La fonction génératrice de Minc et une "conjecture de Segal" pour certains spectres de Thom

Nguyen Dang Ho Hai, Lionel Schwartz, Tran Ngoc Nam

12 février 2009

Résumé

On construit dans cet article une résolution injective minimale dans la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo 2, de la cohomologie de certains spectres obtenus à partir de l'espace de Thom du fibré, associé à la représentation régulière réduite du groupe abélien élémentaire $(\mathbb{Z}/2)^n$, au dessus de l'espace $B(\mathbb{Z}/2)^n$. Les termes de la résolution sont des produits tensoriels de modules de Brown-Gitler $J(k)$ et de modules de Steinberg L_n introduits par S. Mitchell et S. Priddy. Ces modules sont injectifs d'après J. Lannes et S. Zarati, de plus ils sont indécomposables. L'existence de cette résolution avait été conjecturée par Jean Lannes et le deuxième auteur. La principale indication soutenant cette conjecture était un résultat combinatoire de G. Andrews : la somme alternée des séries de Poincaré des modules considérées est nulle.

Ce résultat a des conséquences homotopiques et permet de démontrer pour ces spectres un résultat du type de la conjecture de Segal pour les classifiants des 2-groupes abéliens élémentaires [1].

Table des matières

1 Introduction

Dans une catégorie abélienne il est en général difficile de construire explicitement des résolutions injectives ou projectives minimales. C'est en particulier le cas dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo 2 $\mathcal{A}$. On sait très bien décrire les objets injectifs de la catégorie [9], de plus comme ces modules sont cohomologie modulo 2 de spectres ou d'espaces (contrairement à ce qu'il en est pour les objets projectifs) ceci accroit l'intérêt pour de telles constructions. Cependant en dehors de quelques exemples et d'un résultat de W. H. Lin [12], peu utilisable, très peu de résultats généraux sont connus. On n'a même pas de résultats de finitude approprié général : par exemple si on sait que les modules ayant un nombre fini de générateurs ont des résolutions dont chaque terme est somme directe finie d'injectifs indécomposables, on ne sait pas démontrer l'analogue pour des modules instables dont l'enveloppe injective est elle même somme directe finie d'injectifs indécomposables (ce qui est la condition de finitude raisonnable pour la cohomologie modulo 2 d'un espace de dimension infinie). Ce résultat est équivalent à des conjectures difficiles concernant des catégories de foncteurs entre espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_2$ ([4]).

Dans cet article on se propose d'étudier un cas suggéré par certaines identités combinatoires, en fait on part d'une formule montrant qu'une somme alternée de séries formelles est nulle. Dans la mesure où à l'exception d'un terme les séries formelles qui apparaissent sont les séries de Poincaré de modules instables injectifs bien connus, que le terme restant est la série de Poincaré de la cohomologie d'un "spectre de Thom" on espère réaliser cette identité algébriquement, c'est ce que nous faisons dans cet article, puis géométriquement, ceci sera fait ailleurs. Mais le résultat algébrique seul permet de déduire des conséquences homotopiques, cela sera expliqué plus bas.

La fonction de partition de Minc $\nu(n)$ est définie comme le nombre de représentations de l'entier n en somme d'entiers c_i : $n = c_1 + \cdots + c_m$ avec $c_m \leq 2c_{m-1} \leq \cdots \leq 2^{m-1}c_1 = 2^{m-1}$, on note $\nu(m,n)$ le nombre des solutions pour lesquelles $c_m \neq 0$. On pose $\mu_m(q) = \sum_n \nu(m,n)q^n$. Dans [2] G. Andrews montre que :

$$q^{2^n-1}\ell_m(q) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\mu_i(q)\ell_{m-i}(q) \qquad \mathbf{(A)}$$

avec

$$\ell_m(q) = \frac{q^{(2-1)+(2^2-1)+\ldots+(2^m-1)}}{(1-q^{2-1})\ldots(1-q^{2^m-1})}.$$

Soit $\mathcal{U}$ la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo 2. Les séries formelles qui apparaissent ci-dessus sont celles du produit tensoriel de modules de Steinberg L_{m-i} [14] et de Brown-Gitler $J(2^i-1)$ [5] qui sont des objets injectifs dans $\mathcal{U}$. Le module de Steinberg L_n est un facteur direct dans $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$, le module de Brown-Gitler $J(k)$ est lui un module fini caractérisé par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(k)) \cong M^{k*}$. La série de Poincaré de L_j est ℓ_j, celle de $J(2^h-1)$ est μ_h.

Le terme de gauche de l'égalité $\mathbf{A}$ est la série de Poincaré du sous-module $L'_n = \omega_n L_n \subset L_n$. Ici ω_n est le produit de toutes les formes linéaires non-nulles, c'est-à-dire la classe d'Euler de la somme de Whitney de tous les fibrés en droites non triviaux sur $B(\mathbb{Z}/2)^n$. C'est la cohomologie d'un spectre de Thom approprié [18](voir 6.1). La série de Poincaré, ℓ'_n, de L'_n vérifie alors $\ell'_n = t^{2^n-1}\ell_n$. Pour un espace vectoriel gradué V on notera $P(V)$ sa série de Poincaré. Le résultat d'Andrews dit que :

$$-P(L'_n) + P(L_n) + \sum_{s=1}^{n}(-1)^s P(L_{n-s}\otimes J(2^s-1)) + (-1)^n P(J(2^n-1)) = 0.$$

Ceci suggère la construction d'une résolution injective pour L'_n. Voici le premier résultat :

Théorème 1.1 *Pour tout $n \geq 1$, il existe une résolution injective minimale dans $\mathcal{U}$:*

$$0 \to L'_n \to L_n \to L_{n-1}\otimes J(1) \to L_{n-2}\otimes J(3) \to \cdots \to L_1 \otimes J(2^{n-1}-1) \to J(2^n-1) \to 0.$$

On notera pour les morphismes intermédiaires

$$f_{s,n}\ :\ L_{n-s+1}\otimes J(2^{s-1}-1)\to L_{n-s}\otimes J(2^{s}-1).$$

On a en corollaire :

Théorème 1.2 *Soit $n\geq 2$ et soit le sous-ensemble de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ déterminé par :*

$$\mathfrak{A}_n=\{t-s\leq -2^{n-1}-n\}\cup\{t\leq 1-2^{n-1}\}$$

On a

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2,L'_n))=\begin{cases}0 & si\ (s,t)\in\mathfrak{A}_n\setminus\{(n,1-2^n),(n+1,1-2^{n-1})\},\\ \mathbb{Z}/2 & si\ (s,t)=(n,1-2^n)\ ou\ (s,t)=(n+1,1-2^{n-1}).\end{cases}$$

Ainsi qu'on l'a dit L'_n est cohomologie modulo 2 d'un spectre qui est obtenu comme suit. L'idempotent de Steinberg $e_n=\bar{B}_n\bar{\Sigma}_n\in\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ induit une application sur $\Sigma B(\mathbb{Z}/2)^n$, le télescope de cette application est (à suspension près) le spectre $\mathbf{M}(n)$ de cohomogie M_n (voir ci-dessous). On peut aussi appliquer l'idempotent à l'espace de Thom du fibré $\widetilde{reg}_n$ de base $B(\mathbb{Z}/2)^n$ [18] qui est somme de tous les fibrés en droites non triviaux sur $B(\mathbb{Z}/2)^n$. Cet espace de Thom est déjà une suspension. On obtient alors comme télescope de cette application (à suspension près) un spectre $\mathbf{L}(n)$ de cohomologie L_n. On peut encore appliquer cette procédure au fibré $\widetilde{reg}_n^{\oplus 2}$. On obtient alors comme télescope de cette application (à deux suspensions près) un spectre $\mathbf{L}'(n)$ de cohomologie L'_n.

Le théorème suivant a lieu pour ce spectre, c'est un analogue de la conjecture de Segal (forme faible) [1, 11] :

Théorème 1.3 *1. Pour $n\geq 2$, on a*

$$\pi^k(\mathbf{L}'(n))=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & si\ k=n+2^n-1\ ou\ k=n+2^{n-1},\\ 0 & si\ k\in(n+2^{n-1},n+2^n-1)\cup(n+2^n-1,+\infty).\end{cases}$$

2. $\pi^1(\mathbf{L}'(1))=0$, $\pi^2(\mathbf{L}'(1))=\mathbb{Z}_2$ et $\pi^k(\mathbf{L}'(1))=0$ si $k\geq 2$.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, on rappelle des résultats concernant le facteur de Steinberg et les modules de Brown-Gitler. Dans la section 3 on démontre le théorème 1.1 modulo une présentation de certains modules de Brown-Gitler, celle ci est le coeur de l'argument et est donnée en section 4. Dans la section 5 on donne des applications pour les groupes d'extensions et on démontre le théorème 1.2. A l'aide de la suite spectrale d'Adams, on démontre le théorème 1.3 dans la section 6.

2 Modules instables injectifs

Dans cette section on rappele ce qu'il convient sur les modules instables injectifs.

2.1 Les modules de Steinberg

Soit $\mathrm{GL}_n:=\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ le groupe des matrices $n\times n$ inversibles à coefficients dans le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$. Ce groupe opère à gauche sur l'algèbre polynomiale graduée $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ (chaque générateur x_i étant de degré 1) par la formule

$$(\sigma\cdot f)(x_1,\ldots,x_n):=f(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{j,1}x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}\sigma_{j,n}x_j),$$

où $\sigma = (\sigma_{i,j})_{n\times n} \in \mathrm{GL}_n$ et $f \in \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$. Cette action s'étend évidemment au semi-groupe de toutes les matrices $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$. L'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ est isomorphe à la cohomologie modulo 2, $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^n;\mathbb{F}_2)$, de l'espace $B(\mathbb{Z}/2)^n$. Cette cohomologie est un module instable sur $\mathcal{A}$, l'algèbre de Steenrod modulo 2, et les actions ci-dessus sont $\mathcal{A}$-linéaires.

