

$$\Phi : \mathrm{H}^*(BX;\mathbb{Z}/p) \to \mathrm{H}^*(BG;\mathbb{Z}/p)$$

von Algebren über der Steenrod–Algebra $\mathcal{A}_p$ existiert.

Definition. *Der klassifizierende Raum* BG *heißt homotopieeindeutig an der Primzahl* p*, wenn gilt: Jeder* p–*vollständige Raum vom selben* mod p *Typ wie* BG *ist homotopieäquivalent zur* p–*adischen Vervollständigung* $\mathrm{BG}^\wedge_\mathrm{p}$ *von* BG*.*

Wir wollen in dieser Arbeit den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Sei* O *ein Produkt Orthogonaler Gruppen, sei* BX *ein* 2–*vollständiger Raum vom selben* mod–2 *Typ wie* BO*. Dann ist* BX *homotopieäquivalent zu* $\mathrm{BO}^\wedge_2$*.*
Kurz: BO ist homotopieeindeutig an 2*.*

Wir haben einen Raum BX gegeben, dessen mod–2 Kohomologie algebraisch isomorph zu der von BO ist. Unser Ziel ist es, eine Abbildung $f : BO \to BX$ zu konstruieren, die einen solchen Isomorphismus induziert.

Der folgende Satz ist zentral für diese Konstruktion. Er besagt, daß BG durch die p–störrischen Untergruppen approximiert wird. Bezeichne $\mathcal{R}_\mathrm{p}\mathrm{G}$ die volle Unterkategorie der Orbit–Kategorie $\mathcal{O}(\mathrm{G})$, deren Objekte die homogenen Räume G/P mit p–störrischen Untergruppen P sind. Auf die für uns interessante Kategorie $\mathcal{R}_2(\mathrm{O})$ gehen wir in Kapitel 4 näher ein.

Satz. *(Jackowski, McClure, Oliver* [J-M-O]*)*
Sei G *eine kompakte Liegruppe. Die kanonische Abbildung*

$$\xrightarrow[\mathcal{R}_\mathrm{p}\mathrm{G}]{holim} \mathrm{EG} \underset{\mathrm{G}}{\times} \mathrm{G/P} \to \mathrm{BG}$$

ist eine p–*lokale Äquivalenz.*

Hieraus ergibt sich die Identität:

$$\begin{aligned} map(BG, BX) &\simeq map(\underset{\overrightarrow{\mathcal{R}_p\mathrm{G}}}{\mathrm{holim}} EG \underset{G}{\times} G/P, BX) \\ &= \underset{\overleftarrow{\mathcal{R}_p\mathrm{G}}}{\mathrm{holim}} (EG \underset{G}{\times} G/P, BX) \qquad \text{mit } EG \underset{G}{\times} G/P \simeq BP. \end{aligned}$$

Wir führen die Konstruktion der gesuchten Abbildung $\mathrm{f} : \mathrm{BO}_2^\wedge \to \mathrm{BX}$ durch, indem wir erst die Abbildung auf den 2–störrischen Untergruppen P von O definieren. Dann zeigen wir, daß diese Abbildungen geeignet zusammenpassen.

Jede 2–störrische Gruppe P in O ist konjugiert zu einer Untergruppe des Normalisators des maximalen Torus $\mathrm{N}(\mathrm{T_O})$. Daher können wir die gesuchten Abbildungen für die 2–störrischen Gruppen durch eine Abbildung auf dem Normalisator definieren.

Proposition. *Sei* BX *ein* 2*–vollständiger Raum vom selben* mod–2 Typ *wie* BO*,* N *der Normalisator des maximalen Torus in* O*.*

1. *Dann existiert eine Abbildung* $\mathrm{f_N} : \mathrm{BN} \to \mathrm{BX}$.
2. *Die Abbildung* $\mathrm{f_N}$ *kann so gewählt werden, daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{BN} \arrow[dl, "Bi_N"'] \arrow[dr, "f_N"] & \\ \mathrm{BO} \arrow[rr, dotted] & & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

in mod–2*–Kohomologie kommutiert.*

Notation. *Der gepunktete Pfeil steht für eine Abbildung in Kohomologie. Er deutet an, daß wir die (topologische) Abbildung noch konstruieren wollen.*

Diese Aussage beweisen wir in den Kapiteln 2 und 3.

Definition. *Sei* P *in* O *eine* 2*–störrische Untergruppe, die im Normalisator* N *des maximalen Torus* $\mathrm{T_O}$ *enthalten ist. Wir definieren* $\mathrm{f_P}$ *als die Verknüpfung*

$$\mathrm{BP} \overset{\mathrm{Bi}}{\to} \mathrm{BN} \overset{\mathrm{f_N}}{\to} \mathrm{BX}.$$

Um zu zeigen, daß diese Abbildungen geeignet zusammenpassen, beweisen wir in Kapitel 5 die folgende Aussage:

Proposition. *Sei* BX *ein* 2*–vollständiger Raum vom selben* mod–2 Typ *wie* BO*,* N *der Normalisator des maximalen Torus in* O*,* $\mathrm{c_g} : \mathrm{O/P} \to \mathrm{O/P'}$ *ein Morphismus von* $\mathcal{R}_2(\mathrm{O})$*, gegeben durch Konjugation. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{BP} \arrow[r, "Bi"] \arrow[d, "Bc_g"'] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{BP'} \arrow[r, "Bi'"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie.

Wegen der Kommutativität des Diagramms existiert eine Abbildung des 1–Gerüsts des Homotopie–Kolimes nach BX. Die Hindernisse gegen eine Erweiterung zu einer Abbildung des gesamten Homotopie–Kolimes nach BX liegen in

$$\lim_{\overleftarrow{\mathcal{R}_2(O)}}{}^{j}\ \pi_i(map(BP, BX)_{f_P}).\quad \text{[Wo]}$$

Um diese Gruppen zu berechnen, vergleichen wir die Funktoren

$$\begin{array}{lrcl} \Pi_i(\mathcal{X}), \Pi_i(\mathcal{O}): & \mathcal{R}_2(\mathrm{O}) & \to & \mathcal{AB} \\ & \Pi_i(\mathcal{O})(\mathrm{O/P}) & := & \pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BO})_{\mathrm{Bi_P}}) \\ & \Pi_i(\mathcal{X})(\mathrm{O/P}) & := & \pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_P}}) \end{array}$$

Da $\pi_1((\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BO})_{\mathrm{Bi_P}}) \cong \pi_1(\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_P}})$ abelsche Gruppen sind, liegen die Werte dieser Funktoren tatsächlich in der Kategorie der abelschen Gruppen.

Proposition. *Es existiert eine natürliche Äquivalenz von Funktoren*

$$\mathcal{T}: \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{O}) \to \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{X}).$$

Diese Proposition beweisen wir in Kapitel 5. Daher können wir die beiden Funktoren $\Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{X}), \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{O})$ miteinander identifizieren und der Übersichtlichkeit halber beide als Π_{i} bezeichnen.

Für die Gruppe O verschwinden die Hindernissgruppen:

Satz. *Sei* $\Pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{O/P}) := \mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BO})_{\mathrm{Bi_P}}$. *Bezeichnen wir das Zentrum einer Gruppe* G *mit* Z(G)*, so gilt*

$$\lim_{\overleftarrow{\mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}}\ (\Pi_{\mathrm{i}}) = \begin{cases} \pi_{\mathrm{i}-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{O}(\mathrm{n}))) & \text{falls } j = 0 \\ 0 & \text{falls } j > 0. \end{cases}$$

Diesen Satz beweisen wir in Kapitel 6.

Damit haben wir die Existenz der Abbildung $\mathrm{f}: \mathrm{BO} \to \mathrm{BX}$ nachgewiesen. Nach Konstruktion induziert f einen Isomorphismus in mod–2 Kohomologie und ist damit die gesuchte Homotopieäquivalenz.

Bemerkung. *Mittels eines Eilenberg–Moore–Spektralfolge Argumentes folgt, daß* $(\Omega\mathrm{BX}, \mathrm{BX}, \mathrm{id})$ *eine 2–kompakte Gruppe im Sinne von* [D-W] *ist. Daher haben wir die Bezeichnung* BX *(statt* X*) gewählt.*

Ich danke Herrn Professor Dr. Dietrich Notbohm für die Betreuung wärend der Anfertigung dieser Arbeit und für hilfreiche Gespräche. Auch Ulrike Reichenbach, Frank Neumann und Antonio Viruel danke ich für viele Diskussionen. Des weiteren danke ich Bob Oliver, der mir einen unveröffentlichten Teil der Arbeit [J-M-O] überlassen hat. Das Kapitel 6 beruht auf dieser Vorlage.
Außerdem danke ich dem SFB 170 und der DFG für die finanzielle Unterstützung in der Zeit, in der diese Arbeit angefertigt worden ist.

Kapitel 1

Notationen und elementare Konstruktionen

In diesem Kapitel legen wir zunächst einige Notationen für den Rest der Arbeit fest. Im zweiten Teil des Kapitels zitieren wir die Sätze, die für unsere Konstruktionen unerläßlich sind und führen die Konstruktionen durch, die einfache Folgerungen aus diesen Sätzen sind.

Für eine Orthogonale Gruppe O(n) betrachten wir die folgenden Untergruppen. Dabei sei m=[n/2] die größte ganze Zahl kleinergleich n/2 und ϵ=n-2m.

$$\begin{aligned} E &:= (\mathbb{Z}/2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon \\ F &:= (\mathbb{Z}/2)^n \\ L &:= O(2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon \\ N &:= O(2) \wr \Sigma_m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon \end{aligned}$$

Hier und im Folgenden soll $(\mathbb{Z}/2)^\epsilon$ für $\epsilon = 0$ stets bedeuten, daß dieser Faktor nicht auftritt. Die Gruppe der Permutationen auf m Elementen bezeichnen wir mit Σ_m. Sie operiert in natürlicher Weise auf E und L. Die Gruppen sind in natürlicher Weise ineinander enthalten

$$\mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{L} \hookrightarrow \mathrm{N} \hookrightarrow \mathrm{O(n)}$$

durch die Abbildungen

$$\begin{aligned} E \hookrightarrow F \quad &, \quad (t_1, \dots t_m, t^\epsilon) \mapsto (t_1, t_1, \dots t_m, t_m, t^\epsilon) \\ F \hookrightarrow L \quad &, \quad (t_1, \dots t_n) \mapsto diag(t_1, \dots t_n) \\ L \hookrightarrow N \quad &, \quad (A_1, \dots, A_m, t^\epsilon) \mapsto ((A_1, \dots, A_m; id), t^\epsilon) \end{aligned}$$

Man kann leicht nachrechnen, daß L der Zentralisator $\mathrm{C}_{\mathrm{O(n)}}(\mathrm{E})$ von E ist. E ist das Zentrum von L und N ist der Normalisator des maximalen Torus in O(n).
Für ein Produkt Orthogonaler Gruppen

$$\mathrm{O} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{a}} \mathrm{O(n_i)}$$

bezeichnen wir die Produkte der entsprechenden Untergruppen in den einzelnen Faktoren mit

$$\begin{aligned}
E &:= \prod_{i=1}^{a} E_i && \overset{i_E}{\hookrightarrow} O \\
F &:= \prod_{i=1}^{a} F_i && \overset{i_F}{\hookrightarrow} O \\
L &:= \prod_{i=1}^{a} L_i && \overset{i_L}{\hookrightarrow} O \\
N &:= \prod_{i=1}^{a} N_i && \overset{i_N}{\hookrightarrow} O \\
\Sigma &:= \prod_{i=1}^{a} \Sigma_{m_i}
\end{aligned}$$

In dem folgenden Satz stellen wir die Informationen über die mod–2 Kohomologiealgebren der Räume BO, BL, BF, BE zusammen.

Satz 1.1. *Seien* O, L, F, E *wie oben angegeben. Dann gilt für die* mod–2 *Kohomologie:*

1.
$$\begin{aligned}
H^*(BO) &\cong \bigotimes_{i=1}^{a} H^*(BO(n_i)) \\
H^*(BL) &\cong \bigotimes_{i=1}^{a} H^*(BL_i) \\
H^*(BF) &\cong \bigotimes_{i=1}^{a} H^*(BF_i) \\
H^*(BE) &\cong \bigotimes_{i=1}^{a} H^*(BE_i)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
H^*(BO(n)) &\cong \mathbb{F}_2[w_1, \ldots, w_n] \\
H^*(BL) &\cong \mathbb{F}_2[l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_1^{(m)}, l_2^{(m)}, t_1^{\epsilon}] \\
H^*(BF) &\cong \mathbb{F}_2[f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)}] \\
H^*(BE) &\cong \mathbb{F}_2[e_1^{(1)}, \ldots, e_1^{(m)}, t_1^{\epsilon}]
\end{aligned}$$

   Hierbei gibt der untere Index stets den Grad des Elements an, der obere, zu welchem Faktor das Element gehört. Der Erzeuger $\mathrm{w_j}$ *ist die j.te Stiefel Whitney Klasse.*

3. *Die Inklusionen induzieren die folgenden Morphismen in Kohomologie:*

   (a) $\mathrm{BL} \hookrightarrow \mathrm{BO(n)}$ *induziert*

$$\mathrm{w_j} \mapsto \sum_{\mathrm{j_1 + \ldots j_m + j_\epsilon = j}} \mathrm{l_{j_1}^{(1)}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{l_{j_m}^{(m)}} \cdot \mathrm{t_{j_\epsilon}^{\epsilon}}$$

   (b) $\mathrm{BF} \hookrightarrow \mathrm{BL}$ *induziert*

$$\begin{aligned}
l_1^{(j)} &\mapsto f_1^{(2j-1)} + f_1^{(2j)} \\
l_2^{(j)} &\mapsto f_1^{(2j-1)} \cdot f_1^{(2j)} \\
t_1^{\epsilon} &\mapsto f_1^{(n)}
\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{BE} \hookrightarrow \mathrm{BF}$ *induziert*

$$\begin{array}{ccc} f_1^{(2j-1)} & \mapsto & e_1^{(j)} \\ f_1^{(2j)} & \mapsto & e_1^{(j)} \end{array}$$

Sei jetzt BX ein 2–vollständiger Raum vom selben mod–2 Typ wie BO. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & H^*(BX;\mathbb{Z}/2) & \rightarrow & H^*(BO;\mathbb{Z}/2) \\ & x_j^{(i)} & \mapsto & w_j^{(i)} \end{array}$$

von Kohomologie–Algebren. Damit sind die Erzeuger $\mathrm{x}_\mathrm{j}^{(\mathrm{i})}$ eindeutig festgelegt.

Wir werden im Laufe der Arbeit zu allen oben angegebenen Abbildungen nach BO entsprechende Abbildungen der vervollständigten Räume nach BX konstruieren. Hier zitieren wir einige grundlegende Sätze für unsere Konstruktionen und erhalten als Folgerungen daraus die ersten drei Abbildungen.

Satz 1.2. *(Lannes* [L]*)*
Sei BX *ein* p*–vollständiger Raum und* $\mathrm{H}^*(\mathrm{BX};\mathbb{Z}/\mathrm{p})$ *von endlichem Typ. Für eine elementar–abelsche* p*–Gruppe* V *gilt dann: Die kanonische Abbildung*

$$[\mathrm{BV},\mathrm{BX}] \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\mathrm{p}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{BX};\mathbb{Z}/\mathrm{p}),\mathrm{H}^*(\mathrm{BV};\mathbb{Z}/\mathrm{p}))$$

ist ein Isomorphismus.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Abbildungen für die elementar–abelschen 2–Gruppen E und F leicht finden:

Definition 1.3.