Soit S un sous-ensemble du groupe GL_n. On note $\bar{S} \in \mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ la somme de tous les éléments de S. On considère les cas du sous-groupe de Borel B_n des matrices triangulaires supérieures et du sous-groupe Σ_n des permutations. L'idempotent de Steinberg, e_n, est défini par par la formule

$$e_n = \bar{B}_n\bar{\Sigma}_n.$$

Proposition 2.1 ([17]) *On a $e_n^2 = e_n$ et le module $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]e_n$ est projectif et absolument irréductible.*

S. Mitchell et S. Priddy définissent le module de Steinberg [14] en théorie des modules instables par :

$$M_n := e_n \cdot \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n].$$

Comme $\mathcal{A}$ opère de manière naturelle à gauche sur $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ l'espace vectoriel M_n est un sous-$\mathcal{A}$-module de $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$. D'après le théorème de Carlsson-Miller [13] $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ est injectif dans la catégorie $\mathcal{U}$, comme M_n en est un facteur direct il est également injectif.

On notera que dans [14] l'action est à droite et que nous travaillons avec une action à gauche. La version de M_n que nous utilisons n'est donc pas invariante par le groupe symétrique mais par le sous-groupe de Borel B_n. La proposition 2.6 de [14] montre que quand applique les deux idempotents, $\bar{B}_n\bar{\Sigma}_n$ et $\bar{\Sigma}_n\bar{B}_n$, à un $\mathcal{A}[\mathrm{GL}_n]$-module on obtient des modules instables isomorphes, les isomorphismes étant donnés par $\bar{B}_n$ et $\bar{\Sigma}_n$.

L'algèbre de Dickson $D(n)$ est l'agèbre des éléments invariants sous l'action du groupe GL_n dans $\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$, elle est polynômiale en des générateurs de degré 2^n-2^{n-1},..., 2^n-2^i, ..., $2-1$. Soit ω_n l'invariant de Dickson supérieur en degré 2^n-1 : c'est le produit de toutes les formes linéaires non-nulles, soit

$$\omega_n = \det(x_j^{2^{i-1}})_{1\leq i,j\leq n},$$

c'est aussi la classe d'Euler de la somme de tous les fibrés en droites non triviaux sur $B(\mathbb{Z}/2)^n$).

Proposition 2.2 ([14, 6]) *Le module instable M_n est un module sur l'algèbre de Dickson $D(n)$. Il y a un isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules :*

$$M_n \cong L_n \oplus L_{n-1}.$$

Cet isomorphisme est rigide.

La décomposition des modules instables $M_{n-1} \cong L_n \oplus L_{n-1}$ correspond à une décomposition $e_n = \epsilon_n + \epsilon'_n$ dans l'algèbre du semi-groupe des matrices $\mathbb{F}_2[M_n(\mathbb{F}_2)]$. Les éléments ϵ_n et ϵ'_n sont des idempotents primitifs et orthogonaux, ϵ'_n est constitué de matrices singulières ([6]).

Par définition, M_1 est la cohomologie $H^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{F}_2)$. On en déduit que L_1 est la cohomologie réduite $\widetilde{H}(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{F}_2)$. En identifiant $L_1^{\otimes n}$ à l'idéal de $\mathbb{F}_2[x_1,\cdots,x_n]$ engendré par $x_1\cdots x_n$, on peut vérifier que

Proposition 2.3 $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n} = \omega_n M_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1}\otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$.

Celle-ci sera démontrée en appendice en utilisant la relation entre les idempotents de Steinberg et l'algèbre de Hecke $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]}(1_{B_n}^{\mathrm{GL}_n})$ étudiée par N. Kuhn [7].

Pour tout $1 \leq k \leq n$, l'inclusion

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1}\otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} \subset \Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} L_1^{\otimes i-1}\otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}\Big) \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1}\otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}\Big)$$

définit une inclusion canonique $\delta\colon L_n \hookrightarrow L_k \otimes L_{n-k}$. Il est clair que δ est coassociative. On obtient donc une structure de $\mathbb{F}_2$-coalgèbre sur $L_* := \bigoplus_{i\geq 0} L_i$ ce qui mérite une étude ailleurs.

La série de Poincaré d'un espace vectoriel gradué V est définie par $P(V) = P(V,t) := \sum_d \dim V^d t^d$, où V^d désigne la partie de degré d de V. On considère aussi la série de Poincaré de l'espace vectoriel sous-jacent d'un module instable M, on la notera aussi $P(M)$ par abus. On a :

Proposition 2.4 ([14]) *La série de Poincaré de L_n, notée ℓ_n, est donnée par*

$$\ell_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{t^{2^i-1}}{1-t^{2^i-1}}.$$

En fait Mitchell et Priddy montrent qu'en tant qu'espace vectoriel gradué, $\bar{\Sigma}_n \bar{B}_n \cdot \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ a une base formée par les éléments

$$\mathrm{Sq}^{i_1+1}\cdots\mathrm{Sq}^{i_n+1}(\frac{1}{x_1\cdots x_n})$$

où $i_1 > 2i_2 > \cdots > 2^{n-1}i_n \geq 0$. La copie de M_n que l'on considère a donc pour base les éléments

$$\bar{B}_n \cdot \mathrm{Sq}^{i_1+1}\cdots\mathrm{Sq}^{i_n+1}(\frac{1}{x_1\cdots x_n}).$$

Théorème 2.5 *En tant que $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel gradué, le module M_n a une base formée par les éléments*

$$e_n \cdot \omega_1^{i_1-2i_2}\cdots\omega_{n-1}^{i_{n-1}-2i_n}\omega_n^{i_n},$$

où $i_1 > 2i_2 > \cdots > 2^{n-1}i_n \geq 0$. Ici $\omega_k \in\ \mathbb{F}_2[x_1,\cdots,x_k]$.

Ceci sera démontré en appendice.

2.2 Les modules de Brown-Gitler

Soit $J(k)$ le $\mathcal{A}$-module de Brown-Gitler (cf. [16, Chapter 2]). En degré k, l'espace vectoriel gradué $J(k)$ est égal à $\mathbb{F}_2$, engendré par un élément noté ι_k. Le module $J(k)$ est caractérisé par le fait que la transformation naturelle qui à $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(k))$ associe sa restriction en degré k, qui est donc dans le dual M^{k*}, est une équivalence naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(k) \cong M^{k*}.$$

En particulier si un $\mathcal{A}$-module instable M est de dimension 1 en degré k, alors il existe un et un seul morphisme $\mathcal{A}$-linéaire non nul de degré zéro de M dans $J(k)$; ce morphisme envoie sur ι_k l'élément non nul de M^k (la partie de degré k de M).

H. Miller a donné dans [13] une description globale des $J(k)$ en considérant leur somme directe. Il introduit l'objet bigradué J_*^* déterminé par $J_k^\ell = J(k)^\ell$. Cet objet est en fait une algèbre bigraduée, dotée d'une structure de module instable pour laquelle la formule de Cartan a lieu. En fait Miller démontre que ([16, Chapter 2]) :

Proposition 2.6 *On a*

$$J_*^* \cong \mathbb{F}_2[\hat{t}_i \mid i \geq 0]$$

avec $\hat{t}_i \in J(2^i)^1$ de bidegré $(1, 2^i)$. La structure de $\mathcal{A}$-module instable de J_*^* est déterminée par

$$\mathrm{Sq}^1(\hat{t}_i) = \hat{t}_{i-1}^2, \quad i \geq 1, \quad \mathrm{Sq}^1(\hat{t}_0) = 0$$

et la formule de Cartan. Le module $J(k)$ s'identifie au sous-espace engendré par les monômes de second degré k, i.e. par les $\hat{t}_0^{\alpha_0}\cdots\hat{t}_i^{\alpha_i}$ avec $\sum_h \alpha_h 2^h = k$.

Soit maintenant Ω_k l'ensemble des suites d'entiers $(i_1, \ldots, i_k)$ telles que

$$0 < i_1 \leq 2i_2 \leq 4i_3 \leq \cdots \leq 2^{k-1} i_k = 2^{k-1}.$$

La k-ième fonction génératrice de Minc, μ_k, est alors donnée par

$$\mu_k(t) = \sum_{d \geq 0} |\Omega_k^d| t^d = \sum_{\Omega_k} t^{i_1 + \cdots + i_k},$$

Ω_k^d étant le sous ensemble de Ω_k constitué par les partitions de somme d.

Proposition 2.7 ([16, p. 57]) *Soit $k \geq 1$, on a $P(J(2^k - 1)) = \mu_k$.*

Dans la référence ceci est proposé en exercice. La démonstration résulte de 2.6. Partant du monôme $\hat{t}_0^{\alpha_0} \cdots \hat{t}_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \in J(2^k - 1)^d$, on pose

$$i_1 = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2}, i_2 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_0}{4} + \frac{1}{4}, \ldots, i_k = \frac{\alpha_{k-1}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 1.$$

On vérifie facilement que les i_h sont des entiers, et que la suite $(i_1, \ldots, i_k)$ est dans Ω_k^d. Inversement partant d'une suite $(i_1, \ldots, i_k) \in \Omega_k^d$, les formules

$$\alpha_0 = 2i_1 - 1, \alpha_1 = 2i_2 - i_1, \ldots, \alpha_{k-1} = 2i_k - i_{k-1}$$

déterminent un monôme comme ci-dessus, fournissant l'application réciproque. Le résultat suit.

2.3 Le théorème de Lannes-Zarati

Enfin on rappelle que :

Théorème 2.8 *Le module instable $L_h \otimes J(k)$ est injectif dans la catégorie $\mathcal{U}$.*

C'est un cas particulier du résultat principal de Lannes et Zarati dans [10]. Par ailleurs, il résulte de [9] que ce module est indécomposable.

3 Construction des morphismes et exactitude

Dans cette section on construit les morphismes du complexe, puis on démontre l'exactitude, modulo une présentation du module de Brown-Gitler $J(2^k - 1)$ qui sera faite dans la section suivante.

3.1 Construction des morphismes

Rappelons que L_1, étant la cohomologie réduite de $B\mathbb{Z}/2$, s'identifie à l'idéal $(x) \subset \mathbb{F}_2[x]$. On note $\pi_s \colon L_1 \to J(2^s)$ l'unique morphisme non trivial qui envoie x^{2^s} sur la classe fondamentale ι_{2^s} de $J(2^s)$.

Définissons le morphisme $f_{s,n}$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}
L_{n-s+1} \otimes J(2^{s-1} - 1) \arrow[r, "f_{s,n}"] \arrow[d, "\delta \otimes \mathrm{id}"] & L_{n-s} \otimes J(2^s - 1) \\
L_{n-s} \otimes L_1 \otimes J(2^{s-1} - 1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \pi_{s-1} \otimes \mathrm{id}"] & L_{n-s} \otimes J(2^{s-1}) \otimes J(2^{s-1} - 1) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \mu"']
\end{tikzcd}$$

Ici $\mu \colon J(2^{s-1}) \otimes J(2^{s-1} - 1) \to J(2^s - 1)$ est la multiplication, qui est l'unique morphisme non trivial et $\delta \colon L_{n-s+1} \to L_{n-s} \otimes L_1$ la comultiplication de la $\mathbb{F}_2$-coalgèbre L_*. Par convention, l'inclusion naturelle $L'_n \hookrightarrow L_n$ se note $f_{0,n}$.

Proposition 3.1 *$f_{s+1,n} \circ f_{s,n} = 0$ pour $1 \leq s \leq n-1$.*

Démonstration On va se ramener au cas $n = 2$. Grâce à la coassociativité de δ et à l'associativité de μ, la composée $f_{s+1,n} \circ f_{s,n}$, pour $1 \leq s \leq n-1$, se factorise alors comme suit :

$$\begin{tikzcd}
L_{n-s+1} \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[r, "\delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, bend right=60, swap, "f_{s+1,n}\circ f_{s,n}"] & L_{n-s-1} \otimes L_2 \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta\otimes\mathrm{id}"] \\
L_{n-s} \otimes L_1 \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[r, "\delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] & L_{n-s-1} \otimes L_1 \otimes L_1 \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi_s\otimes\pi_{s-1}\otimes\mathrm{id}"] \\
L_{n-s-1} \otimes J(2^{s+1}-1) & L_{n-s-1} \otimes J(2^s) \otimes J(2^{s-1}) \otimes J(2^{s-1}-1). \arrow[l, swap, "\mathrm{id}\otimes\mu"]
\end{tikzcd}$$

A cause du corollaire 3.3 ci-dessous, on a $f_{s+1,n} \circ f_{s,n} = 0$ pour $1 \leq s \leq n-1$. $\square$

On part de la base comme espace vectoriel gradué du facteur L_2 constituée par les éléments $e_2 \cdot \omega_1^{a-2b}\omega_2^b$ avec $a > 2b > 0$.

Lemme 3.2 *Si $a > 2b > 0$ et $a + b = 2^i + 2^{i-1}$, alors l'expression de $e_2 \cdot \omega_1^{a-2b}\omega_2^b$ comme somme de monômes distincts ne contient pas $x_1^{2^i} x_2^{2^{i-1}}$.*

Démonstration Notons que les conditions du lemme impliquent que $i > 1$. On a

$$\begin{aligned}
e_2 \cdot \omega_1^{a-2b}\omega_2^b &= [x_2^{a-2b} + (x_1 + x_2)^{a-2b}]x_1^b x_2^b (x_1 + x_2)^b \\
&= \sum_{j=1}^{b} (\binom{b}{j} + \binom{a-b}{j}) x_1^{b+j} x_2^{a-j} + \sum_{j=b+1}^{a-b} \binom{a-b}{j} x_1^{b+j} x_2^{a-j}.
\end{aligned}$$

Comme $a > 2b$ et $a + b = 2^i + 2^{i-1}$, on voit que $a > 2^i$ et $b < 2^{i-1}$. Posons $a = 2^i + c$ et $b = 2^{i-1} - c$ avec $0 < c < 2^{i-1}$. On en déduit que le premier terme dans la somme ci-dessus ne peut contenir $x_1^{2^i} x_2^{2^{i-1}}$. D'autre part, le coefficient de $x_1^{2^i} x_2^{2^{i-1}}$ dans le deuxième terme est $\binom{a-b}{2^i-b}$. Supposons que $c = 2^t c'$ avec $0 \leq t < i-1$ et c' impair. On a alors

$$\binom{a-b}{2^i-b} = \binom{2^{i-1}+2c}{2^{i-1}+c} = \binom{2^{i-1}+2c}{c} = \binom{2^{i-1}+2^{t+1}c'}{2^t c'} = \binom{2^{i-1-t}+2c}{c'} = 0$$

car $2^{i-1-t} + 2c$ est pair alors que c' est impair. $\square$

Il suit :

Corollaire 3.3 *La composée*

$$L_2 \hookrightarrow L_1 \otimes L_1 \xrightarrow{\pi_i \otimes \pi_{i-1}} J(2^i) \otimes J(2^{i-1}) \xrightarrow{\mu} J(2^i + 2^{i-1})$$

est nulle pour tout $i \geq 1$.

Démonstration Le cas $i > 1$ vient du lemme précédent. Si $i = 1$, on vérifie que L_2 est trivial en degrés inférieurs à 4. $\square$

3.2 Démonstration de l'exactitude

On commence par introduire l'application suivante :

$$g_s\colon L_1^{\otimes s} \xrightarrow{\pi_{s-1}\otimes\cdots\otimes\pi_0} J(2^{s-1})\otimes\cdots\otimes J(1) \xrightarrow{\mu} J(2^s-1)$$

où μ est l'unique application non-triviale. On montrera dans la section suivante que :

Proposition 3.4 *L'application g_s est surjective. Le système d'éléments $g_s(x_1^{i_1}\cdots x_s^{i_s})$ avec $(i_1,\dots,i_s)\in\Omega_s$ est une base de $J(2^s-1)$.*

Afin d'alléger les notations, on notera $\omega^{i_1,\dots,i_{n-s}}$ l'élément

$$e_{n-s}\cdot\omega_1^{i_1-2i_2}\cdots\omega_{n-s-1}^{i_{n-s-1}-2i_{n-s}}\omega_{n-s}^{i_{n-s}}$$

et $g^{i_{n-s+1},\dots,i_n}$ l'élément

$$g_s(x_{n-s+1}^{i_{n-s+1}}\cdots x_n^{i_n}).$$

La proposition suivante est la conséquence de la proposition précédente et de 2.5.

Proposition 3.5 *Soit $0\le s\le n$. En tant qu'espace vectoriel gradué, $L_{n-s}\otimes J(2^s-1)$ a une base formée par les éléments*

$$\omega^{i_1,\dots,i_{n-s}}\otimes g^{i_{n-s+1},\dots,i_n},$$

avec $i_1>2i_2>\cdots>2^{n-s-1}i_{n-s}>0<i_{n-s+1}\le 2i_{n-s+2}\le\cdots\le 2^{s-1}i_n=2^{s-1}$.

Pour $1\le s\le n$, notons $A(s,d)$ l'ensemble des éléments de cette base qui vérifient $i_1+\cdots+i_n=d$ et $i_{n-s}\le 2i_{n-s+1}$, $B(s,d)$ l'ensemble de ceux qui vérifient $i_1+\cdots+i_n=d$ et $i_{n-s}>2i_{n-s+1}$.

Pour $s=0$, notons $A(0,d)$ l'ensemble des $\omega^{i_1,\dots,i_n}$ avec $i_1+\cdots+i_n=d$ et $i_1>2i_2>\cdots>2^{n-1}i_n=2^{n-1}$, $B(0,d)$ l'ensemble des $\omega^{i_1,\dots,i_n}$ avec $i_1+\cdots+i_n=d$ et $i_1>2i_2>\cdots>2^{n-1}i_n>2^{n-1}$.

Il est clair qu'en degré d, la dimension de $L_{n-s}\otimes J(2^s-1)$ est $|A(s,d)|+|B(s,d)|$, la somme des cardinaux de $A(s,d)$ et $B(s,d)$. De plus $|A(s,d)|=|B(s+1,d)|$.

Lemme 3.6 *Soit $1\le s\le n$. Alors en degré d, $\dim\mathrm{im}f_{s,n}\ge|A(s-1,d)|$.*

Démonstration D'après 7.2, on a

$$\omega^{i_1,\dots,i_{n-s+1}}=\omega^{i_1,\dots,i_{n-s}}\cdot x_{n-s+1}^{i_{n-s+1}}+\sum_i f_i\cdot x_{n-s+1}^i$$

pour certains $i>i_{n-s+1}$ et $f_i\in\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_{n-s}]\cdot\omega_{n-s}$. D'où

$$f_{s,n}(\omega^{i_1,\dots,i_{n-s+1}}\otimes g^{i_{n-s+2},\dots,i_n})=\omega^{i_1,\dots,i_{n-s}}\otimes g^{i_{n-s+1},\dots,i_n}+\sum_i y_i\otimes z_i$$

pour certains $y_i\in L_{n-s}$ et $z_i\in J(2^s-1)$. Comme $\deg z_i>\deg g^{i_{n-s+1},\dots,i_n}$, il suit facilement de cette formule que les éléments de $f_{s,n}(A(s-1,d))$ sont linéairement indépendents. $\square$

On démontre l'exactitude de la suite dans le théorème 1.1 :

$$0\to L'_n\to L_n\xrightarrow{f_{1,n}}L_{n-1}\otimes J(1)\to L_{n-2}\otimes J(3)\to\cdots\to L_1\otimes J(2^{n-1}-1)\xrightarrow{f_{n,n}}J(2^n-1)\to 0.$$

L'exactitude en L_n est facile de vérifier en utilisant 7.2 et la définition de L'_n. L'exactitude en $J(2^n-1)$, *i.e.* la surjectivité de $f_{n,n}$, sera montrée dans la section 4. Soit $1\le s\le n-1$. D'après 3.6, en tout degré d, on a

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{im}f_{s,n}+\dim\mathrm{im}f_{s+1,n} &\ge |B(s,d)|+|A(s,d)|\\ &= \dim L_{n-s}\otimes J(2^s-1).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{im}f_{s,n}\subset\ker f_{s+1,n}$, il suit que cette inégalité est en fait une égalité et donc $\dim\mathrm{im}f_{s,n}=\dim\ker f_{s+1,n}$. Cela prouve l'exactitude en $L_{n-s}\otimes J(2^s-1)$ pour $1\le s\le n-1$. Le résultat suit.