Wir setzen für $\mathrm{f_E}:\mathrm{BE}\rightarrow\mathrm{BX}$ *die durch* $\mathrm{f}_\mathrm{E}^* = \mathrm{Bi}_\mathrm{E}^*\circ\Phi$ *bis auf Homothopie eindeutig charakterisierte Abbildung.*

Wir setzen für $\mathrm{f_F}:\mathrm{BF}\rightarrow\mathrm{BX}$ *die durch* $\mathrm{f}_\mathrm{F}^* = \mathrm{Bi}_\mathrm{F}^*\circ\Phi$ *bis auf Homothopie eindeutig charakterisierte Abbildung.*

Für die 2–torale Gruppe L konstruieren wir die gesuchte Abbildung mit Hilfe der folgenden Sätze:

Satz 1.4. *(Dwyer-Zabrodsky, Notbohm*[D-Z, N 1]*)*
Für eine p*–torale Gruppe* P *und eine kompakte Liesche Gruppe* G *ist die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Rep}(\mathrm{P},\mathrm{G}) \rightarrow [\mathrm{BP},\mathrm{BG}]$$

ein Isomorphismus und die Abbildung

$$\mathrm{BC_G}(\rho) \rightarrow \mathrm{map}(\mathrm{BP},\mathrm{BG})_{\mathrm{B}\rho}$$

eine mod–p *Äquivalenz.*

Im folgenden Satz tritt der Lannesche T-Funktor auf.

Satz 1.5. *(Lannes* [L]*)*
Sei BX *ein* p*–vollständiger Raum und* $\mathrm{H^*(BX;\mathbb{Z}/p)}$ *von endlichem Typ. Sei* V *eine elementar–abelsche* p*–Gruppe. Falls für eine Abbildung* $\mathrm{g : BV \to BX}$ *die Algebra* $\mathrm{T^V_{g^*}(H^*(BX;\mathbb{Z}/p))}$ *frei in Grad* ≤ 2 *ist, so ist die Abbildung*

$$\mathrm{T^V_{g^*}(H^*(BX;\mathbb{Z}/p)) \to H^*(map(BV,BX)_g;\mathbb{Z}/p)}$$

ein Isomorphismus und $\mathrm{map(BV,BX)_g}$ p*–vollständig.*

Frei in Grad ≤ 2 bedeutet, daß die Multiplikation zweier Elemente von Grad 1 bis auf Vertauschung injektiv ist. Bei uns ist diese Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} T^E_{f_E^*}(H^*(BX;\mathbb{Z}/2)) &\cong T^E_{Bi_E^*}(H^*(BO;\mathbb{Z}/2)) \\ &\cong H^*(BC_O(E);\mathbb{Z}/2) \\ &\cong H^*(BL;\mathbb{Z}/2) \end{aligned}$$

ist frei in Grad ≤ 2. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{H^*(map(BE,BX)_{f_E};\mathbb{Z}/2)} &\cong \mathrm{T^E_{f_E^*}(H^*(BX;\mathbb{Z}/2))} \\ &\cong \mathrm{H^*(BL;\mathbb{Z}/2)} \end{aligned}$$

Wegen des folgenden Satzes gilt daher $\mathrm{BL^\wedge_2 \simeq map(BE,BX)_{f_E}}$.

Satz 1.6. *Sei* BY *ein* 2*–vollständiger Raum vom selben* mod–2 *Typ wie* $\mathrm{B(O(2)^n \times (\mathbb{Z}/2)^k)}$. *Dann ist* BY *homotopieäquivalent zu* $\mathrm{B(O(2)^n \times (\mathbb{Z}/2)^k)^\wedge_2}$.

Beweis. In [M] wurde die Homotopieeindeutigkeit von $\mathrm{BO(2)^n}$ bewiesen. Wegen der einfachen Struktur von $\mathrm{B(\mathbb{Z}/2)^k}$ liefern dieselben Methoden auch die Homotopieeindeutigkeit des Produkts $\mathrm{B(O(2)^n \times (\mathbb{Z}/2)^k)}$. □

Definition 1.7. *Die Abbildung* $\mathrm{f_L : BL^\wedge_2 \to BX}$ *ist gegeben als die Verknüpfung*

$$\mathrm{BL^\wedge_2 \simeq map(BE,BX)_{f_E} \xrightarrow{ev} BX}$$

.

Kapitel 2

Konstruktion des Normalisators

Sei O ein Produkt Orthogonaler Gruppen und BX ein 2–vollständiger Raum vom selben mod–2 Typ wie BO.

Im letzten Abschnitt haben wir Abbildungen konstruiert, die in dem folgenden Diagramm aufgelistet sind:

$$\begin{tikzcd}
BE \arrow[d] \arrow[ddr, "f_E"] & \\
BF \arrow[d] \arrow[dr, "f_F"] & \\
BL \arrow[d] \arrow[r, "f_L"] & BX \\
BN &
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm wollen wir jetzt durch eine Abbildung auf BN erweitern. Die Konstruktion erstreckt sich über zwei Kapitel: In diesem Kapitel konstruieren wir eine Abbildung $\mathrm{g_N} : \mathrm{BN} \to \mathrm{BX}$. In dem nächsten Kapitel ersetzen wir $\mathrm{g_N}$ durch eine Abbildung $\mathrm{f_N}$, die dann auch in Kohomologie die richtige ist.
Zunächst fassen wir einige Zusammenhänge zwischen Gruppenerweiterungen und Faserungen zusammen, die wir in der Konstruktion verwenden.

Gruppenerweiterungen und Faserungen

Definition 2.1.

Sei G *eine (nicht notwendig) abelsche Gruppe,* H *eine Gruppe.* $E_\phi(H,G)$ *bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von Erweiterungen von* H *durch* G *zu der Operation* $\phi : H \to Aut(G)$*. Zwei Erweiterungen* E' *und* E'' *heißen dabei äquivalent, wenn es* *einen Homomorphismus $e : E' \to E''$ gibt, für den das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & & E' \arrow[dd, "e"] \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[r] & G \arrow[ur] \arrow[dr] & & H \arrow[r] & 1 \\ & & E'' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$Fib_\psi(B,F)$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von Faserungen mit Basisraum B *und Faser* F*, bei denen $\pi_1(B)$ durch ψ auf* F *operiert. Zwei Faserungen Y' und Y'' heißen dabei äquivalent, wenn es eine Abbildung $f : Y' \to Y''$ gibt, für die das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dd, "f"] \arrow[dr] & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \\ & Y'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

In Definition 2.1 ist $e : E' \to E''$ automatisch ein Isomorphismus, $f : Y' \to Y''$ automatisch eine Homotopieäquivalenz.

Satz 2.2. *Gruppenerweiterungen sind klassifiziert durch*

$$E_\phi(H,G) \cong \mathrm{H}^2_\phi(H; Z(G))$$

Beweis. Nach [MacL] können wir Gruppenerweiterungen nicht-abelscher Gruppen G durch den Übergang zum Zentrum Z(G) auf den Fall von Erweiterungen abelscher Gruppen zurückführen. In diesem Fall ordnet man jeder Erweiterung eine sogenannte Faktormenge zu. Diese kann als Element von $\mathrm{H}^2_\phi(H; Z(G))$ aufgefaßt werden und gibt an, wie sich die Erweiterung vom semidirekten Produkt unterscheidet. Diese Zuordnung liefert eine 1–1 Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen von Erweiterungen und $\mathrm{H}^2_\phi(H; Z(G))$. □

$Fib_\psi(B,F)$ läßt sich nicht in dieser Allgemeinheit berechnen, in dem für uns wichtigen Spezialfall gilt jedoch:

Satz 2.3.

$$Fib_\phi(\mathrm{B\Sigma}, \mathrm{BL}_2^\wedge) \cong \mathrm{H}^2_\phi(\mathrm{B\Sigma}; \mathrm{Z(L)}).$$

Beweis. Faserungen der Form

$$\mathrm{BL}_2^\wedge \xrightarrow{i} \mathrm{Y} \xrightarrow{p} \mathrm{B\Sigma}$$

werden nach [St] klassifiziert durch Homotopieklassen von Abbildungen $\mathrm{B\Sigma} \to \mathrm{BHE}(\mathrm{BL}_2^\wedge)$. Wir bezeichnen

$$\mathrm{HE(X)} := \{\mathrm{f : X \to X} \mid \mathrm{f\ ist\ Homotopieäquivalenz}\}$$

$$\mathrm{SHE(X)} := \{\mathrm{f : X \to X} \mid \mathrm{f} \in \mathrm{HE(X)},\ \mathrm{f} \simeq \mathrm{id_X}\}$$

Die Verknüpfung $\mathrm{B\Sigma} \to \mathrm{BHE(BL_2^\wedge)} \to \mathrm{B}\pi_0(\mathrm{HE(BL_2^\wedge)})$ ist die durch die Operation $\phi : \Sigma \to \mathrm{Aut(BL_2^\wedge)}$ induzierte Abbildung.

Offenbar ist

$$\mathrm{BSHE(BL_2^\wedge)} \to \mathrm{BHE(BL_2^\wedge)} \to \mathrm{B}\pi_0(\mathrm{BHE(BL_2^\wedge)})$$

eine Faserung. Wir müssen also die Hochhebungen von $\mathrm{B}\phi$ in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{BSHE(BL_2^\wedge)} \arrow[d] \\
\mathrm{B\Sigma} \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{B}\phi"'] & \mathrm{BHE(BL_2^\wedge)} \arrow[d] \\
 & \mathrm{B}\pi_0\mathrm{HE(BL_2^\wedge)}
\end{tikzcd}$$

klassifizieren. Dies ist möglich, da nach Satz 1.4 [D-Z, N] die Faser

$$\mathrm{BSHE(BL_2^\wedge)} \simeq \mathrm{BBZ(L_2^\wedge)} \simeq \mathrm{BBE}$$

ein Eilenberg–MacLane Raum K(E,2) ist. Daher sind die Hochhebungen nach [Wh] folgendermaßen klassifiziert: Die Differenz zwischen zwei Homotopieklassen von Hochhebungen $[\kappa']$ und $[\kappa'']$ wird gemessen durch

$$\delta^2(\kappa', \kappa'') \in \mathrm{H}^2(\mathrm{B\Sigma};\ \pi_2(\mathrm{K(E,2)})) \cong \mathrm{H}^2(\mathrm{B\Sigma}; \mathrm{E}).$$

Die Klasse $\delta^2(\kappa', \kappa'')$ wird als die primäre Differenz der beiden Hochhebungen bezeichnet und es gilt: Für eine feste Hochhebung κ_0 liefert die Zuordnung $[\kappa] \mapsto \delta^2(\kappa_0, \kappa)$ eine 1–1 Beziehung zwischen den Hochhebungen in obigem Diagramm und $\mathrm{H}^2(\mathrm{B\Sigma}; \mathrm{E})$. □

Nun zum Zusammenhang zwischen Gruppenerweiterungen und Faserungen. Wir bezeichnen dabei mit $(\_)_2^\circ$ die fasernweise Komplettierung nach Bousfield und Kan [B-K].

Lemma 2.4. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{B}(_)_2^\wedge : & E_\phi(\Sigma, \mathrm{L}) & \to & Fib_\phi(\mathrm{B\Sigma}, \mathrm{BL_2^\wedge}) \\
 & (\mathrm{L} \to \mathrm{G} \to \Sigma) & \mapsto & (\mathrm{BL_2^\wedge} \to \mathrm{BG_2^\circ} \to \mathrm{B\Sigma})
\end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Eine genaue Untersuchung der Faktormengen aus Satz 2.2 und der primären Differenzen aus Satz 2.3 zeigt: Der Funktor $\mathrm{B}(\_\ )$ bildet die Faktormenge f der Gruppenerweiterung $1 \to \mathrm{L} \to \mathrm{G} \to \Sigma \to 1$ auf die primäre Differenz $\delta^2(\kappa_0, \mathrm{Bf})$ zwischen der klassifizierenden Abbildung Bf der Faserung $\mathrm{BL_2^\wedge} \to \mathrm{BG_2^\circ} \to \mathrm{B\Sigma}$ und der klassifizierenden Abbildung κ_0 der Faserung $\mathrm{BL_2^\wedge} \to \mathrm{B(L \rtimes \Sigma)_2^\circ} \to \mathrm{B\Sigma}$ ab. Dies liefert einen Isomorphismus der klassifizierenden Kohomologiegruppen. □

Die Konstruktion

Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 1 ist $\mathrm{N} \cong \mathrm{L} \rtimes \Sigma$ ein semidirektes Produkt. Die Operation von Σ auf L bezeichnen wir mit ϕ. Die dadurch gegeben Gruppenerweiterung induziert eine Faserung

$$\mathrm{BL}_2^\wedge \to \mathrm{BN}_2^\circ \to \mathrm{B}\Sigma \in \mathit{Fib}_\phi(\mathrm{B}\Sigma, \mathrm{BL}_2^\wedge).$$

Wir konstruieren noch ein weiteres Element von $\mathit{Fib}_\phi(\mathrm{B}\Sigma, \mathrm{BL}_2^\wedge)$. Die Operation von Σ auf E induziert eine Operation von Σ auf $\mathrm{map}(\mathrm{BE}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_E}}$, da die Komponente von $\mathrm{f_E}$ unter der Operation stabil ist. Der Orbitraum

$$\mathrm{BZ} := (\mathrm{E}\Sigma \times \mathrm{map}(\mathrm{BE}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_E}}) \big/ {\Sigma}$$

ist nach Konstruktion ebenfalls Totalraum einer Faserung

$$\mathrm{BL}_2^\wedge \to \mathrm{BZ} \to \mathrm{B}\Sigma.$$

Die Auswertung am Grundpunkt liefert eine auf dem Quotienten wohldefinierte Abbildung $\mathrm{ev} : \mathrm{BZ} \to \mathrm{BX}$. Wir zeigen: Die beiden Faserungen sind äquivalent, ihre Totalräume daher homotopieäquivalent. Dabei verwenden wir die folgende Tatsache:
Die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} BL_2^\wedge \arrow[r] \arrow[dr, "f_L"'] & BZ \arrow[r] \arrow[d, "ev"] & B\Sigma \\ & BX & \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} BL_2^\wedge \arrow[r] \arrow[dr, "Bi_L"'] & BN_2^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "Bi_N"] & B\Sigma \\ & BO & \end{tikzcd}$$

komutieren in mod–2 Kohomologie. Daher muß in den Leray–Serre Spektralfolgen beider Faserungen das Element $\mathrm{Bi}_\mathrm{L}^*(\mathrm{w}_1) = \mathrm{f}_\mathrm{L}^*(\mathrm{x}_1) = \mathrm{l}_1^{(1)} + \ldots + \mathrm{l}_1^{(\mathrm{m})}$ überleben. Wir zeigen, daß die Faserung durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.5. *Sei* $\mathrm{BL}_2^\wedge \to \mathrm{E} \to \mathrm{B}\Sigma$ *eine Faserung, für deren Leray–Serre Spektralsequenz gilt:*

$$\mathrm{d}_2(\mathrm{l}_1^{(1)} + \ldots + \mathrm{l}_1^{(\mathrm{m})}) = 0 \text{ und } d_2(t_1^\epsilon) = 0$$

für alle Faktoren $\mathrm{L_i}$ *von* L*. Dann existiert eine Äquivalenz von Faserungen*

$$\begin{tikzcd} BL_2^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & B\Sigma \arrow[d, equal] \\ BL_2^\wedge \arrow[r] & B(L \rtimes \Sigma)_2^\circ \arrow[r] & B\Sigma \end{tikzcd}$$

Definition 2.6. *Mit der Homotopieäquivalenz aus Satz 2.5 definieren wir* $\mathrm{g_N} : \mathrm{BN}_2^\wedge \to \mathrm{BX}$ *als die Verknüpfung* $\mathrm{BN}_2^\wedge \simeq \mathrm{BZ} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathrm{BX}$.

Für den Beweis von Satz 2.5 beweisen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 2.7. *Sei* $\mathrm{B}(\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2 \to \mathrm{Y} \to \mathrm{B}$ *eine Faserung mit trivialer* $\pi_1(\mathrm{B})$*-Operation auf der Faser. Gilt in der Leray-Serre Spektralfolge dieser Faserung für die Differentiale* $\mathrm{d}_2(\mathrm{l}_1) = 0 = \mathrm{d}_2(\mathrm{t}_1^\epsilon)$*, so ist die Faserung trivial.*

Beweis. Nach [St] werden Faserungen $\mathrm{F}\to\mathrm{E}\to\mathrm{B}$ durch Homotopieklassen von Abbildungen $\mathrm{B}\to\mathrm{BHE(F)}$ klassifiziert. Da die Operation trivial ist, landen die klassifizierenden Abbildungen in BSHE(F). Mit Hilfe des Satzes 1.4 von Dwyer-Zabrodsky und Notbohm [D-Z, N] berechnen wir

$$\begin{aligned} SHE(BO(2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2) &\simeq B(BC_{O(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon}(O(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)) \\ &\simeq B^2(\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Morphismen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathrm{I_Z} & : & \mathbb{Z}/2 & \to & O(2) & \qquad & \mathrm{Pr} & : & \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 & \to & \mathrm{O}(2) \\ & & t & \mapsto & \mathrm{diag}(t,t) & & & & (s,t) & \mapsto & \mathrm{diag}(s,s) \\ \mathrm{i_Z} & : & \mathbb{Z}/2 & \to & \mathbb{Z}/2 & & \mathrm{pr} & : & \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 & \to & \mathbb{Z}/2 \\ & & t & \mapsto & t & & & & (s,t) & \mapsto & s \\ id_\epsilon & : & (\mathbb{Z}/2)^\epsilon & \to & (\mathbb{Z}/2)^\epsilon & & \Delta & : & \mathbb{Z}/2 & \to & \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2 \\ & & t^\epsilon & \mapsto & t^\epsilon & & & & t & \mapsto & (t,t) \end{array}$$

führen wir die folgenden Konstruktionen durch: Wir bezeichnen die Faserung

$$\mathrm{B}(\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2 \to \mathrm{Y} \to \mathrm{B}$$

mit (Y). Die Abbildung $\mathrm{I_Z}\times\mathrm{id}_\epsilon$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathrm{B}(\mathrm{I_Z}\times\mathrm{id}_\epsilon)_\sharp : \mathit{Fib}(\mathrm{B},\mathrm{B}(\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)) \to \mathit{Fib}(\mathrm{B},\mathrm{B}(\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)).$$

Sei (Y') das Urbild von (Y). Wir definieren $(\mathrm{Y}'') := \mathrm{B}(\Delta\times\mathrm{id}_\epsilon)_\sharp((\mathrm{Y}'))$. Wegen $\mathrm{pr}\circ\Delta = \mathrm{id}$ gilt $\mathrm{B}(\mathrm{Pr}\times\mathrm{id}_\epsilon)_\sharp((\mathrm{Y}'')) = (\mathrm{Y})$. Daher existiert das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, "\mathrm{B}\Delta"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{BI_Z}"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, "\mathrm{BPr}"] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[d] \\ \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y}'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d] \\ \mathrm{B} \arrow[r, equal] & \mathrm{B} \arrow[r, equal] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

Die klassifizierenden Abbildungen sind

$$\kappa = \kappa' : \mathrm{B} \to \mathrm{B}^2(\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)$$

und

$$\begin{tikzcd}
\kappa'' : \mathrm{B} \arrow[rr] \arrow[dr, "\kappa'"'] & & \mathrm{B}^2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \\
& \mathrm{B}^2(\mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[ur, "\mathrm{B}(\Delta \times id_\epsilon)"'] &
\end{tikzcd}$$

In der Spektralsequenz der rechten Faserung in dem Diagramm oben verschwinden nach Voraussetzung die Differentiale: $d_2(l_1) = 0 = d_2(t_1^\epsilon)$. Wegen $\mathrm{BPr}^*(\mathrm{l}_1) = \mathrm{f}_1$ folgt für die mittlere Faserung

$$\mathrm{d}_2''(\mathrm{f}_1) = 0 = \mathrm{d}_2''(\mathrm{t}_1^\epsilon).$$

Wegen $\mathrm{B}\Delta^*(f_1) = e_1$ folgt daraus für die linke Faserung:

$$\mathrm{d}_2'(\mathrm{e}_1) = 0 = \mathrm{d}_2(\mathrm{t}_1^\epsilon).$$

Für diese Faserung gilt nach der Klassifikation aus [St]

$$\begin{tikzcd}
e_1 \in \arrow[dd, mapsto] & \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[d] & \ni e_1 \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] & \\
0 = d_2'(e_1) \in \arrow[dr, equal] & \mathrm{B} \arrow[r, "\kappa'"'] & \mathrm{B}^2(\mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) & \ni \iota_2 \arrow[dl, equal] \\
& \kappa''^*(\iota_2) & \iota_2 \arrow[l, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

(Entsprechend für t_1^ϵ.) Daher ist $\kappa^* = \kappa'^* = 0$, also sind die Abbildungen selbst nullhomotop. Die Faserung (Y) wird durch κ klassifiziert, ist also trivial. □

Beweis. (des Satzes 2.5)
Sei $\mathrm{BL}_2^\wedge \to \mathrm{E} \to \mathrm{B}\Sigma$ eine Faserung mit der oben angegebenen Operation ϕ von Σ auf L. Wegen des Isomorphismus aus Lemma 2.4

$$Fib_\phi(\mathrm{B}\Sigma, \mathrm{BL}_2^\wedge) \cong E_\phi(\Sigma, \mathrm{L})$$

wissen wir, daß sie durch eine Gruppenwerweiterung induziert wird. Es existiert also eine Gruppenerweiterung

$$0 \to \mathrm{L} \to \mathrm{K} \to \Sigma \to 0$$

und eine Äquivalenz von Faserungen

$$\begin{tikzcd}
BL_2^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & BK_2^\circ \arrow[r] \arrow[d] & B\Sigma \arrow[d, equal] \\
BL_2^\wedge \arrow[r] & E \arrow[r] & B\Sigma
\end{tikzcd}$$

Wir müssen zeigen, daß K isomorph zum semidirekten Produkt $\mathrm{L}\rtimes\Sigma$ ist. Die Gruppenerweiterungen $E_\phi(\Sigma,\mathrm{L})$ sind klassifiziert durch

$$E_\phi(\Sigma,\mathrm{L}) \cong \mathrm{H}^2_\phi(\Sigma;\mathrm{Z}(\mathrm{L})) = \mathrm{H}^2_\phi(\Sigma;\mathrm{E}).$$

Der Isomorphismus

$$\mathrm{H}^2_\phi(\Sigma;\mathrm{E}) = \mathrm{H}^2_\phi(\Sigma;\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{a}}\mathrm{E}_\mathrm{i}) \cong \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{a}}\mathrm{H}^2_{\phi_\mathrm{i}}(\Sigma;\mathrm{E}_\mathrm{i})$$

ermöglicht es uns, die Gruppenerweiterung

$$0\to\mathrm{L}\to\mathrm{K}\to\Sigma\to 0$$

in Gruppenerweiterungen

$$0\to\mathrm{O}(2)^{\mathrm{m_i}}\times(\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_\mathrm{i}}\to\mathrm{K_i}\to\Sigma\to 0 \qquad ,\ \mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{a}$$

zu zerlegen. Die Erweiterung K ist genau dann ein semidirektes Produkt, wenn alle $\mathrm{K_i}$ es sind. Wir wählen ein festes, aber beliebiges i aus und setzen $\Sigma' = \prod_{\mathrm{j}\neq\mathrm{i}}\Sigma_{\mathrm{m_j}}$.
Im Folgenden schreiben wir m für $\mathrm{m_i}$ und ϵ für ϵ_i. Die obige Erweiterung schreibt sich dann als

$$0\to\mathrm{O}(2)^\mathrm{m}\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon\to\mathrm{K_i}\to\Sigma_\mathrm{m}\times\Sigma'\to 0.$$

Wir behandeln zunächst den Fall, daß m ungerade ist. Die Inklusion

$$\Delta:\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon\to\mathrm{O}(2)^\mathrm{m}\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon$$

induziert einen Morphismus

$$\mathrm{B}\Delta_\sharp : \mathit{Fib}(\mathrm{B}\Sigma,\mathrm{B}(\mathrm{O}(2)\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon))\to\mathit{Fib}(\mathrm{B}\Sigma,\mathrm{B}(\mathrm{O}(2)^\mathrm{m}\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon))$$

Für die klassifizierenden Kohomologiegruppen aus Satz 2.3 berechnen wir: Die Verknüpfung

$$\begin{tikzcd}
H^2_{triv}(\Sigma_m\times\Sigma';\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, "B\Delta_\sharp"] \arrow[dr] & H^2_{\phi_m}(\Sigma_m\times\Sigma';(\mathbb{Z}/2)^m\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[d, "\cong"] \\
& H^2_{\phi_{m-1}}(\Sigma_{m-1}\times\Sigma';\mathbb{Z}/2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon)
\end{tikzcd}$$

ist gegeben durch die Einschränkung von Σ_m auf $\Sigma_{\mathrm{m}-1}$. Diese Abbildung ist für $\mathrm{m}\neq 2,4$ ein Isomorphismus und immer ein Epimorphismus. Die senkrechte Isomorphie auf der rechten Seite folgt aus Shapiros Lemma. In jedem Fall erhalten wir ein Diagramm von Faserungen:

$$\begin{tikzcd}
BO(2)^\wedge_2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon \arrow[r] \arrow[d, "B\Delta"'] & Y_i \arrow[r] \arrow[d] & B\Sigma_m\times B\Sigma' \arrow[d, equal] \\
(BO(2)^m)^\wedge_2\times(\mathbb{Z}/2)^\epsilon \arrow[r] & (BK_i)^\circ_2 \arrow[r] & B\Sigma_m\times B\Sigma'
\end{tikzcd}$$

Auf die obere Faserung können wir Lemma 2.7 anwenden, da $\Delta(O(2))$ gerade die Fixpunktmenge der Σ_m–Operation auf $O(2)^m$ ist. Es gilt

$$B\Delta^*(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m)}) = ml_1 = l_1.$$

Für die Differentiale d und $\tilde{d}$ der Spektralsequenzen

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B\Sigma_m \times B\Sigma'; H^q((BO(2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; \mathbb{Z}/2))$$

und

$$\tilde{E}_2^{p,q} \cong H^p(B\Sigma_m \times B\Sigma'; H^q((BO(2) \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; \mathbb{Z}/2))$$

ist also

$$\tilde{d}_2(l_1) = \tilde{d}_2(B\Delta^*(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m)})) = d_2(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m)}) = 0.$$

Wegen Lemma 2.7 folgt daraus, daß die obere Faserung trivial ist. Also ist auch die daraus durch den Homomorphismus $\Delta_\sharp$ induzierte untere Faserung trivial. Damit ist im Fall m ungerade die Aussage bewiesen.

Sei jetzt m gerade. Wegen $B\Delta^*(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m)}) = ml_1 = 0$ können wir das selbe Argument wie eben nicht anwenden. Wir führen diesen Fall auf den ungeraden Fall m-1 zurück. Mit der Projektion $pr : O(2)^m \to O(2)^{m-1}$ auf die ersten $(m-1)$ Faktoren und der zugehörigen Inklusion $\iota_{m-1,m} : \Sigma_{m-1} \hookrightarrow \Sigma_m$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Faserungen:

$$\begin{tikzcd}
B(O(2)^{m-1} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2 \arrow[r] & (BK_i'')^\circ_2 \arrow[r] & B\Sigma_{m-1} \times B\Sigma' \\
BO((2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2 \arrow[r] \arrow[u, "Bpr"] \arrow[d, equal] & (BK_i')^\circ_2 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & B\Sigma_{m-1} \times B\Sigma' \arrow[u, equal] \arrow[d, "B\iota_{m-1,m}"] \\
B(O(2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon)^\wedge_2 \arrow[r] & (BK_i)^\circ_2 \arrow[r] & B\Sigma_m \times B\Sigma'
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt: $K_i' = K_i \underset{\Sigma_m}{\times} \Sigma_{m-1} \cong C_{K_i}(\mathbb{Z}/2)$, wobei $\mathbb{Z}/2$ das Zentrum des letzten Faktors $O(2)$ in $O(2)^m$ ist. In $C_{K_i}(\mathbb{Z}/2)$ ist $O(2)$ als normale Untergruppe enthalten und $K_i'' \cong C_{K_i}(\mathbb{Z}/2) \big/ O(2)$.

Für das Differential d der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B\Sigma_m \times B\Sigma'; H^q((BO(2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; \mathbb{Z}/2))$$

der unteren Faserung ist nach Voraussetzung $d_2(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m)}) = 0$.