4 Une présentation de $J(2^n-1)$

4.1 La présentation de $J(2^n-1)$

Dans cette section on donne une description de $J(2^n-1)$ comme quotient de l'idéal $(x_1\cdots x_n)\subset \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$. D'après 2.6 $J(2^n-1)$ est le sous-module de J_*^* qui admet pour base les monômes de second degré 2^n-1, c'est-à-dire les monômes $\hat{t}_0^{\alpha_0}\ldots\hat{t}_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ tels que $\sum_{h=0}^{n-1}\alpha_h 2^h=2^n-1$.

On désignera par $MP(i)$ le sous-module $L_1^{\otimes i-1}\otimes L_2\otimes L_1^{\otimes n-i-1}$, $1\le i\le n-1$ et par $MP(n)$ le sous-module $L_1^{\otimes n-1}\otimes L_1'$. On considère donc :

$$g_n\colon L_1^{\otimes n}\xrightarrow{\pi_{n-1}\otimes\cdots\otimes\pi_0} J(2^{n-1})\otimes\cdots\otimes J(1)\xrightarrow{\mu} J(2^n-1).$$

Par 3.3 et le fait que $\pi_0(L_1')$ est trivial, le noyau de g_n contient la somme $MP(1)+\cdots+MP(n)$.

Théorème 4.1 *L'application g_n est surjective et induit un isomorphisme de modules instables*

$$\frac{L_1^{\otimes n}}{MP(1)+\cdots+MP(n)}\cong J(2^n-1).$$

Démonstration En supposant que g_n est surjectif, la démonstration de l'isomorphisme se fait comme suit. On rappelle que Ω_n est l'ensemble des suites d'entiers $(i_1,\ldots,i_n)$ telles que

$$0<i_1\le 2i_2\le 4i_3\le\cdots\le 2^{n-1}i_n=2^{n-1}.$$

En tant qu'espace vectoriel gradué le module quotient ci-dessus est engendré par les éléments $g_n(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})$ avec $(i_1,\ldots,i_n)\in\Omega_n$. En effet, soit un élément $g_n(x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n})$ pour lequel on a $a_i>2a_{i+1}$. A l'aide de $MP(i)$, il peut s'écrire comme somme d'éléments $g_n(x_1^{a_1}\cdots x_{i-1}^{a_{i-1}}\cdot x_i^{a_i'}\cdot x_{i+1}^{a_{i+1}'}\cdot x_{i+2}^{a_{i+2}}\cdots x_k^{a_n})$ avec $a_i'+a_{i+1}'=a_i+a_{i+1}$ et $a_i'<a_i$:

$$x_i^{a_i}x_{i+1}^{a_{i+1}}\equiv\sum_{j=1}^{a_{i+1}}(\binom{a_{i+1}}{j}+\binom{a_i-a_{i+1}}{j})x_i^{a_{i+1}+j}x_{i+1}^{a_i-j}+\sum_{j=a_{i+1}+1}^{a_i-a_{i+1}-1}\binom{a_i-a_{i+1}}{j}x_i^{a_{i+1}+j}x_{i+1}^{a_i-j}.$$

Une itération évidente -tenant compte de $MP(n)$- donne le résultat.

Utilisant la série de Poincaré 2.7 de $J(2^n-1)$, on observe qu'en tout degré la dimension de l'image de g_n est inférieure ou égale à celle de $J(2^n-1)$. On obtient alors l'isomorphisme souhaité. $\square$

4.2 Surjectivité de g_n

Le reste de la section est consacré à la démonstration de la surjectivité de g_n. La stratégie est comme suit. Soit V un espace vectoriel de dimension n. On va montrer qu'il y a un morphisme surjectif de $H^*(V)$ vers $J(2^n-1)$, puis on montrera que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*(V),J(2^n-1))\cong H_{2^n-1}(V)$$

est un $\mathbb{F}_2[\mathrm{End}(V)]$-module cyclique de générateur g_n. La surjectivité de g_n est alors évidente.

Pour la première partie de l'argument on se sert de l'action tordue, introduite par N. Campbell et P. Selick, de l'algèbre de Steenrod sur l'algèbre polynomiale.

On considère l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[t_0,\ldots,t_{n-1}]$, t_i étant de degré 1. L'action tordue de l'algèbre de Steenrod sur celle-ci est déterminée par :

$$\mathrm{Sq}^1(t_i)=t_{i-1}^2,\quad 1\le i\le n-1,\quad \mathrm{Sq}^1(t_0)=t_{n-1}^2$$

et la formule de Cartan. Campbell et Selick montrent alors que, en tant que modules instables, les algèbres $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ (avec l'action tordue de $\mathcal{A}$) et $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ (munie de l'action classique de $\mathcal{A}$) sont isomorphes.

On introduit une bigraduation sur $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ en imposant que pour chaque t_i le second degré soit $w(t_i) = 2^i$ (comme pour J_*^* plus haut).

Le module instable $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ admet alors une décomposition en somme directe de $2^n - 1$ sous-modules instables, chaque facteur, soit $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]_i$, étant le sous-module engendré par les monômes dont le second degré est congru modulo $2^n - 1$ à i. On observe si $f \in \mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ alors

$$\mathrm{Sq}^1(t_0 f) = t_0 \mathrm{Sq}^1(f) + t_n^2 f, \quad w(t_n^2 f) = w(t_0 f) + 2^n - 1$$

donc le sous-espace vectoriel gradué enegndré par les monômes dont le second degré est supérieur à une valeur donnée est un sous-module instable.

Pour un élément $f \in J_*^* \cong \mathbb{F}_2[\hat{t}_i \mid i \geq 0]$ on a

$$\mathrm{Sq}^1(t_0 f) = t_0 \mathrm{Sq}^1(f).$$

On considère alors la surjection évidente qui envoie $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ sur le module de Brown-Gitler $J(2^n - 1) \subset J_*^*$: elle envoie sur 0, les monômes de degré supérieur à $2^n - 1$, et ceux de second degré non congruents à $2^n - 1$. On peut voir également cette application comme étant la composée de l'application d'algèbre de $\mathbb{F}_2[t_0, \ldots, t_{n-1}]$ vers J_*^* qui envoie t_i vers $\hat{t}_i$, suivie de la projection sur $J(2^n - 1)$.

Si la première application n'est pas $\mathcal{A}$-linéaire on vérifie facilement que la composée l'est par les arguments donnés ci-dessus.

On obtient ainsi un épimorphisme de H^*V sur $J(2^n - 1)$, V étant un espace vectoriel de dimension n.

On étudie maintenant le module d'homologie $H_{2^n - 1}(V)$. L'algèbre polynomiale $S^*(V^*) = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ s'identifie à la cohomologie $H^*(V)$ et, de manière duale, l'algèbre à puissances divisées $\Gamma^*(V) = \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$ s'identifie à l'homologie $H_*(V)$. Les matrices à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ opèrent à gauche sur $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$, donc par dualité à droite sur $\Gamma(a_1, \ldots, a_n)$, par substitution linéaire des générateurs.

Pour toute suite d'entiers $I = (i_1, \ldots, i_n)$, notons $X^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ et $A^{(I)} = a_1^{(i_1)} \cdots a_n^{(i_n)}$: les X^I et les $A^{(I)}$ forment respectivement des bases duales de $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ et $\Gamma(a_1, \ldots, a_n)$. Un multi-indice ou monôme, I, X^I $A^{(I)}$ qui vérifie $i_{s-1} \geq 2 i_s$ pour $1 < s \leq n$ sera dit admissible.

Proposition 4.2 *Le M_n-module $\Gamma^{2^n - 1}(V)$ est engendré par $a_1^{(2^{n-1})} \cdots a_{n-1}^{(2)} a_n^{(1)}$. De manière équivalente, pour tout élément P de $S^{2^n - 1}(V^*)$, il existe $\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$ tel que l'expression de $\sigma \cdot P$ comme somme de monômes distincts contient $x_1^{2^{n-1}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$.*

La démonstration de l'équivalence des deux énoncés est laissée au lecteur.

Mettons l'ordre lexicographique sur les monômes de $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$. Pour tout élément homogène non-nul $P \in \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$, soit $m(P)$ le plus grand monôme (par rapport à l'ordre lexicographique) qui apparaît dans P.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3 *Si $m(P)$ n'est pas admissible, alors il existe $\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$ tel que $m(\sigma \cdot P) > m(P)$.*

Démonstration Montrons la proposition par récurrence sur n. On passera au lemme après. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que $n > 1$ et que l'énoncé est vrai pour $n - 1$. Cette hypothèse implique que pour tout $Q \in \mathbb{F}_2[x_2, \ldots, x_n]$ non nul de degré $2^{n-1} - 1$, il existe $\tau \in M_n$ tel que $\tau \cdot Q$ contient $x_2^{2^{n-2}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$. Ici τ ne fait intervenir que les générateurs $x_2, \ldots, x_n$.

Soit $P \in \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ un élément quelconque non-nul de degré $2^n - 1$. Il faut montrer que $\sigma \cdot P$ contient $x_1^{2^{n-1}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$ pour un certain $\sigma \in M_n$. D'après le lemme 4.3, on peut supposer que $m(P) = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ est un monôme admissible. Si $m(P)$ est admissible c'est clair. Dans le cas contraire, en appliquant plusieurs fois le lemme 4.3, on trouve un $\sigma \in M_n(\mathbb{F}_2)$ tel que $m(P)$ est admissible.

Mais alors $i_1 \geq 2^{n-1}$. Réécrivons P sous la forme $P = x_1^{2^{n-1}} f + R$, où $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ et R ne contient que des monômes dont la puissance de x_1 est inférieure à 2^{n-1}.

Soit u une combinaison linéaire non nulle des générateurs $x_2, \ldots, x_n$. Soit σ_u la matrice définie par la substitution $x_1 := x_1 + u$. Posons $Q = f(u, x_2, \ldots, x_n)$. Le polynôme, en $x_2, \ldots, x_n$, coefficient de $x_1^{2^{n-1}}$ dans

$$\sigma_u \cdot P = P(x_1 + u, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_2[x_2, \ldots, x_n][x_1]$$

est Q. On suppose d'abord que $Q \neq 0$. Or, par récurrence il existe $\tau \in M_n$ tel que $\tau \cdot Q$ contient $x_2^{2^{n-2}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$. Comme τ ne fait pas intervenir x_1, il suit que $\tau\sigma_u \cdot P$ contient $x_1^{2^{n-1}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$.

Si $f(u, x_2, \ldots, x_n) = 0$ pour toute combinaison linéaire non nulle u, alors $f(x_1, \ldots, x_n)$ est divisible par $x_1 + u$ quelque soit u. Comme f est de degré $2^{n-1} - 1$, il suit que $f = \prod_u (x_1 + u)$ et $x_2^{2^{n-2}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$ apparaît dans f. D'où P lui-même contient $x_1^{2^{n-1}} \cdots x_{n-1}^2 x_n$, la proposition est démontrée. □

Démonstration de 4.3 On met l'ordre lexicographique sur les monômes de $\mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_n]$. Pout tout élément non-nul $P \in \mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_n]$, soit $m(P)$ le plus grand monôme (par rapport à l'ordre lexicographique) qui apparaît dans P.

Soit $m(P) = x^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. Comme $m(P)$ n'est pas admissible, il existe $1 < s \leq n$ tel que $2i_s > i_{s-1}$. En regroupant les monômes de P, on le réécrit sous la forme $P = x_1^{i_1} \cdots x_{s-2}^{i_{s-2}} Q x_{s+1}^{i_{s+1}} \cdots x_n^{i_n} + R$, de manière que $m(R) < m(P)$ et que $Q = Q(x_{s-1}, x_s) \in \mathbb{F}_2[x_{s-1}, x_s]$ est un polynôme de degré $i_{s-1} + i_s$ qui vérifie $m(Q) = x_{s-1}^{i_{s-1}} x_s^{i_s}$.

Pour tout $\sigma \in \mathrm{GL}_n$ qui correspond à une substitution qui ne fait intervenir que x_{s-1}, x_s, les monômes de $\sigma \cdot R$ sont différents des monômes de $x_1^{i_1} \cdots x_{s-2}^{i_{s-2}} (\sigma \cdot Q) x_{s+1}^{i_{s+1}} \cdots x_n^{i_n}$, on aura donc $m(\sigma \cdot P) > m(P)$.

On pose $Q = x_{s-1}^q x_s^q (x_{s-1} + x_s)^q Q'$ avec $Q' \in \mathbb{F}_2[x_{s-1}, x_s]$ et l'entier q le plus grand possible.

Dans le premier cas, Q' contient un monôme x_{s-1}^i. Celui-ci est forcément $m(Q')$, d'où $m(Q) = x_{s-1}^{2q+i} x_s^q$, ce qui est absurde puisque $m(Q) = x_{s-1}^{i_{s-1}} x_s^{i_s}$ et $2i_s > i_{s-1}$.

Dans le deuxième cas, Q' contient un monôme x_s^i. Soit $\sigma \in \mathrm{GL}_n$ la matrice qui correspond à la substitution qui échange x_{s-1} et x_s. Alors

$$\sigma \cdot Q = Q(x_s, x_{s-1}) = x_{s-1}^q x_q^s (x_{s-1} + x_s)^q Q'(x_s, x_{s-1)}.$$

Il est clair que $x_{s-1}^i = m(\sigma \cdot Q')$, d'où $m(\sigma \cdot Q') = x_{s-1}^{2q+i} x_s^q$. Comme $3q + i = i_{s-1} + i_s$, on déduit aisément que $m(Q) > x_{s-1}^{i_{s-1}} x_s^{i_s}$, d'où $m(\sigma \cdot P) > m(P)$.

Dans le troisième cas, Q' est divisible par $x_{s-1} x_s$. Soit $\tau \in \mathrm{GL}_n$ la matrice qui correspond à la substitution qui transforme x_s en $x_{s-1} + x_s$. Alors dans

$$\tau \cdot Q' = Q'(x_{s-1}, x_{s-1} + x_s)$$

le terme qui ne comporte pas x_s est égal à $Q'(x_{s-1}, x_{s-1})$. Puisque Q' n'est pas divisible par $x_{s-1} + x_s$ par maximalité de q, ce terme est non nul et égal à x_{s-1}^i pour un certain $i > 0$. Il suit que $m(\tau \cdot Q) = x_{s-1}^{2q+i} x_s^q$. Comme $3q + i = i_{s-1} + i_s$, on a $m(\tau \cdot Q) > x_{s-1}^{i_{s-1}} x_s^{i_s}$, d'où $m(\tau \cdot P) > m(P)$. □

5 Applications homologiques

Dans cette section on démontre diverses conséquences homologiques du théorème 1.1.

On commence par

Théorème 5.1 *La résolution injective de L'_n donnée par 1.1 est minimale.*

Cela résulte de ce que les modules instables $L_h \otimes J(k)$ sont indécomposables et deux à deux distincts [9].

Corollaire 5.2 *L'élément* $\mu_n \in \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{U}}(J(2^n-1), L'_n)$ *déterminé par cette résolution injective est non nul.*

Le corollaire résulte de ce que $J(2^n-1)$ est localement fini, alors que le plus grand sous-module localement fini de $L_1 \otimes J(2^{n-1}-1)$ est trivial. En effet ceci est conséquence de ce que $L_1 \otimes J(2^{n-1}-1)$ a une filtration finie dont les quotients sont des suspensions de L_1, voir aussi [16, Chapter 6].

Corollaire 5.3 *Soit* M *un module instable,* $n > 0$,

1. $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(M, L'_n) = \{0\}$ *si* $s > n$;
2. $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(M, L'_n) = \{0\}$ *si* $s \neq n$ *et* M *est localement fini ;*
3. $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma^t M, L'_n) = \{0\}$ *si* $t > 2^s - 1$.

Démonstration La première propriété est claire, la seconde vient de ce que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, L_j \otimes J(k))$ est nul si $j > 0$ car M est localement fini et $L_j \otimes J(k)$ a une partie localement finie triviale si $j > 0$. La troisième résulte de ce qu'il n'y a pas d'applications non nulles de $\Sigma^h M$ dans L_k si $h > 0$. □

On considère ensuite le calcul des groupes d'extension $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, L'_n)$. A cet effet, on se sert des travaux de J. Lannes et S. Zarati [11] sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation.

On désigne par $\mathcal{M}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules gradués et dont les morphismes sont les applications $\mathcal{A}$-linéaires de degré zéro. La catégorie $\mathcal{U}$ des $\mathcal{A}$-modules instables est alors une sous catégorie pleine de $\mathcal{M}$. On note $D\colon \mathcal{M} \to \mathcal{U}$ et on appelle *foncteur de déstabilisation* l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{U} \to \mathcal{M}$. Le foncteur D est exact à droite et on note $D_s\colon \mathcal{M} \to \mathcal{U}$, $s \geq 0$, ses foncteurs dérivés.

Pour tout module instable M et tout $s \geq 0$, Lannes et Zarati ont explicité le module $D_s\Sigma^{1-s}M$ en termes de la construction de Singer de M. En particulier, si $D(s)$ et ω_s désigne respectivement l'algèbre de Dickson et l'invariant de Dickson supérieur de GL_s sur $\mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_s]$, on a

Proposition 5.4 ([11]) $D_s\Sigma^t(\mathbb{Z}/2) \cong \Sigma^{s+t} D(s)\omega_s^{s+t-1}$ *si* $s \geq 0$ *et* $s + t \geq 1$.

Soit N un module instable. La suite spectrale de Grothendieck associée à la composée des foncteurs

$$\mathcal{M} \xrightarrow{D} \mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-,N)} \mathbb{F}_2\text{-espaces vectoriels}$$

est de la forme :

$$E_2^{p,q} := \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_q(-), N) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}}(-, N).$$

Démonstration de 1.2 Soit $n \geq 2$ et soit le sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ déterminé par :

$$\mathfrak{A}_n = \{t - s \leq -2^{n-1} - n\} \cup \{t \leq 1 - 2^{n-1}\}$$

Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, L'_n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } (s,t) \in \mathfrak{A}_n \setminus \{(n, 1-2^n), (n+1, 1-2^{n-1})\}, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } (s,t) = (n, 1-2^n) \text{ ou } (s,t) = (n+1, 1-2^{n-1}). \end{cases}$$

Rappelons que $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(M, N)$ est la notation usuelle pour $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{M}}(\Sigma^{-t}M, N)$.

Cas $(s,t) \in \mathfrak{A}_n \setminus \{(n, 1-2^n), (n+1, 1-2^{n-1})\}$**.** On a une suite spectrale :

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_{s-p}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, L'_n) \Rightarrow \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{M}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, L'_n).$$

Observons que $0 \leq p \leq n$ et dans la zone considérée de (s,t), on a

$$s - t - p \geq 2^{n-1} - 1.$$

L'égalité aura lieu ssi $s = p$ et $t = 1 - 2^{n-1}$ ce qui implique

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_{s-p}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, L'_n) = \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) = 0.$$

On peut alors supposer que $s - t - p > 2^{n-1} - 1$. D'après 5.4,

$$D_{s-p}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2 = \Sigma^{s-t-p}D(s-p)\omega^{s-t-p-1}_{s-p}.$$

Puisque

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^d M, L_{n-i} \otimes J(2^i - 1)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, L_{n-i} \otimes \widetilde{\Sigma}^d J(2^i - 1)) = 0$$

si $d > 2^i - 1$ [16], on en déduit que

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_{s-p}\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, L'_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{s-t-n}D(s-n)\omega^{s-t-n-1}_{s-n}, J(2^n - 1)) & \text{si } p = n. \end{cases}$$

– Si $s = n$ alors $t \neq 1 - 2^n$, donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{s-t-n}D(s-n)\omega^{s-t-n-1}_{s-n}, J(2^n - 1)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, J(2^n - 1)) = 0.$$

– Si $s = n + 1$ alors $t < 1 - 2^{n-1}$, donc la connectivité de $\Sigma^{1-t}D(1)\omega^{-t}_1$ est

$$1 - 2t > 2^n - 1.$$

– Si $s \geq n + 2$, la connectivité de $\Sigma^{s-t-n}D(s-n)\omega^{s-t-n-1}_{s-n}$ est

$$2^{s-n}(s - t - n - 1) + 1 > 2^n - 1.$$

On a ainsi vérifié que $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{M}}(\Sigma^{-t}\mathbb{Z}/2, L'_n)$ est nulle si $(s,t) \in \mathfrak{A}_n \setminus \{(n, 1 - 2^n), (n + 1, 1 - 2^{n-1})\}$.