Für das Differential d' der Spektralsequenz

$$(E')_2^{p,q} \cong H^p(B\Sigma_{m-1} \times B\Sigma'; H^q((BO(2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; \mathbb{Z}/2))$$

der mittleren Faserung ist $d_2'(l_1^{(m)}) = 0$, da dieser Erzeuger überlebt. Daher gilt auch

$$\begin{aligned}
d_2'(l_1 + \ldots + l_1^{(m-1)}) &= d_2'(l_1 + \ldots + l_1^{(m-1)} + l_1^{(m)}) \\
&= d_2(l_1 + \ldots + l_1^{(m)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für das Differential d'' der Spektralsequenz

$$(\mathrm{E}'')_2^{\mathrm{p,q}} \cong \mathrm{H^p}(\mathrm{B}\Sigma_{\mathrm{m}-1} \times \mathrm{B}\Sigma'; \mathrm{H^q}((\mathrm{BO}(2)^{\mathrm{m}-1} \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon}; \mathbb{Z}/2))$$

der oberen Faserung gilt:

$$\begin{array}{rl} & d_2''(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m-1)}) \\ = & d_2'(l_1^{(1)} + \ldots + l_1^{(m-1)}) \\ = & 0 \end{array}$$

Da $\mathrm{m}-1$ ungerade ist können wir daraus schließen, daß die obere Faserung trivial ist. Auf dem Niveau der klassifizierenden Kohomologieklassen wird die Konstruktion beschrieben durch

$$\begin{tikzcd}
H^2(B\Sigma_{m-1} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "B\iota^*_{m-2,m-1}"'] & H^2(B\Sigma_m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; (\mathbb{Z}/2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[d, "B\iota^*_{m-1,m}"] \\
 & H^2(B\Sigma_{m-1} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; (\mathbb{Z}/2)^m \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[d, "Bpr_\sharp"] \\
H^2(B\Sigma_{m-2} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; (\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon) \arrow[r, "\cong"] & H^2(B\Sigma_{m-1} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon; (\mathbb{Z}/2)^{m-1} \times (\mathbb{Z}/2)^\epsilon)
\end{tikzcd}$$

Diese Verknüpfung ist für alle geraden m ein Isomorphismus. Also ist auch die untere Faserung trivial. □

Kapitel 3

Der Normalisator, Teil 2

In Kapitel 2 haben wir die Abbildung $g_N : BN \to BX$ als Erweiterung der Abbildung $f_F : BF \to BX$ konstruiert. In diesem Kapitel ersetzen wir g_N durch eine Abbildung f_N, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} BF \arrow[r, "Bi_F"] \arrow[drr, "f_F"'] & BN \arrow[r, "Bi_N"] \arrow[dr, "f_N"] & BO \arrow[d, dotted, "\Phi"] \\ & & BX \end{tikzcd}$$

in mod–2 Kohomologie kommutiert. Dazu untersuchen wir Hochhebungen in dem Diagramm:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & H^*(BN;\mathbb{Z}/2) \arrow[d] \\ H^*(BO;\mathbb{Z}/2) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & H^*(BF;\mathbb{Z}/2) \end{tikzcd}$$

Die beiden nicht bezeichneten Abbildungen werden von den natürlichen Inklusionen induziert. Die Erweiterung g_N induziert eine Hochhebung $\alpha := g_N^* \circ \Phi$ in $(*)$, Bi_N^* eine weitere. Wir zeigen, daß sich Hochhebungen in $(*)$ nur in einer ganz bestimmten Weise voneinander unterscheiden können, die wir zudem noch kontrollieren können. Im einzelnen:

Für einen Homomorphismus $\Psi : \Sigma \to E^{\Sigma}$ definieren wir einen weiteren Homomorphismus $j_\Psi : N \to N$ durch

$$N \overset{\Delta}{\to} N \times \Sigma \overset{id\times\Psi}{\to} N \times E^{\Sigma} \overset{\mu}{\to} N.$$

(Dabei bezeichnet Δ die Diagonale, verknüpft mit der Projektion auf Σ, μ die Multiplikation.) Offenbar ist $j_\Psi|_F = id_F$, und sowohl $i_N : N \to O$, als auch $i_N \circ j_\Psi : N \to O$ induzieren Hochhebungen in $(*)$.

Satz 3.1. *Sei $\alpha : H^*(BO;\mathbb{Z}/2) \to H^*(BN;\mathbb{Z}/2)$ in dem Diagramm $*$. Dann existiert ein Homomorphismus $\Psi : B\Sigma \to B(E^{\Sigma})$ für den gilt:*

$$\alpha = Bj_\Psi^* \circ Bi_N{}^*.$$

Folgerung 3.2. *Es existiert eine Abbildung* $\mathrm{f_N} : \mathrm{BN} \to \mathrm{BX}$, *für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{BF} \arrow[r, "Bi"] \arrow[drr, "f_F"'] & \mathrm{BN} \arrow[r, "Bi"] \arrow[dr, "f_N"] & \mathrm{BO} \arrow[d, dotted, "\Phi"] \\
& & \mathrm{BX}
\end{tikzcd}$$

in mod–2–*Kohomologie kommutiert.*

Beweis. (der Folgerung) Nach Satz 3.1 gibt es zu der Hochhebung $\alpha := \mathrm{g}_N^* \circ \Phi$ einen Morphismus Ψ mit $\alpha = \mathrm{Bj}_\Psi^* \circ \mathrm{Bi_N}^*$. Die Abbildung $\mathrm{f_N} := \mathrm{g_N} \circ \mathrm{Bj}_\Psi$ macht das Diagramm kommutativ. □

Vor dem Beweis von Satz 3.1 stellen wir noch einige Überlegungen an.

Lemma 3.3. $\mathrm{H}^*(\mathrm{BN}; \mathbb{Z}/2)$ *wird durch elementar–abelsche* 2–*Gruppen entdeckt.*

Beweis. $\mathrm{H}^*(\mathrm{BO}(2); \mathbb{Z}/2) \cong \mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2); \mathbb{Z}/2)^{\Sigma_2}$ wird durch elementar–abelsche 2–Gruppen entdeckt. Nach (Prop 3.4 [Q]) übertrġt sich diese Eigenschaft auf die Kohomologie von $\mathrm{BO}(2) \wr \Sigma_\mathrm{n}$. □

Notation 3.4. *Mit* $\mathrm{I_k}$ *bezeichnen wir die Einheitsmatrix der Größe k.*

$$\begin{array}{lclcr}
\mathrm{V}_1 & := & \langle \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2; \tau_{1,2} \rangle & < & \mathrm{O}(2) \wr \Sigma_2 \\
\mathrm{V}_2 & := & \langle -\mathrm{I}_4 \rangle & < & \mathrm{O}(2) \wr \Sigma_2 \\
\mathrm{W}_l(s) & := & (\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2)^s \times (\mathbb{Z}/2)^{2l-4s} & < & \mathrm{O}(2) \wr \Sigma_l \\
\mathrm{V}_l(s) & := & (\mathrm{V}_2)^s \times (\mathbb{Z}/2)^{2l-4s} & < & \mathrm{O}(2) \wr \Sigma_l \\
\mathrm{H}_l(s) & := & \mathrm{O}(4)^s \times (\mathbb{Z}/2)^{2l-4s} & = & \mathrm{C_{O(2l)}(V_l(s))} \\
\mathrm{W}(s_1, \dots, s_a) & := & \prod_{i=1}^{a} (W_{m_i}(s_i) \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_i}) & & \\
\mathrm{V}(s_1, \dots, s_a) & := & \prod_{i=1}^{a} (V_{m_i}(s_i) \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_i}) & & \\
\mathrm{H}(s_1, \dots, s_a) & := & \prod_{i=1}^{a} (H_{m_i}(s_i) \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_i}) & = & \mathrm{C_O(V(s_1, \dots, s_a))}
\end{array}$$

Lemma 3.5. *Sei* V *in* O *eine elementar–abelsche* 2–*Gruppe. Dann ist* V *zu einer diagonalen Untergruppe* V′ *konjugiert.*

Beweis. Ein Element der Ordnung 2 in O(n) ist konjugiert zu einem Diagonalelement. Reelle Darstellungen elementar–abelscher 2–Gruppen zerfallen. □

Lemma 3.6. .

Sei $\mathrm{x} \in \mathrm{O}(2) \wr \Sigma_n$ *ein Element der Ordnung* 2. *Dann ist* x *in* $\mathrm{O}(2) \wr \Sigma_\mathrm{n}$ *konjugiert zu einem Element einer passenden Untergruppe* $\mathrm{W}_n(j)$.

Sei $\mathrm{x} \in \mathrm{N}$ *ein Element der Ordnung* 2. *Dann ist* x *in* N *konjugiert zu einem Element einer passenden Untergruppe* $\mathrm{W}(s_1, \dots, s_a)$.

Beweis. Das Resultat folgt durch eine einfache Rechnung. W ist gerade so definiert, daß diese Aussage wahr ist. □

Notation 3.7. *Sei $j : \mathrm{V} \to \mathrm{N}$ eine elementar-abelsche 2-Untergruppe. Nach den Theoremen von Lannes ([L]) und Dwyer-Zabrodsky und Notbohm ([D-Z, N 2]) kann $\mathrm{Bj}^*\alpha$ durch einen bis auf Konjugation eindeutigen Homomorphismus $\rho_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{O}$ realisiert werden.*

Lemma 3.8. *Seien U und V elementar-abelsche 2-Untergruppen in N, sei x in N ein Element der Ordnung 2.*

1. *Sei $\mathrm{x} \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. Dann sind $\rho_{\mathrm{U}}(\mathrm{x})$ und $\rho_{\mathrm{V}}(\mathrm{x})$ zueinander konjugiert. Insbesondere ist $\chi(\mathrm{x}) := spur(\rho_{\mathrm{U}}(\mathrm{x}))$ unabhängig von U und damit wohldefiniert.*

2. *Sei U eine diagonale Untergruppe in O. Dann ist ρ_{U} konjugiert zu $i : \mathrm{U} \to \mathrm{O}$.*

3. *Sei x ein Element von $\mathrm{C_O(U)}$. Dann ist $\rho(\mathrm{x})$ konjugiert zu einem Element aus $\mathrm{C_O(U)}$. (Wegen Punkt 1. können wir bis auf Konjugation von $\rho(\mathrm{x})$ sprechen.)*

Nach diesen Vorüberlegungen kommen wir jetzt zum Beweis von Satz 3.1.

Beweis. (von Satz 3.1)
Sei α eine Hochhebung von $\mathrm{Bi}_{\mathrm{F}}^*$. Wir vergleichen α mit $\mathrm{Bi}_{\mathrm{N}}^*$. Wegen Lemma 3.3 sind zwei Homomorphismen $\phi, \psi : \mathrm{H}^*(\mathrm{BO};\mathbb{Z}/2) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{BN};\mathbb{Z}/2)$ genau dann gleich, wenn für alle elementar–abelschen 2–Untergruppen $j : \mathrm{V} \to \mathrm{N}$ gilt:

$$\mathrm{Bj}^* \circ \phi = \mathrm{Bj}^* \circ \psi.$$

Wegen Lemma 3.5 werden elementar–abelsche 2–Gruppen durch Charaktere unterschieden. Daher genügt es, wenn wir Gruppen $\mathrm{V} \cong \mathbb{Z}/2$ betrachten.

Sei $\mathrm{j} : \langle \mathrm{x} \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathrm{N}$. Bis auf Konjugation liegt x in einer geeigneten Untergruppe $\mathrm{W}(s_1, \dots, s_a)$. Seien $s_1, \dots, s_a$ minimal mit der Eigenschaft, daß x zu einem Element aus $\mathrm{W}(s_1, \dots, s_a)$ konjugiert ist. Wir schreiben:

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{W} & = & \mathrm{W}(s_1, \dots, s_a) & \\ \mathrm{V} & = & \mathrm{V}(s_1, \dots, s_a) & \\ \mathrm{H} & = & \mathrm{H}(s_1, \dots, s_a) & = \mathrm{C_O(V)}. \end{array}$$

Zu der elementar–abelschen 2–Gruppe W gibt es nach 3.7 einen Homomorphismus $\rho := \rho_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{O}$, der α realisiert. Wegen Lemma 3.8 hängt $\chi(\rho(\mathrm{x}))$ von α und x, aber nicht von W ab. Wir vergleichen jetzt $\chi(\rho(\mathrm{x}))$ mit $\chi(\mathrm{i_W(x)})$ =spur(x).

ρ ist durch eine Hochhebung α von $\mathrm{Bi}_{\mathrm{F}}^*$ definiert. Da V in F enthalten ist folgt daraus $\rho|_{\mathrm{V}} = \mathrm{i_V} : \mathrm{V} \to \mathrm{O}$. Daher spaltet ρ über $\mathrm{C_O(V)} = \mathrm{H}$. Die Gruppen W, V und H sind gerade so gewählt, daß diese Aussage richtig ist.

Das Element $\mathrm{x} \in \mathrm{W}$ hat die Form

$$\mathrm{x} = (\mathrm{x_1}, \dots, \mathrm{x_a})$$

mit

$$\mathrm{x_j} = (\underbrace{(\mathrm{I_2}, \mathrm{I_2}; \tau_{1,2}), \dots, (\mathrm{I_2}, \mathrm{I_2}; \tau_{1,2})}_{\mathrm{s_j}\ \text{Stück}}, \mathrm{x_{j,4s_j+1}}, \dots, \mathrm{x_{j,n_j}}; \mathrm{t_j^{\epsilon_j}}) \in \mathrm{W_{m_j}(s_j)} \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_j}.$$

Wir betrachten auch das spezielle Element

$$\mathrm{y} = (\mathrm{y_1}, \dots, \mathrm{y_a})$$

mit

$$\mathrm{y_j} = (\underbrace{(\mathrm{I_2}, \mathrm{I_2}; \tau_{1,2}), \dots, (\mathrm{I_2}, \mathrm{I_2}; \tau_{1,2})}_{\mathrm{s}_j \text{ Stück}}, 1, \dots, 1, 1^{\epsilon_j}).$$

Da $\rho(\mathrm{y})$ in H enthalten ist, schreiben wir:

$$\rho(y) = (B_1, \dots, B_a)$$

mit

$$\mathrm{B}_j = (\mathrm{A}_1(j), \dots, \mathrm{A}_{s_j}(j), \lambda_{j,4s_j+1}, \dots, \lambda_{j,n_j}; \tau_j^{\epsilon_j}).$$

Wegen

$$\mathrm{x}_j = \underbrace{(1, \dots, 1, x_{j,4s_j+1}, \dots, x_{j,n_j}; t_j^{\epsilon_j})}_{\in(\mathbb{Z}/2)^{n_j}} \cdot \mathrm{y}_j$$

ist $\rho(\mathrm{x})$ durch $\rho(\mathrm{y})$ vollständig bestimmt:

$$\rho(\mathrm{x}) = (D_1, \dots, D_b)$$

mit

$$\mathrm{D}_j = (\mathrm{A}_1(j), \dots, \mathrm{A}_{s_j}(j), \mathrm{x}_{j,4s_j+1}\lambda_{j,4s_j+1}, \dots, \mathrm{x}_{j,n_j}\lambda_{j,n_j}; t_j^{\epsilon_j}\tau_j^{\epsilon_j}).$$

Wir können $\rho(\mathrm{x})$ noch genauer bestimmen: Das Element $\mathrm{y_j}$ ist konjugiert zu

$$\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{j} = (\underbrace{-(I_2, I_2; \tau_{1,2}), (I_2, I_2; \tau_{1,2}), \dots, (I_2, I_2; \tau_{1,2})}_{\mathrm{s_j} \text{ Stück}}, 1, \dots, 1, 1^{\epsilon}).$$

Deswegen ist $\mathrm{spur}(\mathrm{A}_1(j)) = 0$ und analog $\mathrm{spur}(\mathrm{A}_i(j)) = 0$ für alle i und j. Also gilt

$$\mathrm{spur}(\rho(\mathrm{x})) = \sum_{j=1}^{a} \Big(\sum_{r=4s_j+1}^{n_j} x_{j,r}\lambda_{j,r} \Big) + t_j^{\epsilon_j}\tau_j^{\epsilon_j}$$

Dies muß für alle Permutationen der Paare $(\mathrm{x}_{j,4s_j+1}, \mathrm{x}_{j,4s_j+2}), \dots, (\mathrm{x}_{j,2l_j-1}, \mathrm{x}_{j,2l_j})$ gleich sein. Also können wir folgern:

$$(\lambda_{j,4s_j+1}, \lambda_{j,4s_j+2}) = \dots = (\lambda_{j,l_j-1}, \lambda_{j,n_j})$$

Dieses Element $\lambda_{\mathrm{j,4s_j+1}}$ aus O(2) nennen wir $\mathrm{M_j}$. Jetzt müssen wir noch klären, wie die M_j von der Wahl der $(s_1, \dots, s_a)$ abhängen: Wir führen die selbe Überlegung wie für das Element y jetzt für das Element $\mathrm{z} = (\mathrm{z_1}, \dots, \mathrm{z_a})$ mit

$$\mathrm{z_j} = ((\mathrm{I}, \mathrm{I}; \tau_{12}), 1, \dots, 1; 1^{\epsilon_\mathrm{j}})$$

durch. Auf die gleiche Weise wie oben liefert uns das Elemente $\mathrm{M_j}(1)$ aus O(2) und $\tau_\mathrm{j}^{\epsilon_\mathrm{j}}(1)$ aus $(\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_\mathrm{j}}$. Da das Element y zu $\prod_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{a}} \mathrm{z_j^{s_j}}$ konjugiert ist können wir schließen:

$$\begin{aligned} M_j &= M_j(1)^{s_j} \\ \tau_j^{\epsilon_j} &= (\tau_j^{\epsilon_j}(1))^{s_j} \end{aligned}$$

Damit ist der Homomorphismus

$$\begin{array}{rcll} \Psi : \Sigma = \prod_{i=1}^{a} \Sigma_{m_i} & \to & \left(\prod_{i=1}^{a} O(2)^{m_i} \times (\mathbb{Z}/2)^{\epsilon_i} \right)^{\Sigma} & = E^{\Sigma} \\ \sigma_i & \mapsto & (M_i(1)^{|\sigma_i|}, \tau_i(1)^{|\sigma_i|}) & \end{array}$$

wohldefiniert und liefert das Gewünschte. $\square$

Kapitel 4

Die 2–störrischen Untergruppen von O(n)

In diesem Abschnitt untersuchen wir die 2–störrischen Untergruppen von O(n).