Cas $(s,t) = (n, 1 - 2^n)$**.** On a une suite spectrale :

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_q\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \Rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n).$$

D'après 5.4,

$$D_q\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2 = \Sigma^{q+2^n-1}D(q)\omega^{q+2^n-2}_q.$$

Comme le cas précédent, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_q\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(D_q\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, J(2^n - 1)) & \text{si } p = n. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } (p,q) \neq (n, 0), \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } (p,q) = (n, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{U}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \cong \mathbb{Z}/2$. Ceci est aussi valable pour $n = 1$.

Cas $(s,t) = (n + 1, 1 - 2^{n-1})$**.** On a une suite spectrale :

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_q\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n).$$

D'après 5.4,

$$D_q\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2 = \Sigma^{q+2^{n-1}-1}D(q)\omega^{q+2^{n-1}-2}_q.$$

– Si $q = 0$ alors, pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L_{n-i} \otimes J(2^i - 1)) = 0.$$

– Si $q = 1$ alors $D_1\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2 = \Sigma^{2^{n-1}} D(1)\omega_1^{2^{n-1}-1}$, donc

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } p = n. \end{cases}$$

– Si $q \geq 2$ alors la connectivité de $D_q\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2 = \Sigma^{q+2^{n-1}-1} D(q)\omega_q^{q+2^{n-1}-2}$ est

$$2^q(q + 2^{n-1} - 2) + 1 > 2^n - 1.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{U}}(D_q\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (p,q) \neq (n,1), \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } (p,q) = (n,1). \end{cases}$$

D'où $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{2^{n-1}-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \cong \mathbb{Z}/2$. Ceci est aussi valable pour $n = 1$. $\square$

Remarque 5.5 On déduit de la démonstration ci-dessus que l'inclusion $\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2 \hookrightarrow J(2^n - 1)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{U}}(J(2^n - 1), L'_n) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n) \cong \mathbb{Z}/2$ pour tout $n \geq 1$. On peut alors définir une classe non-nulle $\nu_n \in \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{Z}/2, L'_n)$ comme étant l'image de $\mu_n \in \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{U}}(J(2^n - 1), L'_n)$ par cet isomorphisme. Une suite exacte des $\mathcal{A}$-modules qui représente ν_n sera donnée dans 6.1.

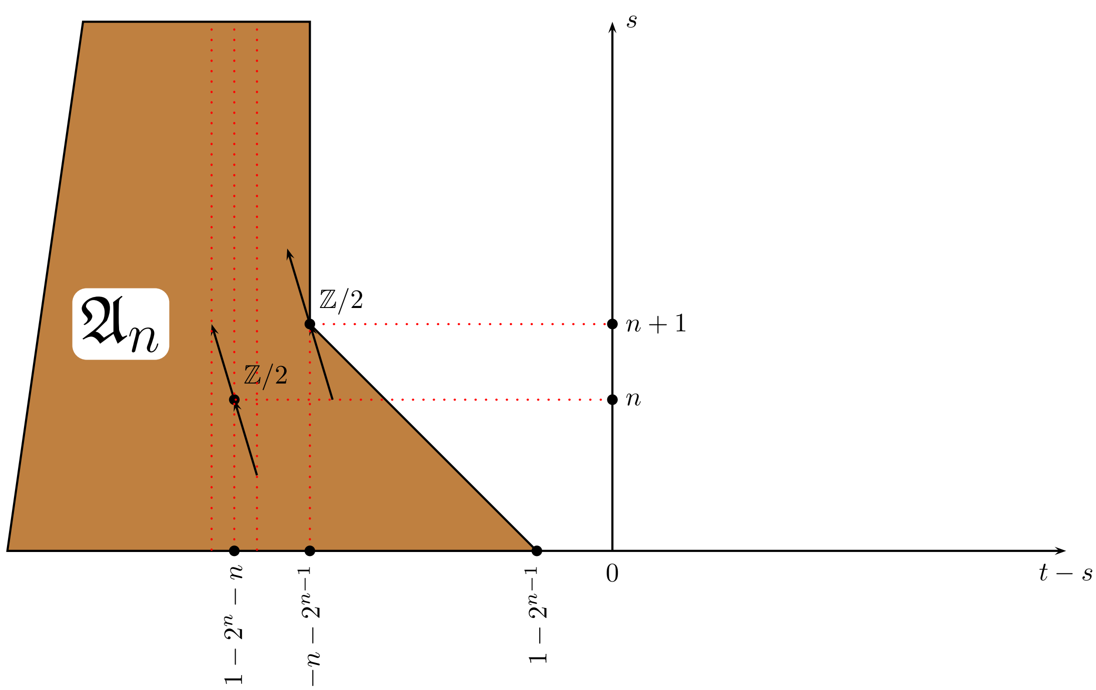

Fig. 1 – $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, L'_n)$, $n \geq 2$

6 Applications homotopiques

Dans cette section, tous les espaces et spectres sont 2-localisés.

6.1 Les cofibrations de Takayasu

Soit $V_n = (\mathbb{Z}/2)^n$. On considère la représentation réelle régulière réduite de V_n :

$$\widetilde{reg}_n \colon V_n \to O(2^n - 1)$$

et la somme $\widetilde{reg}_n^{\oplus k} = \widetilde{reg}_n + \cdots + \widetilde{reg}_n$, k fois. Takayasu [18] considère $\widetilde{reg}_n^{\oplus k}$ pour tout entier k. On se restreint au cas $k \geq 0$. On désigne par $BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$ l'espace de Thom associé à la représentation $\widetilde{reg}_n^{\oplus k}$, *i.e.* l'espace de Thom du fibré vectoriel $EV_n \times_{V_n} \mathbb{R}^{k(2^n-1)} \to BV_n$.

L'action de GL_n sur BV_n induit une action sur l'espace de Thom $BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$. L'idempotent de Steinberg e_n définie alors une application stable sur $BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$. A la suite de Mitchell et Priddy [14], en prenant le téléscope de cette application, on obtient un facteur stable de $BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$ que l'on note $e_n \cdot BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$. On adopte la notation de Takayasu en posant $\mathbf{M}(n)_k = e_n \cdot BV_n^{\widetilde{reg}_n^{\oplus k}}$. On renvoie à [18] pour une construction explicite de $\mathbf{M}(n)_{k}$,.

On obtient en particulier que $\mathbf{M}(n)_0 = \mathbf{M}(n)$, $\mathbf{M}(n)_1 = \mathbf{L}(n)$ et $\mathbf{M}(n)_2 = \mathbf{L}'(n)$. La cohomologie de $\mathbf{M}(n)_k$ est déterminée en utilisant l'isomorphisme de Thom :

$$H^*\mathbf{M}(n)_k = \omega_n^k e_n \cdot \mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_n] = \omega_n^{k-1} L_n.$$

Théorème 6.1 (Takayasu [18]) *Pour $k \geq 0$, il existe une suite de cofibration*

$$\Sigma^k \mathbf{M}(n-1)_{2k+1} \xrightarrow{i_{n,k}} \mathbf{M}(n)_k \xrightarrow{j_{n,k}} \mathbf{M}(n)_{k+1}.$$

On obtient en particulier une suite exacte courte en cohomologie :

$$0 \to \omega_n^k L_n \to \omega_n^{k-1} L_n \to \Sigma^k \omega_{n-1}^{2k} L_{n-1} \to 0.$$

On combine les suites de cofibration de Takayasu pour obtenir la suivante :

$$\Sigma^{2^n-1}\mathbf{M}(0)_{2^n} \to \cdots \to \Sigma^{2^k-1}\mathbf{M}(n-k)_{2^k} \xrightarrow{d_{k,n}} \Sigma^{2^{k-1}-1}\mathbf{M}(n-k+1)_{2^{k-1}} \to \cdots \to \Sigma\mathbf{M}(n-1)_2 \to \mathbf{M}(n)_1 \to \mathbf{M}(n)_2. \tag{$\mathbf{T}$}$$

Ici $d_{k,n}$ se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{2^k-1}\mathbf{M}(n-k)_{2^k} \arrow[rr, "d_{k,n}"] \arrow[dr, "\Sigma^{2^k-1} j_{n-k,2^k}"'] & & \Sigma^{2^{k-1}-1}\mathbf{M}(n-k+1)_{2^{k-1}} \\
& \Sigma^{2^k-1}\mathbf{M}(n-k)_{2^k+1} \simeq \Sigma^{2^{k-1}-1}\big(\Sigma^{2^{k-1}}\mathbf{M}(n-k)_{2^k+1}\big). \arrow[ur, "\Sigma^{2^{k-1}-1} j_{n-k+1,2^{k-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

La suite $\mathbf{T}$ induit en cohomologie une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules instables :

$$0 \to \omega_n L_n \to L_n \to \cdots \to \omega_{n-k+1}^{2^{k-1}-1} L_{n-k+1} \otimes \Sigma^{2^{k-1}-1}\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\delta_{k,n}} \omega_{n-k}^{2^k-1} L_{n-k} \otimes \Sigma^{2^k-1}\mathbb{F}_2 \to \cdots \to \Sigma^{2^n-1}\mathbb{F}_2 \to 0. \tag{$\mathbf{T'}$}$$

D'après la proposition 4.2.1 de [18], $\delta_{k,n}$ est donné par

$$\delta_{k,n}\big(\omega_{n-k+1}^{2^{k-1}-1}\omega^{i_1,\cdots,i_{n-k+1}} \otimes \iota_{2^{k-1}-1}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_{n-k+1} > 1, \\ \omega_{n-k}^{2^k-1}\omega^{i_1,\cdots,i_{n-k}} \otimes \iota_{2^k-1} & \text{si } i_{n-k+1} = 1. \end{cases}$$

On obtient donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\omega_{n-k+1}^{2^{k-1}-1} L_{n-k+1} \otimes \Sigma^{2^{k-1}-1}\mathbb{F}_2 \arrow[r, "\delta_{k,n}"] \arrow[d, hook] & \omega_{n-k}^{2^k-1} L_{n-k} \otimes \Sigma^{2^k-1}\mathbb{F}_2 \arrow[d, hook] \\
L_{n-k+1} \otimes J(2^{k-1}-1) \arrow[r, "f_{k,n}"] & L_{n-k} \otimes J(2^k-1).
\end{tikzcd}$$

La suite **T'** définit un élément dans $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}}(\Sigma^{2^n-1}\mathbb{F}_2, L'_n)$ qui à cause de la commutativité ci-dessus est égal à ν_n de 5.5. Comme **T'** admet une réalisation géométrique, ν_n est *a priori* un cycle infini dans la suite spectrale d'Adams. On étudiera ailleurs la réalisation géométrique de la suite exacte de 1.1.