Definition 4.1. *Sei G eine kompakte Liesche Gruppe. Eine* p*–torale Untergruppe* P *in* G *heißt* p*–störrisch, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\mathrm{N(P)/P}$ *ist endlich.*
2. $\mathrm{N(P)/P}$ *ist* p*–reduziert. Das heißt,* $\mathrm{N(P)/P}$ *hat keine nichttriviale* p*–Gruppe als normale Untergruppe.*

Die volle Unterkategorie der Orbitkategorie $\mathcal{O}(\mathrm{G})$*, bei deren Objekten* $\mathrm{G/P}$ *die Untergruppe* P p*–störrisch ist, wird mit* $\mathcal{R}_{\mathrm{p}}(\mathrm{G})$ *bezeichnet.*

Die p–störrischen Untergruppen der klassischen Lieschen Gruppen sind von Oliver [O] explizit berechnet worden.

Definition 4.2. *(Wir beschränken uns auf den Fall* p=2*.)*

1. *Die Permutationen* $\sigma_0 \ldots, \sigma_{\mathrm{k}-1} \in \Sigma_{2^{\mathrm{k}}}$ *sind gegeben durch*

$$\sigma_{\mathrm{r}}(\mathrm{i}) = \begin{cases} i + 2^r & \text{für}\, i \equiv 1, \ldots, 2^r \qquad (mod\, 2^{r+1}) \\ i - 2^r & \text{für}\, i \equiv 2^r + 1, \ldots, 2^{r+1} \quad (mod\, 2^{r+1}) \end{cases}$$

2. *Die Matrizen* $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_{\mathrm{k}-1}, \mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_{\mathrm{k}-1} \in \mathrm{O}(2^{\mathrm{k}})$ *sind gegeben durch*

$$(\mathrm{A_r})_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} (-1)^{[(i-1)/2^r]} & \text{für}\, i = j \\ 0 & \text{für}\, i \neq j \end{cases} \quad und\ (\mathrm{B_r})_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{für}\, \sigma_r(i) = j \\ 0 & \text{für}\, \sigma_r(i) \neq j \end{cases}$$

   Sie erfüllen die Relationen
   $[\mathrm{A_r}, \mathrm{A_s}] = [\mathrm{B_r}, \mathrm{B_s}] = [\mathrm{A_r}, \mathrm{B_s}] = \mathrm{I}$ *für* $\mathrm{r} \neq \mathrm{s}$*, und* $[\mathrm{A_r}, \mathrm{B_r}] = -\mathrm{I}$.

3. *Die Untergruppen* $\mathrm{E}_{2^{\mathrm{k}}} < \Sigma_{2^{\mathrm{k}}}$ *sind gegeben durch*

$$\mathrm{E}_{2^{\mathrm{k}}} = \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{\mathrm{k}-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{k}}$$

4. *Die Untergruppen* Γ_{2^k} und $\overline{\Gamma}_{2^k} < \mathrm{O}(2^k)$ *sind gegeben durch*

$$\Gamma_{2^k} = \langle -I, A_r, B_r \mid 0 \leq r \leq k-1 \rangle$$

und

$$\overline{\Gamma}_{2^k} = \langle \alpha^{\oplus 2^{k-1}}, A_r, B_r \mid \alpha \in \mathrm{SO}(2), 0 \leq r \leq k-1 \rangle$$

Oliver zeigt, daß aus diesen einfachen Bausteinen alle 2–störrischen Untergruppen von $\mathrm{O(n)}$ konstruiert werden können.

Satz 4.3. *(Oliver [O]) Sei* $n \geq 1$.

1. *Eine irreduzible Untergruppe* $1 \neq P < O(n)$ *ist* 2*–störrisch genau dann, wenn sie konjugiert zu einem iterierten Kranzprodukt der Form*

   $P = \Gamma_{2^k} \wr E_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{r_s}}$ *mit* $n = 2^{k+r_1+\cdots r_2}, k \neq 1,$ und $r_1 \geq 2$ für $k = 0$
   oder
   $P = \overline{\Gamma}_{2^k} \wr E_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{r_s}}$ *mit* $n = 2^{k+r_1+\cdots r_2}$ *und* $k \geq 1$

   ist.

2. *Ist* $P < O(n)$ *eine beliebige* 2*–störrische Untergruppe, so ist sie konjugiert zu einer Untergruppe der Form* $P_1 \times \cdots P_s$*, wobei jedes* P_i *eine irreduzible* 2*–störrische Untergruppe in* $O(n_i)$ *ist,* $n = n_1 + \cdots n_s$*. Eine solche Untergruppe ist* 2*–störrisch genau dann, wenn es keinen Faktor* P_i *mit* $N_{G(n_i)}/P_i = 1$ *gibt, der mit der Vielfachheit* 2 *oder* 4 *auftritt.*

3. *Ist* $P < O = \prod_{i=1}^{a} O(n_i)$ 2*–störrisch, so gilt* $P = \prod_{i=1}^{a} P_i$ *mit* $P_i < O(n_i)$ 2*–störrisch.*

Bemerkung 4.4.
Bei den im ersten Punkt aufgeführten irreduziblen Untergruppen sprechen wir von 2*–störrischen Untergruppen mit Keim* Γ*, bzw.* $\overline{\Gamma}$*.*

Für unsere Konstruktionen ist die oben angegebene Normalform $P = \Gamma_{2^k} \wr E_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{r_s}}$ *(oder* $P = \overline{\Gamma}_{2^k} \wr E_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{r_s}}$*) entscheidend, nicht die Eigenschaft* 2*–störrisch.*

Wir definieren induktiv für 2–störrische Untergruppen P in O in der Normalform aus Satz 4.3 eine Untergruppe P_A von P:

Definition 4.5. *Für* $P = \Gamma_{2^k} = \langle -I, A_0, \ldots, A_{k-1}, B_0, \ldots, B_{k-1} \rangle$ *setzen wir*

$$P_A := \langle -I, A_0, \ldots, A_{k-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/2)^{k+1}.$$

Entsprechend setzen wir für $P = \overline{\Gamma}_{2^k} = \langle \alpha^{\oplus 2^{k-1}}, A_1, \ldots, A_{k-1} \rangle$

$$P_A := \langle \alpha^{\oplus 2^{k-1}}, A_0, \ldots, A_{k-1}, B_0, \ldots, B_{k-1} \rangle.$$

Damit definieren wir induktiv: Ist $P = Q \wr E_{2^k}$*, so setzen wir* $P_A := (Q_A)^{2^k}$*. Ist* $P = Q' \times Q''$*, so setzen wir* $P_A := Q'_A \times Q''_A$*.*

Die für uns wichtigen Eigenschaften der Gruppen P und $\mathrm{P_A}$ fassen wir zusammen:

Lemma 4.6. *Für jede 2–störrische Untergruppe* P *ist der Quotient* $\mathrm{P/P_A}$ *ein iteriertes Kranzprodukt elementar–abelscher 2–Gruppen.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{P_A}$. Dabei ist zu beachten, daß für $\mathrm{P} = \overline{\Gamma}_{2^k}$ in dem Quotienten $\mathrm{P/P_A}$ $A_0 = B_0$ gilt. □

Lemma 4.7. *Sei* $\alpha : \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ *ein Homomorphismus eines iterierten Kranzproduktes elementar–abelscher* p*–Gruppen in eine kompakte Liesche Gruppe. Ist* $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\alpha) = 0$ *so ist* α *konstant.*

Beweis. Die Aussage wurde von Notbohm in [N 2] bewiesen. □

Proposition 4.8. *Sei* P *in* $\mathrm{O(n)}$ *eine 2–störrische Untergruppe in der Normalform aus Satz 4.3.*

1. $\mathrm{P_A} = S \times V$ *ist ein Produkt aus einem Torus* S *und einer elementar–abelschen 2–Gruppe* V.
2. $\mathrm{C_{O(n)}(P_A)} \cong SO(2)^l \times (\mathbb{Z}/2)^{n-2l}$ *ist ebenfalls ein Produkt aus einem Torus und einer elementar–abelschen 2–Gruppe. Insbesondere gilt:*
$$\mathrm{C_{O(2^k)}((\Gamma_{2^k})_A)} \cong (\mathbb{Z}/2)^{2^k} \quad und \quad \mathrm{C_{O(2^k)}((\overline{\Gamma}_{2^k})_A)} \cong \mathrm{SO(2)}^{2^{k-1}}.$$
3. *Für jede Erweiterung* $\alpha : \mathrm{P} \to \mathrm{O(n)}$ *von* $\mathrm{i : P_A \to O(n)}$ *gilt:* $\mathrm{C_{O(n)}}(\alpha(\mathrm{P})) = \mathrm{i(Z(P))}$.
4. *Die kanonische Abbildung*
$$\pi_0(\mathrm{map(BP, BO(n)^\wedge_2)_{B\alpha|_{BP_A}=Bi}}) \to \mathrm{Hom(H^*(BO(n);\mathbb{Z}/2), H^*(BP;\mathbb{Z}/2))}$$
ist injektiv.

Notation 4.9. *Mit* $\mathrm{map(BP, \_\_)_{f|_{BP_A}=Bi}}$ *bezeichnen wir die Menge der Komponenten von* $\mathrm{map(BP, \_\_)}$*, deren Repräsentanten* f *eingeschränkt auf* $\mathrm{P_A}$ *gerade* Bi *ergeben.*

Beweis. Die Aussagen 1. und 2. sind einfache Rechnungen.
Für den Beweis der anderen beiden Aussage müssen wir die 2–störrischen Gruppen der Reihe nach durchgehen. Wir verwenden die Aussage, daß Erweiterungen $\alpha : \mathrm{P} \to \mathrm{O(n)}$ von $\mathrm{i : P_A \to O(n)}$ durch die Kohomologiegruppe
$$\mathrm{H^*(P/P_A;\, \pi_*(map(BP_A, BO(n))_{Bi}))}$$
klassifiziert werden.

a) Sei $\mathrm{P} = \Gamma_{2^k}$ in $\mathrm{O(2^k)}$. Dann ist
$$\mathrm{P/P_A} \cong \langle \mathrm{B_0, \dots, B_{k-1}} \rangle \cong \mathrm{E_{2^k}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{k}}$$
und
$$\mathrm{map(BP_A, BO(2^k))_{Bi}} \simeq \mathrm{BC_{O(2^k)}(P_A)} \simeq \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2)^{2^k}.$$

Damit werden die Erweiterungen klassifiziert durch die Kohomologiegruppe

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{E}_{2^k};(\mathbb{Z}/2)^{2^k}).$$

Wegen $(\mathbb{Z}/2)^{2^q} \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{E}_{2^{q-1}}}^{\mathrm{E}_{2^q}}(\mathbb{Z}/2)^{2^{q-1}}$ für $q > 0$ und $\mathbb{Z}/2 \cong \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{E}_1} 1$ folgt mit Shapiros Lemma

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{E}_{2^k};(\mathbb{Z}/2)^{2^k}) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{E}_{2^{k-1}};(\mathbb{Z}/2)^{2^{k-1}}) \cong \cdots \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{E}_1;(\mathbb{Z}/2)^1) \cong \mathrm{H}^1(1;1) = 0.$$

Daher ist $\mathrm{i} : \mathrm{P} \to \mathrm{O}(2^k)$ die einzige Erweiterung und beide Aussagen sind bewiesen.

b) Sei $\mathrm{P} = \overline{\Gamma}_{2^k}$ in $\mathrm{O}(2^k)$. Dann ist

$$\mathrm{P}/\mathrm{P}_\mathrm{A} \cong \langle \mathrm{B}_0,,\ldots,\mathrm{B}_{k-1}\rangle \cong \mathrm{E}_{2^k} \cong (\mathbb{Z}/2)^k$$

und

$$\mathrm{map}(\mathrm{BP}_\mathrm{A}, \mathrm{BO}(2^k))_{\mathrm{Bi}} \simeq \mathrm{BC}_{\mathrm{O}(2^k)}(\mathrm{P}_\mathrm{A})_2^\wedge \simeq (\mathrm{BSO}(2)_2^\wedge)^{2^{k-1}}.$$

Damit werden die Erweiterungen klassifiziert durch die Kohomologiegruppe

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{E}_{2^k};(\mathbb{Z}_2^\wedge)^{2^{k-1}}).$$

Diesmal ist die Operation die folgende: B_0 operiert auf jedem $\mathbb{Z}_2^\wedge$ durch Multiplikation mit -1, die anderen B_i operieren als die Permutation B_{i-1}. Daher gilt diesmal für $q > 1$:

$$(\mathbb{Z}/2)^{2^q} \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{E}_{2^{q-2}}}^{\mathrm{E}_{2^{q-1}}}(\mathbb{Z}/2)^{2^{q-1}}.$$

Also folgt mit Shapiros Lemma

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{E}_{2^k};(\mathbb{Z}_2^\wedge))^{2^{k-1}}) \cong \mathrm{H}^2(\mathrm{E}_{2^{k-1}};(\mathbb{Z}_2^\wedge))^{2^{k-2}}) \cong \cdots \cong \mathrm{H}^2(\mathrm{E}_1;\mathbb{Z}_2^\wedge).$$

Da $\mathrm{E}_1 \cong \mathbb{Z}/2$ fixpunktfrei auf $\mathbb{Z}_2^\wedge$ operiert, ist $\mathrm{H}^2(\mathrm{E}_1;\mathbb{Z}_2^\wedge) = 0$. Daher gibt es auch in diesem Fall nur die eine Erweiterung $\mathrm{i} : \mathrm{P} \to \mathrm{O}(2^k)$ und damit sind die beiden Aussagen bewiesen.

c) Sei $\mathrm{P} = \Gamma_{2^k} \wr \mathrm{E}_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr \mathrm{E}_{2^{r_s}}$.
Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach s. Der Fall a) liefert den Induktionsanfang für s=0.
Sei jetzt

$$\begin{array}{ll} Q = \Gamma_{2^k} \wr E_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{r_{s-1}}} & < O(2^l) \\ P = Q \wr E_{2_r} & < O(2^{l+r}.) \end{array}$$

Seien $\alpha, \beta : \mathrm{P} \to \mathrm{O}(2^{l+r})$ zwei Homomorphismen, für die gilt:

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\alpha) = \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\beta)$$

$$\mathrm{B}\alpha|_{\mathrm{BP}_\mathrm{A}} = \mathrm{Bi}|_{\mathrm{BP}_\mathrm{A}} = \mathrm{B}\beta|_{\mathrm{BP}_\mathrm{A}}.$$

Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{B}\alpha$ und $\mathrm{B}\beta$ homotop sind. Mit $\alpha', \beta' : \mathrm{Q}^{2^r} \to \mathrm{O}(2^{l+r})$ bezeichnen wir die Einschränkungen von α und β. Das Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{Q}^{2^r}) \cong \mathrm{Z}(\mathrm{Q})^{2^r} \cong \langle -\mathrm{I}_{2_l}\rangle^{2^r}$ liegt in P_A. Deshalb wirken α' und β' darauf wie die Identität und spalten über $\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2^{l+r})}(\mathrm{Z}(\mathrm{Q}^{2^r})) \cong \mathrm{O}(2^l)^{2^r}$. Die Hochhebungen bezeichnen wir mit $\alpha'', \beta'' : \mathrm{Q}^{2^r} \to \mathrm{O}(2^l)^{2^r}$.

Eine Anwendung des Lannes-Funktors stellt sicher, daß die induzierten Abbildungen in Kohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\alpha'')$ und $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\beta'')$ gleich sind. (Lemma 3.4 aus [N 2])

Der Homomorphismus α'' wird durch eine $(2^{\mathrm{r}} \times 2^{\mathrm{r}})$- Matrix beschrieben, deren Einträge $\alpha_{\mathrm{ij}} : \mathrm{Q_i} \to \mathrm{O}(2^{\mathrm{l}})_{\mathrm{j}}$ den i. Faktor von $\mathrm{Q}^{2^{\mathrm{r}}}$ auf den j. Faktor von $\mathrm{O}(2^{\mathrm{l}})^{2^{\mathrm{r}}}$ abbilden. β'' wird analog durch (β_{ij}) beschrieben. Wir schließen induktiv, daß $\mathrm{B}\alpha_{\mathrm{ii}}$ und $\mathrm{B}\beta_{\mathrm{ii}}$ homotop sind. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die Morphismen α_{ii} und β_{ii} gleich sind.

Sei jetzt $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$. Da die Elemente aus $\mathrm{Q_i}$ und $\mathrm{Q_j}$ in P vertauschen, spalten α_{ii} und β_{ii} über $\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2^{\mathrm{l}})_{\mathrm{j}}}(\mathrm{Q_j}) \cong \mathrm{Z}(\mathrm{Q_j}) \cong (\mathbb{Z}/2)_{\mathrm{j}}$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{ij} \cdot \beta_{ij}^{-1} : & Q_i & \to & (\mathbb{Z}/2)_j \\ & q & \mapsto & \frac{\alpha_{ij}(q)}{\beta_{ij}(q)}. \end{array}$$

Wegen $\alpha_{\mathrm{ij}}|_{(\mathrm{Q_A})_{\mathrm{i}}} = \beta_{\mathrm{ij}}|_{(\mathrm{Q_A})_{\mathrm{i}}}$ faktorisiert er über $\rho_{\mathrm{ij}} : \mathrm{Q_i}/(\mathrm{Q_A})_{\mathrm{i}} \to (\mathbb{Z}/2)_{\mathrm{j}}$. Dies liefert uns einen Homomorphismus $\rho = (\rho_{\mathrm{ij}}) : (\mathrm{Q}/\mathrm{Q_A})^{2^{\mathrm{r}}} \to (\mathbb{Z}/2)^{2^{\mathrm{r}}}$. Wir können α'' beschreiben als die Verknüpfung

$$\mathrm{Q}^{2^{\mathrm{r}}} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Q}^{2^{\mathrm{r}}} \times (\mathrm{Q}/\mathrm{Q_A})^{2^{\mathrm{r}}} \xrightarrow{\beta'' \times \rho} \mathrm{O}(2^{\mathrm{l}})^{2^{\mathrm{r}}} \times (\mathbb{Z}/2)^{2^{\mathrm{r}}} \xrightarrow{\mu} \mathrm{O}(2^{\mathrm{l}})^{2^{\mathrm{r}}}.$$

Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} H^*(B(O(2^l)^{2^r} \times (\mathbb{Z}/2)^{2^r})) \arrow[r, "(B\beta'' \times B\rho)^*"] & H^*(B(Q^{2^r} \times (Q/Q_A)^{2^r})) \arrow[d, "B\Delta^*"'] \\ H^*(BO(2^l)^{2^r}) \arrow[u, "B\mu^*"] \arrow[r, "B\alpha^* = B\beta^*"'] & H^*(BQ^{2^r}) \end{tikzcd}$$

folgt, daß $\mathrm{B}\rho^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{BQ}^{2^{\mathrm{r}}}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathrm{Q}/\mathrm{Q_A})^{2^{\mathrm{r}}})$ die Nullabbildung ist. Daraus folgt nach Lemma 4.7, daß ρ konstant ist. Also ist $\alpha'' = \beta''$.

Die Erweiterungen

$$\mathrm{B}\alpha, \mathrm{B}\beta : \mathrm{BP} \to \mathrm{BO}(2^{\mathrm{l+r}})$$

von $\mathrm{B}\alpha'' = \mathrm{B}\beta''$ werden klassifiziert durch die Kohomolgiegruppen

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{P}/\mathrm{Q}^{2^{\mathrm{r}}}; \pi_*(\mathrm{map}(\mathrm{BQ}^{2^{\mathrm{r}}}, \mathrm{BO}(2^{\mathrm{l+r}}))_{\mathrm{B}\alpha'})).$$

Dabei gilt: $\mathrm{P}/\mathrm{Q}^{2^{\mathrm{r}}} \cong \mathrm{E}_{2^{\mathrm{r}}}$ und

$$\begin{aligned} map(BQ^{2^r}, BO(2^{l+r}))_{B\alpha'} & \simeq BC_{O(2^{l+r})}(\alpha'(Q^{2^r})) \\ & \simeq BZ(Q^{2^r}) \\ & \simeq B(\mathbb{Z}/2)^{2^r}. \end{aligned}$$

Also werden die Erweiterungen wie im ersten Fall durch die Kohomologiegruppen

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{E}_{2^{\mathrm{k}}}; (\mathbb{Z}/2)^{2^{\mathrm{k}}} = 0$$

klassifiziert. Also gibt es auch hier nur eine Erweiterung und die beiden Aussagen sind somit bewiesen.

d) Sei $\mathrm{P} = \overline{\Gamma}_{2^k} \wr \mathrm{E}_{2^{r_1}} \wr \cdots \wr \mathrm{E}_{2^{r_s}}$.
Mit der gleichen Rechnung wie im Fall c) zeigen wir, daß die Erweiterungen durch die selbe Hindernisgruppe wie im zweiten Fall klassifiziert werden. Deshalb verzichten wir hier auf Details.

e) Sei $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_1 \times \ldots \times \mathrm{Q}_s < \mathrm{O}(n)$. Dann sind $\mathrm{Q}_1 < \mathrm{O}(n_1), \ldots, \mathrm{Q}_s < \mathrm{O}(n_s)$ 2–störrische Untergruppen der Form, wie wir sie in den Fällen 3 und 4 untersucht haben, $n = n_1 + \ldots + n_s$.
Seien $\alpha, \beta : \mathrm{P} \to \mathrm{O}(n)$ Homomorphismen mit

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\alpha) = \mathrm{H}^*(\mathrm{B}\beta)$$

$$\alpha|_{\mathrm{P_A}} = i|_{\mathrm{P_A}} = \beta|_{\mathrm{P_A}} : \mathrm{P_A} \to \mathrm{O}(n).$$

Die Homomorphismen α und β besitzen Hochhebungen

$$\begin{tikzcd}
 & C_{O(n)}(ZQ_1 \times \ldots \times ZQ_s) = O(n_1) \times \ldots \times O(n_s) \arrow[d] \\
Q_1 \times \ldots \times Q_s \arrow[ur, dashed, "\alpha',\beta'"] \arrow[r, "\alpha,\beta"] & O(n)
\end{tikzcd}$$

Auf α' und β' könen wir jetzt die Methoden der Fälle 3 und 4 anwenden. Dies liefert auch hier die beiden Aussagen. $\square$

Kapitel 5

Die Homotopieäquivalenz

Seien O ein Produkt Orthogonaler Gruppen, N der Normalisator des zugehörigen maximalen Torus $\mathrm{T_O}$ und BX ein 2–vollständiger Raum vom selben mod 2–Typ wie BO.

Im letzten Kapitel haben wir eine Abbildung $\mathrm{f_N} : \mathrm{BN} \to \mathrm{BX}$ konstruiert, für die das Dreieck

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{BN} \arrow[dl, "Bi_N"'] \arrow[dr, "f_N"] & \\ \mathrm{BO} \arrow[rr, dotted] & & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

in mod 2–Kohomologie kommutiert. Dies liefert für jede 2–störrische Untergruppe P von O, die in N enthalten ist, eine Abbildung $\mathrm{f_P}$ als die Verknüpfung $\mathrm{BP} \overset{\mathrm{Bi}}{\to} \mathrm{BN} \overset{\mathrm{f_N}}{\to} \mathrm{BX}$. Die Gesamtheit dieser Abbildungen liefert ein Diagramm

$$\{\mathrm{BP}\}_{\mathcal{R}_2(\mathrm{O})} \to \mathrm{BX},$$

das in mod 2 Kohomologie kommutiert. Wir zeigen jetzt, daß das Diagramm sogar bis auf Homotopie kommutiert.

Satz 5.1. *Sei* BX *ein 2–vollständiger Raum vom selben* mod–2 Typ *wie* BO*,* N *der Normalisator des maximalen Torus in* O*,* $\mathrm{c_g} : \mathrm{O/P} \to \mathrm{O/P'}$ *ein Morphismus von* $\mathcal{R}_2(\mathrm{O})$*, gegeben durch Konjugation. Dann kommutiert das Diagramm*

$$(\mathbf{D}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{BP} \arrow[r, "Bi"] \arrow[d, "Bc_g"'] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{BP'} \arrow[r, "Bi'"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie.

Die Aussage ergibt sich aus den beiden folgenden Propositionen

Proposition 5.2. *In der Situation aus Satz 5.1 kommutiert das Diagramm bis auf Homotopie, wenn wir es auf* $\mathrm{P_A}$ *einschränken:*

$$(\mathbf{D_A}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{BP_A} \arrow[r, "Bi_A"] \arrow[dr, "Bc_g"'] & \mathrm{BP} \arrow[r, "Bi"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \arrow[d, equal] \\ & \mathrm{BP'} \arrow[r, "Bi'"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage getrennt für 2–störrische Untergruppen mit Keim Γ oder $\overline{\Gamma}$.

1. Für eine 2–störrische Gruppe P mit Keim Γ ist P_A eine elementar-abelsche 2–Gruppe. Daher kommutiert $(\mathbf{D_A})$ genau dann bis auf Homotopie, wenn es in mod–2 Kohomologie kommutiert. Dies ist nach Satz 3.2 erfüllt.

2. Für eine 2–störrische Gruppe P mit Keim $\overline{\Gamma}$

$$P = \overline{\Gamma}_{2^k} \wr E_{2^{q_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{q_s}} \quad \text{in} \quad O(\underbrace{2^{k+\overbrace{q_1 + \cdots + q_s}^{q:=}}}_{2n:=})$$

ist $P_A = \langle \alpha^{\oplus 2^{k-1}}, A_1, \dots, A_{k-1} \rangle^{2n}$.

Wir betrachten die Untergruppe $\mathcal{D} = \langle \alpha^{\oplus n} \rangle \cong SO(2) < O(2n)$. Wir wissen, daß $c_g(\mathcal{D})$ in N liegt. Da $c_g(\mathcal{D})$ zusammenhängend ist, liegt es in der Komponente der 1 in N, also in $T_{O(2n)} = SO(2)^n$. Also ist $c_g(\alpha^{\oplus n})$ eine (2×2)–Block–Diagonalmatrix mit α^{k_i} auf der Diagonalen.

Die Exponenten k_i können nur die Werte 1 und -1 annehmen: Ist $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{smallmatrix}\right)$, so gilt wegen der Invarianz der Spur

$$2n \cos(\phi) = 2 \sum_{i=1}^{n} \cos(k_i \phi).$$

Da dies insbesondere für kleine Winkel ϕ gelten muß, können wir nach Taylor $\cos(x)$ durch $1 - x^2/2 + x^4/24$ approximieren und erhalten $n = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^4$. Daraus folgt die Behauptung. Konjugation mit einem geeigneten Element $m \in O(2)^n$ liefert also $c_{mg}(\alpha^{\oplus n}) = \alpha^{\oplus n}$. Da für $m \in O(2)^n$ das Diagramm kommutiert, außerdem alle Elemente $A_1, \dots, A_{k-1}$ fix bleiben, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß g in $C_{O(2n)}(\mathcal{D})$ liegt.