6.2 La suite spectrale d'Adams

On considère la suite spectrale d'Adams pour $\mathrm{map}(\mathbf{L}'(n), S^0)$ associée à $H^*(-, \mathbb{Z}/2)$ qui converge [] à $\pi_*(\mathrm{map}(\mathbf{L}'(n), \mathbf{S}^0))$ et dont le terme E_2 est

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}/2, L'_n)$$

et les différentielles

$$d_r \colon E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}.$$

Démonstration de 1.3 Pour $n \geq 2$, on doit vérifier que

$$\pi^k(\mathbf{L}'(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } k = n + 2^n - 1 \text{ ou } k = n + 2^{n-1}, \\ 0 & \text{si } k \in (n + 2^{n-1}, n + 2^n - 1) \cup (n + 2^n - 1, +\infty). \end{cases}$$

D'après 1.2, la page E_2 de la suite spectrale pour $\pi^*(\mathbf{L}'(n))$ est représentée comme dans la figure 1. On en déduit le résultat.

Pour $n = 1$, on utilise la suite exacte longue d'homotopie de la cofibration $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{L}(1) \to \mathbf{L}'(1)$ et la conjecture de Segal [1] pour $\mathbf{L}(1) = \Sigma^\infty B\mathbb{Z}/2$, ce qui dit que $\pi^k(\mathbf{L}(1)) = 0$ si $k > 0$ et $\pi^0(\mathbf{L}(1)) = \mathbb{Z}_2$. On obtient alors $\pi^1(\mathbf{L}'(1)) = 0$, $\pi^2(\mathbf{L}'(1)) = \mathbb{Z}_2$ et $\pi^k(\mathbf{L}'(1)) = 0$ si $k \geq 2$. $\square$

Remarque 6.2 On peut composer l'application non triviale $\mathbf{L}'(n) \to \mathbf{S}^{n+2^n-1}$ avec l'inclusion de cellule de dimension minimale de $\mathbf{L}'(n)$, qui est $\mathbf{S}^{3\cdot 2^n - n - 3}$. On obtient ainsi un élément du groupe stable $\pi^s_{2^{n+1}-2n-2}$. Pour $n = 1$, c'est l'application de degré 2, pour $n = 2$ c'est η^2.

7 Appendice : Compléments sur le facteur de Steinberg

Pour $1 \leq k \leq n$, l'image de l'idempotent $e_k \in \mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_k]$ dans $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ par l'inclusion canonique $\mathrm{GL}_k \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ utilisant les m premières coordonées de $\mathbb{F}_2^n$, par abus, se note aussi e_k. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on désigne par $e_{2,i}$ l'image de l'idempotent $e_2 \in \mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_2]$ dans $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ par l'inclusion canonique $\mathrm{GL}_2 \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ utilisant les i-ième et $(i+1)$-ième coordonées de $\mathbb{F}_2^n$.

Dans [7] Kuhn montre que la sous-algèbre de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ engendrée par $e_{2,1}, \cdots, e_{2,n-1}$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]}(1_{B_n}^{\mathrm{GL}_n})$. En particulier, on a

Proposition 7.1 ([7, 8]) *1. e_n est un produit de longueur maximale des idempotents $e_{2,1}, \cdots, e_{2,n-1}$.*

2. $e_n = e_n e_{2,i} = e_{2,i} e_n$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$;

3. $e_n = e_{n-1} e_{2,n-1} e_{n-1}$.

Démonstration de 2.3 Il s'agit de montrer que

$$L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n} = \omega_n M_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}.$$

On commence par vérifier que $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ en identifiant $M_1^{\otimes n}$ à l'algèbre $\mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_n]$ et $L_1^{\otimes n}$ à l'idéal engendré par $x_1 \cdots x_n$. On observe d'abord que $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ est en fait facteur direct de $L_1^{\otimes n}$ puisque l'idempotent e_n induit un endomorphisme de $L_1^{\otimes n}$. A cet effet, on se sert de 7.1 (1), ce qui dit que e_n est certain produit des $e_{2,i}$, pour se ramener au cas $n=2$, ce qui est aisément vérifié par calcul direct. Comme $L_1^{\otimes n}$ est facteur direct de $M_1^{\otimes n}$, $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$ est facteur direct de $M_n = e_n \cdot M_1^{\otimes n}$. La rigidité de l'isomorphisme $M_n \cong L_n \oplus L_{n-1}$ implique alors que $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. En effet, si l'on note $I_{n-1} \in M_n(\mathbb{F}_2)$ la matrice $\operatorname{diag}(1, \cdots, 1, 0)$, Kuhn a montré dans [6] que $\operatorname{End}_{\mathcal{U}}(M_n)$ est l'espace vectoriel engendré par les idempotents e_n et $e_n I_{n-1} e_n$. En particulier, le facteur direct L_{n-1} de M_n correspond à l'idempotent $e_n I_{n-1} e_n$. Comme l'action de $e_n I_{n-1}$ est triviale sur $e_n \cdot L_1^{\otimes n} \subset L_1^{\otimes n}$, on obtient $L_n = e_n \cdot L_1^{\otimes n}$.

On vérifie ensuite que $\omega_n e_n \cdot M_1^{\otimes n} = e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. Comme l'invariant ω_n est divisible par $x_1 \cdots x_n$, il est clair que $\omega_n e_n \cdot M_1^{\otimes n} \subset e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. Soit $f \in e_n \cdot L_1^{\otimes n} \subset L_1^{\otimes n}$. Alors f est B_n-invariant et divisible par $x_1 \cdots x_n$. Une observation élémentaire, dûe à H. Mùi, dit que si f est B_n-invariant et divisible par x_k, alors f est également divisible par

$$V_k = \prod_{\lambda_i \in \mathbb{F}_2} (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + x_k).$$

On en déduit que f est divisible par $\omega_n = V_1 \cdots V_n$. Soit $f = \omega_n f'$. On a donc $f = e_n \cdot f = \omega_n e_n \cdot f'$ est un élément de $\omega_n e_n \cdot M_1^{\otimes n}$ et ainsi obtient l'inclusion $e_n \cdot L_1^{\otimes n} \subset \omega_n e_n \cdot M_1^{\otimes n}$. D'où $e_n \cdot L_1^{\otimes n} = \omega_n M_n$.

Enfin l'identification

$$e_n \cdot L_1^{\otimes n} = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1},$$

dûe à Kuhn [7], est démontrée en utilisant 7.1 (1) et (2). Si x est un élément de $e_n \cdot L_1^{\otimes n}$, alors x est invariant par e_n. Comme $e_{2,i} e_n = e_n$ pour tout $1 \le i \le n-1$, x est aussi invariant par $e_{2,i}$ pour tout $1 \le i \le n-1$. D'où x appartient à $\bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$. Si x est un élément de $\bigcap_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1}$, alors x est invariant par e_n car e_n est certain produit des $e_{2,i}$, d'où $x \in e_n \cdot L_1^{\otimes n}$. □

L'algèbre de Dickson $D(k)$ est la sous-algèbre des invariants sous l'action du groupe linéaire GL_k sur $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_k]$. Soit $\omega_k = \det(x_j^{2^{i-1}})_{1 \le i,j \le k}$ la classe de Dickson supérieure de $D(k)$.

Proposition 7.2 *Si $i_1 > 2i_2 > \cdots > 2^{n-1} i_n > 0$, on a*

$$e_n \cdot \omega_1^{i_1 - 2i_2} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1} - 2i_n} \omega_n^{i_n} = (e_{n-1} \cdot \omega_1^{i_1 - 2i_2} \cdots \omega_{n-2}^{i_{n-2} - 2i_{n-1}} \omega_{n-1}^{i_{n-1}}) \cdot x_n^{i_n} + \sum_i f_i \cdot x_n^i,$$

pour certains $i > i_n$ et $f_i \in L_{n-1} \subset \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Démonstration Notons d'abord que ω_n est GL_n-invariant et l'on a un développement

$$\omega_n^{i_n} = \omega_{n-1}^{2i_n} \cdot x_n^{i_n} + \sum_{i > i_n} g_i \cdot x_n^i$$

pour certains $g_i \in \mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_{n-1}]$. Il suffit donc de montrer que

$$e_n \cdot \omega_1^{i_1} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1}} = e_{n-1} \cdot \omega_1^{i_1} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1}} + \sum_{j>0} h_j \cdot x_n^j$$

pour certains $h_j \in \mathbb{F}_2[x_1, \cdots, x_{n-1}]$. De manière équivalente, il suffit de montrer que

$$I_{n-1} e_n \cdot \omega_1^{i_1} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1}} = e_{n-1} \cdot \omega_{1,0}^{i_1} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1}}$$

avec $I_{n-1} = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, 0) \in M_n(\mathbb{F}_2)$. Posons $Q := Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \omega_1^{i_1} \cdots \omega_{n-1}^{i_{n-1}}$. On a

$$\begin{aligned} I_{n-1} e_n \cdot Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) &= I_{n-1} e_n I_{n-1} \cdot Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) \\ &= I_{n-1} \big(e_{n-1} e_{2,n-1} e_{n-1}\big) I_{n-1} \cdot Q(x_1, \cdots, x_{n-1}) \\ &= e_{n-1} \big(I_{n-1} e_{2,n-1} I_{n-1}\big) e_{n-1} \cdot Q(x_1, \cdots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Comme $I_1e_2I_1 = \mathrm{diag}(1,0) + \mathrm{diag}(0,0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{n-1}e_n \cdot Q &= e_{n-1}\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1,0)e_{n-1}\cdot Q + e_{n-1}\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,0)e_{n-1}\cdot Q \\
&= e_{n-1}\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1,0)e_{n-1}\cdot Q \qquad (\text{comme } e_{n-1}\cdot Q \text{ est divisible par } x_{n-1}) \\
&= e_{n-1}e_{n-1}\cdot Q \\
&= e_{n-1}\cdot Q.
\end{aligned}$$