Durch elementare Matrizenrechnung erhalten wir

$$C_{O(2n)}(\mathcal{D}) = \{(A_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in O(2n) \mid A_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\}.$$

Dies ist das Bild der wohlbekannten Inklusion $j : U(n) \hookrightarrow O(2n)$, induziert durch $re^{i\phi} \mapsto \sqrt{r}\left(\begin{smallmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{smallmatrix}\right)$. Also gilt

$$C_{O(2n)}(\mathcal{D}) \cong U(n).$$

In U(n) wissen wir aber, daß wir die Konjugation durch eine Konjugation mit einem Element des Normalisators des maximalen Torus ersetzen können. Dieses Element transportieren wir nach O(2n) zurück: Wir wenden j^{-1} auf den Morphismus $c_g : P_A \xrightarrow{\cong} c_g(P_A)$ in O(2n) an und erhalten den Morphismus $c_{j^{-1}(g)} : j^{-1}(P_A) \xrightarrow{\cong} c_{j^{-1}(g)}(j^{-1}(P_A))$ in U(n). Dort können wir das Element $j^{-1}(g)$ durch ein Element u des Normalisators des Torus $N_{U(n)}T = U(1) \wr \Sigma_n$ ersetzen. Mit dem Element $v := j(u)$ aus $j(U(1) \wr \Sigma_n) = SO(2) \wr \Sigma_n$

erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$(\mathbf{D_A})\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{BP_A} \arrow[r, "Bi_A"] \arrow[dr, "Bc_g"'] & \mathrm{BP} \arrow[r, "Bi"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] \arrow[d, "Bc_v \simeq id"] & \mathrm{BX} \arrow[d, equal] \\ & \mathrm{BP'} \arrow[r, "Bi'"] & \mathrm{BN} \arrow[r, "f_N"] & \mathrm{BX} \end{tikzcd}$$

3. Sei P eine 2–störrische Gruppe der Form $\mathrm{P} = \mathrm{Q_1} \times \mathrm{Q_2}$. Wegen $(\mathrm{P} \wr \mathrm{E_{2^k}})_\mathrm{A} = (\overbrace{P \times \ldots P}^{2^\mathrm{k}})$ lassen sich die Methoden der ersten beiden Fälle nur dann nicht direkt übertragen, wenn wir das Produkt von 2–störrischen Untergruppen mit unterschiedlichen Keimen betrachten. Sei deshalb $\mathrm{Q_1} < \mathrm{O(k)}$ 2–störrisch mit Keim Γ und $\mathrm{Q_2} < \mathrm{O(2l)}$ 2–störrisch mit Keim $\overline{\Gamma}$. Wir setzen
$$\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} I_k & \\ & \alpha^{\oplus l} \end{pmatrix} \rangle$$
und erreichen mit den Methoden aus Fall 2 ohne Einschränkung, daß g ein Element von $\mathrm{C_{O(k+2l)}}(\mathcal{B}) \cong \mathrm{O(k)} \times \mathrm{U(l)}$ ist. Damit haben wir das Problem auf die Fälle 1 und 2 zurückgeführt. $\square$

Proposition 5.3. *In der Situation aus Satz 5.1 ist die kanonische Abbildung*
$$\pi_0(\mathrm{map(BP,BX)_{B\alpha|_{BP_A}=f_N Bi_P|_{BP_A}}}) \to \mathrm{Hom(H^*(BX;\mathbb{Z}/2), H^*(BP;\mathbb{Z}/2))}$$
injektiv.

Beweis. Wir beweisen die Aussage, indem wir einen Zusammenhang zwischen den Abbildungsräumen $\mathrm{map(BP,BO)}$ und $\mathrm{map(BP,BX)}$ herstellen. Für $\mathrm{map(BP,BO)}$ gilt die entsprechende Aussage nach Proposition 4.8.
Die Untergruppe $\mathrm{P_A}$ ist eine normale Untergruppe in P. Der Quotient $\mathrm{Q = P/P_A}$ operiert auf dem erweiterten klassifizierenden Raum $\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A} := \mathrm{EP/P_A} \simeq \mathrm{BP_A}$ und auf $\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, -) \simeq \mathrm{map(BP_A}, -)$. Es gilt $\mathrm{map(BP}, -) \simeq \mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, -)^{\mathrm{hQ}}$.

Wir betrachten jetzt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & map(\widetilde{BP}_A, BN_2^\circ)_{Bi_{P_A}} \arrow[dl, "(Bi_N)_\sharp"'] \arrow[dr, "(f_N)_\sharp"] & \\ map(\widetilde{BP}_A, BO_2^\wedge)_{Bi_N \circ Bi_{P_A}} & & map(\widetilde{BP}_A, BX)_{f_N \circ Bi_{P_A}} \end{tikzcd}$$

Es gilt $\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BN}_2^\circ)_{\mathrm{Bi_{P_A}}} \simeq \mathrm{BC_L(P_A)}_2^\wedge \simeq \mathrm{B(S \times V)}_2^\wedge$, da alle Abbildungen Hochhebungen besitzen:

$$\begin{tikzcd} & BL_2^\wedge \arrow[d] \\ BP_A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & BN_2^\circ \arrow[d] \\ & B\Sigma. \end{tikzcd}$$

Wir verwenden die Identitäten

$$\mathrm{C_X(P_A) = C_{C_X(V)}(P_A) = C_{O(2)^n}(P_A) = S \times V}$$

und zeigen damit

$$\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_{P_A}}} \simeq \mathrm{B(S \times V)}_2^\wedge.$$

Es gilt also

$$\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BN}_2^\circ)_{\mathrm{Bi_{P_A}}} \simeq \mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BO}_2^\wedge)_{\mathrm{Bi_{P_A}}} \simeq \mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_{P_A}}} \simeq \mathrm{B(S \times V)}_2^\wedge.$$

Die Abbildungen $(\mathrm{f_N})_\sharp$ und $(\mathrm{Bi_N})_\sharp$ sind mod–2 Äquivalenzen zwischen 2–vollständigen Räumen, also Homotopieäquivalenzen. Daher erhalten wir, wenn wir Homotopiefixpunkte auf das Diagramm anwenden, wieder ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & map(\widetilde{BP}_A, BN)^{hQ}_{Bi_{P_A}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
map(\widetilde{BP}_A, BO)^{hQ}_{Bi_N \circ Bi_{P_A}} & & map(\widetilde{BP}_A, BX)^{hQ}_{f_N \circ Bi_{P_A}}
\end{tikzcd}$$

in dem beide Abbildungen mod–2 Äquivalenzen sind.

Die Komponenten von $\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BO})^{\mathrm{hQ}}_{\mathrm{Bi_N \circ Bi_{P_A}}}$ werden durch mod–2 Kohomologie unterschieden. Das Dreieck

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{BN} \arrow[dl, "Bi_N"'] \arrow[dr, "f_N"] & \\
\mathrm{BO} \arrow[rr, dotted] & & \mathrm{BX}
\end{tikzcd}$$

kommutiert in mod–2 Kohomologie. Jede Abbildung in

$$\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BX})^{\mathrm{hQ}}_{\mathrm{f_N \circ Bi_{P_A}}} \simeq \mathrm{map(BP, BX)}_{\mathrm{g|_{BP_A} \simeq Bf_N \circ Bi_{P_A}}}$$

besitzt eine Hochhebung nach BN. Die Kohomologiegruppen, die die Erweiterungen klassifizieren, sind isomorph:

$$\begin{aligned} H^*(Q; \pi_*(map(BP_A, BX)_{f_N \circ Bi_{P_A}})) &\cong H^*(Q; \pi_*(BC_O(P_A)) \\ &\cong H^*(Q; \pi_*(map(BP_A, BO)_{Bi_N \circ Bi_{P_A}})) \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß auch die Komponenten von

$$\mathrm{map}(\widetilde{\mathrm{BP}}_\mathrm{A}, \mathrm{BX})^{\mathrm{hQ}}_{\mathrm{f_N \circ Bi_{P_A}}} \simeq \mathrm{map(BP, BX)}_{\mathrm{g|_{BP_A} \simeq Bf_N \circ Bi_{P_A}}}$$

durch mod–2 Kohomologie unterschieden werden. □

Dieses Resultat liefert eine Abbildung von dem 1–Gerüst des Homotopie–Kolimes $\mathrm{hol}\underset{\overrightarrow{\mathcal{R}_2(O)}}{\mathrm{im}} BP$ nach BX. Diese wollen wir auf den Homotopie–Kolimes, nämlich BO, fortsetzen. Um dies zu tun, müssen wir die Hindernisgruppen $\underset{\overleftarrow{\mathcal{R}_2(O)}}{\mathrm{lim}}^{\mathrm{i+1}} \pi_\mathrm{i}(\mathrm{map(BP, BX)_{f_P}})$ für

$i \geq 1$ berechnen. Dazu vergleichen wir die Funktoren

$$\begin{array}{llll} \Pi_i(\mathcal{X}), \Pi_i(\mathcal{O}): & \mathcal{R}_2(\mathrm{O}) & \to & \mathcal{AB} \\ & \Pi_i(\mathcal{O})(\mathrm{O}/\mathrm{P}) & := & \pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BO})_{\mathrm{Bi_P}}) \\ & \Pi_i(\mathcal{X})(\mathrm{O}/\mathrm{P}) & := & \pi_{\mathrm{i}}(\mathrm{map}(\mathrm{BP}, \mathrm{BX})_{\mathrm{f_P}}) \end{array}$$

Proposition 5.4. *Es existiert eine natürliche Äquivalenz von Funktoren*

$$\mathcal{T}: \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{O}) \to \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{X}).$$

Beweis. Die Homotopieäquivalenzen $\mathrm{Bi_{N\sharp}}$ und $\mathrm{f_{N\sharp}}$ aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} (map(BP, BN)_{Bi_P})^{\wedge}_2 \arrow[r, "f_{N\sharp}"] \arrow[d, "Bi_{N\sharp}"] & map(BP, BX)_{f_P} \\ map(BP, BO^{\wedge}_2)_{Bi_P} & \end{tikzcd}$$

hängen noch von der Auswahl der Hochhebung $\mathrm{i_P}: \mathrm{P} \to \mathrm{N}$ von $\mathrm{i_P}: \mathrm{P} \to \mathrm{G}$ ab. Zwei solche Hochhebungen können sich aber nur um eine Konjugation unterscheiden. Daher induziert das Diagramm wegen Satz 5.1 einen wohldefinierten Isomorphismus

$$\mathcal{T}: \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{O}) \to \Pi_{\mathrm{i}}(\mathcal{X}).$$

□

Um die Notation übersichtlich zu halten, unterscheiden wir die beiden Funktoren jetzt nicht mehr und bezeichnen beide als Π_{i}. Damit ist das Problem auf die Berechnung von $\varprojlim^{\mathrm{j}}_{\mathcal{R}_2(O)} \Pi_{\mathrm{i}}$ zurückgeführt. Da

$$\mathcal{R}_2(\mathrm{G} \times \mathrm{H}) \cong \mathcal{R}_2(\mathrm{G}) \times \mathcal{R}_2(\mathrm{H})$$

gilt, müssen wir $\varprojlim^{\mathrm{j}}_{\mathcal{R}_2(O(n))} (\Pi_{\mathrm{i}})$ berechnen.

Satz 5.5. *Es gilt:*

$$\varprojlim^{\mathrm{j}}_{\mathcal{R}_2(O(n))} \Pi_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \pi_{\mathrm{i}-1}(\mathrm{Z}(\mathrm{O}(\mathrm{n}))) & \text{falls } j = 0 \\ 0 & \text{falls } j > 0. \end{cases}$$

Beweis. Dieses Resultat beweisen wir im nächsten Kapitel. □

Insgesamt ist damit die Existenz einer Abbildung $\mathrm{f}: \mathrm{BO}^{\wedge}_2 \to \mathrm{BX}$ nachgewiesen. Nach Konstruktion induziert sie einen Isomorphismus in mod–2 Kohomologie, ist also die gesuchte Homotopieäquivalenz. Damit ist die Homotopieeindeutigkeit von BO an der Primzahl 2 bewiesen!

Kapitel 6

Die höheren Limites

In diesem Kapitel berechnen wir die Hindernissgruppen aus Kapitel 5. Damit vollenden wir unsere Konstruktion. Wir beweisen

Satz 6.1. *Sei* Π_i *der Funktor* $\Pi_\mathrm{i}(\mathrm{O/P}) := \pi_\mathrm{i}(\mathrm{map}(\mathrm{BP},\mathrm{BO})_{\mathrm{Bi_P}})$*. Dann gilt*

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^{\mathrm{j}} (\Pi_\mathrm{i}) = \begin{cases} \pi_{\mathrm{i}-1}(Z(O(n))) & j=0 \\ 0 & j>0. \end{cases}$$

Für $\mathrm{i} \geq 2$ ist diese Aussage bekannt (Theorem 4.1 aus [J-M-O]). Für den Beweis im Fall i=1 untersuchen wir die Kapitel 5 und 6 der Arbeit von Jackowski, McClure und Oliver [J-M-O]. Dort wird eine entsprechende Aussage für zusammenhängende, einfach zusammenhängende Gruppen bewiesen. Viele der dort für zusammenhängende Gruppen formulierte Resultate sind auch für O(n) richtig. Lediglich an zwei Stellen ergeben sich Unterschiede. Wir werden zeigen, daß sich dennoch die gewünschte Aussage ergibt.

Dieser Beweisgang beruht auf einer Idee von Oliver [O 2], der auf genau diese Weise den obigen Satz für SO(n) bewiesen hat.

Zunächst zitieren wir die für uns wichtigen Definitionen und Resultate aus [J-M-O].

Definition 6.2. *(***Definition 5.3** [J-M-O]*)*
Sei p eine Primzahl und Γ *eine endliche Gruppe. Für einen* $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}[\Gamma]$*–Modul M sei der Funktor* $\mathrm{F_M}$ *gegeben durch* $\mathrm{F_M}(\Gamma/1) = \mathrm{M}$ *und* $\mathrm{F_M}(\Gamma/\mathrm{P}) = 0$ *für* $1 \neq \mathrm{P} \in \mathcal{R}_\mathrm{p}(\Gamma)$*. Wir definieren:*

$$\Lambda^*(\Gamma;\mathrm{M}) := \varprojlim_{\mathcal{R}_p(\Gamma)}{}^{*} \mathrm{F_M}.$$

Lemma 6.3. *(***Lemma 5.4** [J-M-O]*)*
Sei p *eine Primzahl,* G *eine kompakte Liesche Gruppe und* $\mathrm{F}: \mathcal{R}_\mathrm{p}(\mathrm{G}) \to \mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ *ein kovarianter Funktor mit der Eigenschaft* F(G/H)=0 *für alle* $(\mathrm{H}) \neq (\mathrm{P})$ *für ein Objekt* G/P *in* $\mathcal{R}_\mathrm{p}(\mathrm{G})$*. Dann gilt*

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_p(G)}{}^{*} \mathrm{F} = \Lambda^*(\mathrm{NP/P};\mathrm{F(G/P)}).$$

Unser Programm ist, die Gruppen $\Lambda^*(\mathrm{NP/P};\Pi_\mathrm{i}(\mathrm{G/P}))$ zu berechnen. Mit der langen exakten Sequenz für Funktoren können wir diese Einzelergebnisse dann zusammensetzen.

Wir betrachten diejenigen 2–störrischen Untergruppen in $O(n)$, die für gerades n den maximalen Torus T_n von $O(n)$, für ungerades n den „erweiterten maximalen Torus“ $T_{n-1} \times \mathbb{Z}/2$ enthalten. Um diese Fallunterscheidung zu vermeiden, vereinbaren wir die folgende Bezeichnung:

Definition 6.4. *Sei* T *in* $O(n)$ *maximaler Torus. Wir definieren* $\tilde{T}$ *in O(n) durch*

$$\tilde{T} = \begin{cases} T & n \text{ gerade} \\ T \times \mathbb{Z}/2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir sagen: S ist ein erweiterter maximaler Torus von O(n), wenn S zu $\tilde{T}$ *konjugiert ist.*

Satz 6.5. *Sei* $\hat{\Pi}_i$ *der Unterfunktor von* Π_i*, der gegeben ist durch*

$$\hat{\Pi}_i(O(n)/P) := \begin{cases} \Pi_i(O(n)/P) & \text{falls } (P) \not\supset (\tilde{T}) \\ 0 & \text{falls } (P) \supset (\tilde{T}) \end{cases}$$

Dann gilt

$$\underset{\mathcal{R}_2 O}{\underleftarrow{lim}}^j \Pi_i/\hat{\Pi}_i \cong \begin{cases} \pi_{i-1}(Z(N(\tilde{T}))) & \text{falls } j = 0 \\ 0 & \text{falls } j > 0 \end{cases}$$

Beweis. Dies ist die erste Aussage des Lemmas 5.6 aus [J-M-O]. Sie wird dort für eine kompakte zusammenhängende Gruppe G bewiesen. Die Tatsache, daß G zusammenhängend ist, geht nur an einer Stelle in den Beweis ein: Für zusammenhängende Gruppen G ist immer $C_G(T) = T$. Für den normalen maximalen Torus T in $O(2n+1)$ ist dies falsch, aber $\tilde{T}$ ist gerade so definiert, daß $C_O(n)(\tilde{T}) = \tilde{T}$ auch bei uns gilt. Daraus folgt für eine Gruppe P mit $T < P < N(T)$ und $C_G(P) = Z(P)$:

$$T^P \subseteq P^P = Z(P) = C_G(P) = (C_G(P))^P \subseteq (C_G(T))^P = T^P,$$

Insbesondere folgt daraus die im Beweis verwendete Identität $Z(P) = T^P$. □

Jetzt kommen wir zu den 2–störrischen Untergruppen P in $O(n)$, die den erweiterten Torus $\tilde{T}$ nicht enthalten. Zu diesem Zweck betrachten wir die 2–kritischen Untergruppen in $O(n)$. In deren Definition bezeichnet $Fr(P)$ die Frattini Untergruppe von P. Sie wird von allen Kommutatoren und p–ten Potenzen erzeugt. Die Gruppe ${}_pZ(P)$ bezeichnet die zentralen Elemente der Ordung p in P.