La proposition suit. □

Démonstration de 2.5 Il suffit de vérifier que

$$\mathrm{Sq}^{i_1+1}\cdots\mathrm{Sq}^{i_n+1}(\frac{1}{x_1\cdots x_n}) = \bar{\Sigma}_n\cdot\omega_1^{i_1-2i_2}\cdots\omega_{n-1}^{i_{n-1}-2i_n}\omega_n^{i_n} \tag{1}$$

pour $i_1 > 2i_2 > \cdots > 2^{n-1}i_n \geq 0$. On fait une récurrence sur n. Le cas $n=1$ est trivial :

$$\mathrm{Sq}^{i_1+1}(\frac{1}{x_1}) = x_1^{i_1}.$$

Supposons que la proposition soit vraie pour tous les entiers inférieurs à n. Posons $J := (i_2+1,\cdots,i_n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sq}^J(\frac{1}{x_1\cdots x_n}) &= P_J(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\mathrm{Sq}^J(\frac{1}{x_1\cdots\hat{x}_i\cdots x_n}) \\
&+ \sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{x_ix_j}\mathrm{Sq}^J(\frac{1}{x_1\cdots\hat{x}_i\cdots\hat{x}_j\cdots x_n}) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{1}{x_ix_jx_k}\mathrm{Sq}^J(\frac{1}{x_1\cdots\hat{x}_i\cdots\hat{x}_j\cdots\hat{x}_k\cdots x_n}) + \cdots,
\end{aligned}$$

ou $P_J(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]$ est un polynôme de degré $i_2+\cdots+i_n-1$. Par hypothèse de récurrence et instabilité, on voit que les termes de la deuxième ligne sous-déssus sont nuls. De même, on a

$$\mathrm{Sq}^{i_1+1}P_J(x_1,\cdots,x_n) = 0$$

par instabilité. On obtient donc

$$\mathrm{Sq}^I(\frac{1}{x_1\cdots x_n}) = \mathrm{Sq}^{i_1+1}(\sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\mathrm{Sq}^J(\frac{1}{x_1\cdots\hat{x}_i\cdots x_n})).$$

L'égalité (1) résulte de l'hypothèse de récurrence et du lemme suivant.

Lemme 7.3

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sq}^{i_1+1}(\frac{\omega_1^{i_2-2i_3}(x_2)\cdots\omega_{n-2}^{i_{n-1}-2i_n}(x_2,\ldots,x_{n-1})\omega_{n-1}^{i_n}(x_2,\ldots,x_n)}{x_1}) \\
&\quad = \omega_1^{i_1-2i_2}(x_1)\cdots\omega_{n-1}^{i_{n-1}-2i_n}(x_1,\ldots,x_n)\omega_n^{i_n}(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

On va montrer le lemme en utilisant le *carré total stable* défini comme suit. Soit M un $\mathcal{A}$-module. Supposons que $H^*(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x]$ avec $|x| = 1$. Le carré total stable $\mathcal{S}\colon M \to \mathbb{F}_2[x,x^{-1}]\hat{\otimes}M$ est donné par

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{i\geq 0}x^{-i}\otimes\mathrm{Sq}^i(z), \quad z\in M.$$

Notons que $\mathrm{St}(z) = x^{|z|}\mathcal{S}(z)$ est le *carré total instable* de z. De plus $\mathcal{S}$ est multiplicatif si M est une $\mathcal{A}$-algèbre. H. Mùi [15] a montré que

$$\mathrm{St}(V_n(x_1,\ldots,x_n)) = V_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n).$$

Ici

$$V_i(x_1,\ldots,x_i) := \prod_{(a_1,\ldots,a_{i-1})\in\mathbb{F}_2^{i-1}} (a_1x_1+\cdots+a_{i-1}x_{i-1}+x_i)$$

et

$$\mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_n]^{B_n} \cong \mathbb{F}_2[V_1,\ldots,V_n].$$

Utilisant la relation $\omega_k = V_1\cdots V_k$, on a

$$\mathcal{S}\Big(\omega_k(x_2,\cdots,x_{k+1})\Big) = \frac{\omega_{k+1}(x,x_2,\cdots,x_{k+1})}{x^{2^k}}.$$

Posons

$$z = \frac{\omega_1^{i_2-2i_3}(x_2)\cdots\omega_{n-2}^{i_{n-1}-2i_n}(x_2,\ldots,x_{n-1})\omega_{n-1}^{i_n}(x_2,\ldots,x_n)}{x_1}.$$

On obtient

$$\mathcal{S}(z) = \frac{\omega_1^{i_1-2i_2}(x)\cdots\omega_{n-1}^{i_{n-1}-2i_n}(x,x_2,\ldots,x_n)\omega_n^{i_n}(x,x_2,\ldots,x_n)}{x^{i_1}}\mathcal{S}(\frac{1}{x_1}) =: \frac{\omega_I(x)}{x^{i_1}}\mathcal{S}(\frac{1}{x_1}).$$

L'admissibilité de la suite I permet d'écrire $\omega_I(x)$ sous la forme

$$\omega_I(x) = \sum_{j=0}^{m} f_j x^j$$

avec $f_j \in \mathbb{F}_2[x_2,\cdots,x_n]$. D'autre part, l'action de l'algèbre de Steenrod sur $\frac{1}{x_1}$ donne

$$\mathcal{S}(\frac{1}{x_1}) = \sum_{i\geq 0}\frac{x_1^{i-1}}{x^i}.$$

Il suit

$$\mathcal{S}(z) = \frac{1}{x^{i_1+1}}\sum_{i\geq 0}\sum_{0\leq j\leq m} f_j x_1^i x^{j-i}.$$

On voit clairement que le coefficient de $\frac{1}{x^{i_1+1}}$ dans la série formelle $\mathcal{S}(z)$ est $\sum_{j=0}^m f_j x_1^j = \omega_I(x_1)$. Le lemme est démontré. □

Références

[1] J. F. Adams, J. H. Gunawardena, H. Miller, *The Segal conjecture for elementary abelian p-groups*, Topology **24** (1985), no. 4, 435–460.

[2] G. Andrews, *The Rogers-Ramanujan reciprocal and Minc's partition function*, Pacific J. Math. **95** (1981), 251–256.

[3] H. E. A. Campbell, P. S. Selick, *Polynomial algebras over the Steenrod algebra*, Comment. Math. Helvetici **65** (1990), 171–180.

[4] A. Djament, *Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2}\otimes\Lambda^n$ dans la catégorie $\mathcal{F}$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 6, 1771–1823.

[5] P. Goerss, J. Lannes, F. Morel, *Vecteurs de Witt non commutatifs et représentabilité de l'homologie modulo p*, Invent. math. **108** (1992), 163–227.

[6] N. Kuhn, *The rigidity of $L(n)$*, Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985), 286–292, Lecture Notes in Math., 1286, Springer, Berlin, 1987.

[7] N. Kuhn, *The modular Hecke algebra and Steinberg representation of finite Chevalley groups. With an appendix by Peter Landrock*, J. Algebra **91** (1984), 125–141.

[8] N. Kuhn, S. Priddy, *The transfer and Whitehead's conjecture*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98** (1985), 459–480.

[9] J. Lannes, L. Schwartz, *Sur la structure des $\mathcal{A}$-modules instables injectifs*, Topology **28** (1989), 153–169.

[10] J. Lannes, S. Zarati, *Sur les $\mathcal{U}$-injectifs*, Ann. Scient. Ec. Nom. Sup. **19** (1986), 1–31.

[11] J. Lannes, S. Zarati, *Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation*, Math. Z. **194** (1987), no. 1, 25–59.

[12] W. H. Lin, *Unstable ext groups over the Steenrod algebra by injective resolutions*, Math. Z. **210** (1992), no. 2, 255–265.

[13] H. R. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Annals of Math. 120 (1984) 39–87.

[14] S. A. Mitchell, S. B. Priddy, *Stable splittings derived from the Steinberg module*, Topology **22** (1983), no. 3, 253–298.

[15] Huỳnh Mùi, *Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 319–369.

[16] L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Math., 1994.

[17] R. Steinberg, *Prime power representations of finite linear groups II*, Can. J. Math. **18** (1956), 580–591.

[18] S. Takayasu, *On stable summands of Thom spectra of $B(\mathbb{Z}/2)^n$ associated to Steinberg modules*, J. Math. Kyoto Univ. **39** (1999), no. 2, 377–398.

NGUYEN DANG HO HAI
Université de Hué, Collège des Sciences, 77 Rue Nguyen Hue, Hue Ville, VIETNAM
et
LAGA, UMR 7539 du CNRS, Université Paris 13
99, Av. J-B Clément, 93430 Villetaneuse, FRANCE
nguyen@math.univ-paris13.fr

LIONEL SCHWARTZ
LAGA, UMR 7539 du CNRS, Université Paris 13
99, Av. J-B Clément, 93430 Villetaneuse, FRANCE
schwartz@math.univ-paris13.fr

TRAN NGOC NAM
Université Nationale du Vietnam, Collège des Sciences, 334 Rue Nguyen Trai, Hanoi, VIETNAM
bruce-nam@hotmail.com