Definition 6.6. *(***Definition 6.5***[J-M-O])*
Sei G *eine kompakte Liesche Gruppe. Eine* p*–torale Untergruppe* P *heißt* p*–kritisch in* G*, wenn der Kern der* $N(P)/P$*–Operation auf*

$${}_pZ(P)\Big/(Fr(P) \cap {}_pZ(P)) \quad \text{oder} \quad (Fr(P) \cap {}_pZ(P))\Big/(P_0 \cap {}_pZ(P))$$

Ordung prim zu p *hat.*

Proposition 6.7. *Sei* P *eine 2–torale Untergruppe von* $O(n)$*, die* $\tilde{T}$ *nicht enthält. Dann gilt:*

1. *Ist* $\Lambda^*(\mathrm{N(P)/P};\pi_0(\mathrm{Z(P)}))\neq 0$ *(und N(P)/P endlich), so ist* P *2–kritisch in O(n).*
2. *Ist* P *2–kritisch in* O(n)*, so ist* $\mathrm{C_{O(n)}(P)=Z(P)}$ *und* P *ist eine maximale 2–torale Untergruppe von* $\mathrm{C_{O(n)}({}_pZ(P))}$*. Die Gruppe* $\mathrm{{}_pZ(P)}$ *ist nicht in einem erweiterten maximalen Torus von* O(n) *enthalten.*

Beweis. Dieses sind die ersten beiden Aussagen der Proposition 6.6 aus [J-M-O]. Sie werden dort nur für zusammenhängende Gruppen und den normalen maximalen Torus T formuliert. Der Beweis überträgt sich aber ohne Änderung auf unsere Situation. Wir müssen lediglich zusätzlich die Gruppe $\mathrm{SO(2)^n}$ in O(2n+1) betrachten: Sie enthält den Torus T, aber nicht den erweiterten Torus $\tilde{\mathrm{T}}$. Für sie kann man aber alle Schritte explizit nachrechnen. □

Von den 2–störrischen Untergruppen in O(n), die $\tilde{\mathrm{T}}$ nicht enthalten, liefern also nur die 2–kritischen einen Beitrag. Diese berechnen wir jetzt.

Lemma 6.8. *Für* $\mathrm{n}\geq 3$ *hat jede 2–kritische Untergruppe P in O(n) die Form*

$$\mathrm{P}\cong(\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{m}}\times\mathrm{P}'.$$

wobei (n-m) gerade und P' *eine maximale 2–torale Untergruppe in O(n-m) ist.*

Beweis. Nach Proposition 6.7 ist P eine maximale 2–torale Untergruppe in $\mathrm{C_{O(n)}({}_2Z(P))}$. Da $\mathrm{{}_2Z(P)}$ eine elementar–abelsche 2–Gruppe ist, ist $\mathrm{C_{O(n)}({}_2Z(P))}$ ein Produkt orthogonaler Gruppen. Also hat P die Form $\mathrm{P}\cong(\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{m}}\times\mathrm{P_1}\times\cdots\times\mathrm{P_t}$, wobei $\mathrm{P_i}$ eine maximale Untergruppe von $\mathrm{O(n_i)}$ ist $(\mathrm{n}=\mathrm{m}+\mathrm{n_1}\cdots+\mathrm{n_t})$. Wir können annehmen, daß alle irreduziblen Faktoren $\mathbb{Z}/2$ im ersten Faktor versammelt sind, insbesondere sind also die $\mathrm{n_i}$ gerade.

Wir setzen $\mathrm{P}'=\mathrm{P_1}\times\cdots\times\mathrm{P_t}$. Dann gilt

$$\mathrm{N_{O(n)}(P)}\Big/\mathrm{P}=\mathrm{N_{O(n)}}((\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{m}}\times\mathrm{P}')\Big/((\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{m}}\times\mathrm{P}')\cong\Sigma_{\mathrm{m}}\times\mathrm{N_{O(n-m)}(P')}\Big/\mathrm{P}'.$$

Da P' in O(n-m) nach Konstruktion einen maximalen Torus enthält, liegt $\mathrm{Z(P')}$ in der Komponente der 1, das heißt in $(\mathrm{P}')_0$. Da P 2–kritisch ist, hat der Kern der N(P)/P–Operation auf

$$\mathrm{{}_2Z(P)}\Big/(\mathrm{Fr(P)}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})\ \text{oder}\ (\mathrm{Fr(P)}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})\Big/(\mathrm{P_0}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})$$

ungerade Ordnung. Aus der exakten Sequenz

$$(\mathrm{Fr(P)}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})\Big/(\mathrm{P_0}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})\to{}_2\,\mathrm{Z(P)}\Big/(\mathrm{P_0}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})\to{}_2\,\mathrm{Z(P)}\Big/(\mathrm{Fr(P)}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})$$

folgt, daß damit auch der Kern der N(P)/P–Operation auf $\mathrm{{}_2Z(P)}\Big/(\mathrm{P_0}\cap\mathrm{{}_2Z(P)})$ ungerade Ordnung hat. Die Gruppe $\mathrm{N(P')/P'}$ ist in diesem Kern enthalten, hat also ungerade Ordung. Also muß P' in O(n-m) eine maximale 2–torale Untergruppe sein. □

Jetzt benötigen wir noch ein technisches Resultat:

Proposition 6.9. *Sei* $\mathrm{n} \geq 3$. *Dann gilt*

$$\Lambda^{\mathrm{i}}(\Sigma_{\mathrm{n}}; (\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{n}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{falls } n=3,\ i=1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $\mathrm{n} \geq 4$ folgt die Aussage aus Proposition 6.1.(ii) ([J-M-O]), da Σ_{n} für $\mathrm{n} \geq 4$ nicht 2–reduziert ist. Für n=3 folgt die Aussage aus Proposition 6.2 ([J-M-O]), da die 2–Sylow–Gruppe Γ_2 in Σ_3 isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ ist, also Ordnung 2 hat. Dann gilt

$$\Lambda^{\mathrm{i}}(\Sigma_3; (\mathbb{Z}/2)^3) = \begin{cases} ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Gamma_2} \Big/ ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Sigma_3} & \text{falls } i=1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Damit können wir Satz 5.5 beweisen.

Beweis. Wir berechnen $\Lambda^*(\mathrm{N(P)/P}; \Pi_1(\mathrm{O(n)/P}))$ für alle 2–störrischen Untergruppen P, die keinen erweiterten Torus $\tilde{\mathrm{T}}$ enhalten. Nach Proposition 6.7 können wir uns dabei auf die 2–kritischen Untergruppen beschränken.

Sei P in O(n) eine 2–kritische Untergruppe. Nach Lemma 6.8 hat P die Form $\mathrm{P} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathrm{m}} \times \mathrm{P}'$ mit $\mathrm{m} \geq 2$. Aus dem Beweis wissen wir, daß

$$\mathrm{N_{O(n)}(P)/P} \cong \Sigma_{\mathrm{m}} \times \mathrm{N_{O(n-m)}(P')/P'}$$

gilt und $\mathrm{N_{O(n-m)}(P')/P'}$ ungerade Ordnung hat. Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\Lambda^i(N(P)/P; \Pi_1(O(n)/P)) &\cong \Lambda^i(N(P)/P; \hat{\Pi}_1(O(n)/P)) \\
&\cong \Lambda^i(N(P)/P; Z(P)) \\
&\cong \Lambda^i(\Sigma_m \times N_{O(n-m)}(P')/P'; (\mathbb{Z}/2)^m \times Z(P')) \\
&\cong \Lambda^i(\Sigma_m \times N_{O(n-m)}(P')/P'; (\mathbb{Z}/2)^m) && 6.1.\text{(iv) aus } [\mathrm{J-M-O}] \\
&\cong \Lambda^i(\Sigma_m; (\mathbb{Z}/2)^m) && 6.1.\text{(iii) aus } [\mathrm{J-M-O}] \\
&\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{falls } m=3,\ i=1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die zweit- bzw. drittletzte Isomorphie folgen aus 6.1.(iii) bzw. 6.1.(iv) aus [J-M-O]. Also liefert nur die Gruppe $\mathrm{P}_3 := (\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathrm{P}'$ einen Beitrag. Insbesondere ist dann n ungerade.

Wir untersuchen jetzt die lange exakte Sequenz von Funktoren mit dem in Satz 6.5 definierten Funktor $\hat{\Pi}_1$.

$$\cdots \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \hat{\Pi}_1 \to \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \Pi_1 \to \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \Pi_1/\hat{\Pi}_1 \to \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j+1}} \hat{\Pi}_1 \cdots .$$

Wir untersuchen getrennt die Fälle, in denen n gerade oder ungerade ist: Sei n gerade. Dann gilt $\mathrm{Z(N(\tilde{T}))} = \mathrm{Z(O(n))}$. Weiter ist in diesem Fall $\lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \hat{\Pi}_1 = 0$ für alle j, und deshalb $\lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \Pi_1 \cong \lim\limits_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{R}_2(O(n))}}{}^{\mathrm{j}} \Pi_1/\hat{\Pi}_1$. Daraus folgt die Behauptung.

Sei jetzt n ungerade. Die Sequenz beginnt dann mit

$$0 \to \varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^0 \Pi_1 \to \varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^0 \Pi_1/\hat{\Pi}_1 \xrightarrow{\iota} \varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^1 \hat{\Pi}_1 \to \varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^1 \Pi_1 \to 0$$

Dabei ist

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^0 \Pi_1/\hat{\Pi}_1 \cong \mathrm{Z}(\mathrm{N}(\tilde{\mathrm{T}})) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

und

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^1 \hat{\Pi}_1 \cong ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Gamma_2} \Big/ ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Sigma_3} \cong \mathbb{Z}/2$$

Die Abbildung ι ist gegeben durch

$$\begin{array}{lcl} Z(N(\tilde{T})) & \to & ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Gamma_2} \Big/ ((\mathbb{Z}/2)^3)^{\Sigma_3} \\ (-1, \cdots, \quad -1) & \mapsto & (-1,-1,-1) = 1 \\ (-1, \cdots, -1, 1) & \mapsto & (-1,-1,1) = -1 \end{array}$$

Also gilt

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^0 \Pi_1 \cong \mathrm{Ker}(\iota) \cong \langle(-1, \cdots, -1)\rangle \cong \mathrm{Z}(\mathrm{O(n)})$$

und

$$\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^1 \Pi_1 = 0.$$

Da die $\varprojlim_{\mathcal{R}_2(O(n))}{}^{\mathrm{j}} \Pi_1$ für $\mathrm{j} \geq 2$ genau wie für gerade n verschwinden, ist damit die Aussage bewiesen. $\square$

Literaturverzeichnis

[B-K] A. Bousfield and D. Kan: *Homotopy limits, completion, and localisations*
SLNM 304, Springer Verlag (1972)

[D-M-W] W.G. Dwyer, H. Miller and C.W. Wilkerson: *The homotopical uniqueness of classifying spaces*
Topology 31, S. 29–45 (1992)

[D-W] W.G Dwyer and C.W. Wilkerson: *Homotopy fixed point methods for Lie groups and finite Loop spaces*
Annals of Math. 139, S. 395–442 (1994)

[D-Z] W.G. Dwyer and A. Zabrodsky: *Maps between classifying spaces*
Algebraic Topology, Barcelona 1986, SLNM 1298, S. 106–119

[J-M-O] S. Jackowski, J. McClure, R. Oliver: *Homotopy classification of self maps of BG via G actions*
Ann. Math 135, S. 183–270 (1992)

[L] J. Lannes: *Sur les espaces fonctionelles dont la source est la classifiant d'un* p–*groupe abélien éleméntaire*
Publ. Math. IHES 75, S. 135–244 (1992)

[M] H. Morgenroth: *Homotopieeindeutigkeit von Produkten zweidimensionaler orthogonaler Gruppen*
Diplomarbeit, Göttingen (1993)

[MacL] S. MacLane: *Homology*
Springer Verlag (1963)

[N 1] D. Notbohm: *Maps between classifying spaces*
Math. Z. 207, S. 153–186 (1991)

[N 2] D. Notbohm: *Homotopy uniqueness of Classifying Spaces of compact Lie Groups at primes dividing the order of the Weyl Group*
Topology 33, S. 271–330 (1994)

[O] R. Oliver: *p–stubborn subgroups of the classical compact Lie groups*
Journal of Pure and Applied Algebra 92, S. 55–78 (1994)

[O 2] R. Oliver: *Higher Limits for self maps of SO(n)*
Unveröffentlicht

[Q] D. Quillen: *The Adams Conjeture*
Topology 10, S.67-80 (1971)

[St] J.D. Stasheff: *A classification theorem of fibre spaces*
Topology 2, S.239–246 (1963)

[Wh] G.W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory*
Springer Verlag (1978)

[Wo] Z. Wojtkowiak: *On maps from holim F to Z*
Algebraic Topology, Barcelona 1986, SLNM 1298, S. 227–236

Lebenslauf:

3. 11. 63	Geburt in Bad Harzburg

Besuchte Schulen:

1969 - 73	Frithjof Nansen Schule in Kassel
1973 - 79 und 1980 - 1983	Wilhelmschule in Kassel
1979 - 80	Bradley-Bourbonnais Community High School in Illinois, USA
1. Juni 1983	Abitur

Studium:

Ab WS 83/84	an der Georg–August–Universität Göttingen
17. Februar 1986	Vordiplom Mathematik
29. Oktober 1993	Diplom Mathematik

Wehrdienst, Zivildienst:

1. April 1986 - 9. Juli 1986	Grundwehrdienst in Schwalmstadt
10. Juli 1986 - 30. November 1987	Zivildienst bei der Selbsthilfe Körperbehinderter in Göttingen

Beschäftigungen:

WS 87/88 - SS 90, SS 91	Hiwi am Mathematischen Institut
Dezember 1993 - Dezember 1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter am SFB 170
Seit Januar 1996	wissenschaftlicher Mitarbeiter eines DFG-Projektes