La filtration du degré sur la cohomologie modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires

Laurent Piriou et Lionel Schwartz

December 20, 2000

Abstract

Cet article traite d'un résultat relié à ce qu'il est convenu d'appeler la conjecture artinienne (ou conjecture de finitude). Cette conjecture peut s'énoncer de la façon suivante. Considérons la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps à deux éléments, de dimension finie, dans celle de tous les espaces vectoriels. Considérons la sous-catégorie pleine des foncteurs dont l'enveloppe injective est une somme directe finie d'objets injectifs indécomposables. La conjecture est que cette sous-catégorie est abélienne. En l'occurence le seul point à démontrer est qu'elle est stable par quotient.

Le résultat démontré dans cet article montre que le treillis des sous-objets des injectifs standards de la catégorie est "aussi simple" que possible en ce qui concerne la fitration par le poids des modules instables. On montre que les filtrations par le poids et celle des socles sont compatibles en un sens approprié. En appendice, outre des rappels, on inclut un résultat montrant que certains modules instables sont cycliques.

1 Introduction

Dans cet article on compare deux filtrations naturelles sur les injectifs standards de la catégorie $\mathcal{F}_\omega$ des foncteurs analytiques.
La première est donnée par le degré d'Eilenberg-Mac Lane, spécifique à la situation dans laquelle nous nous trouvons [HLS], [Sc], [K1]. Rappelons que

l'on définit la notion de foncteur de degré inférieur ou égal à n de la manière suivante. On note Δ l'endofoncteur de la catégorie $\mathcal{F}$ déterminé par

$$\Delta(F)(V) = \ker(F(V \oplus \mathbf{F}_2) \to F(V)) \quad .$$

On dit alors qu'un foncteur est de degré inférieur ou égal à n si $\Delta^{n+1}(F) = 0$.
On définit aussi la notion de plus grand sous-foncteur de degré inférieur ou égal à n d'un foncteur F quelconque, on le note $t_n(F)$. Un foncteur F est dit analytique si il est limite directe des foncteurs $t_n(F)$.
La seconde filtration est celle de Loewy, ou filtration des socles. Elle est définie dans toute catégorie abélienne.
Si on considère le foncteur $V \mapsto \mathbf{F}_2^{V^*}$ il est facile de voir que ces deux filtrations sont identiques. Ce foncteur qui représente $F \mapsto F(\mathbf{F}_2)^*$ est un objet injectif standard de $\mathcal{F}$.
Le résultat montre qu'en un sens approprié, ces deux filtrations sont compatibles.
Soit I_E, le foncteur qui représente le foncteur $F \mapsto F(E)^*$ de la catégorie $\mathcal{F}$ vers la catégorie $\mathcal{E}$, c'est-à-dire tel que l'on a une équivalence naturelle de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_E) \cong F(E)^* \quad .$$

Il est donné par la formule suivante :

$$V \mapsto \mathbf{F}_2^{\mathrm{Hom}(V,E)} \quad ,$$

où le membre de droite est l'ensemble des fonctions (applications d'ensemble) de $\mathrm{Hom}(V, E)$ dans $\mathbf{F}_2$. Ces objets sont les cogénérateurs injectifs standards de la catégorie.
On a :

Théorème 1.1 *Soit E un 2-groupe abélien élémentaire de dimension d. Si $n > d2^d$ tous les sous-foncteurs simples dans le quotient de $I_E/t_n(I_E)$ sont de degré $n+1$. Autrement dit le socle de $I_E/t_n(I_E)$ est somme directe finie de foncteurs simples de degré $n+1$.*

Ce problème a été étudié depuis plusieurs années par les deux auteurs, mais sa démonstration n'a t complte que récemment.
G. Powell en a donné une démonstration indépendante pour $\dim(E) = 2$. Dans la mesure où les foncteurs I_E sont des cogénérateurs pour la catégorie

$\mathcal{F}$ le résultat s'étend à tout foncteur analytique F dont le socle est fini, c'est-à-dire somme directe d'un nombre fini de foncteurs simples. En effet un tel foncteur F se plonge dans une somme directe finie de foncteurs I_E ([Sc]). Les filtrations par le degré et de Loewy sur F sont alors les filtrations induites par celles des I_E.

Théorème 1.2 *Soit F un foncteur dont l'enveloppe injective est facteur direct dans une somme directe finie d'injectifs indécomposables. Soit n un entier assez grand. Le socle de $F/t_n(F)$ est somme directe finie de foncteurs simples de degré $n+1$.*

Ce résultat suggère la question suivante :

Question 1.1 *Soit F un foncteur dont l'enveloppe injective est facteur direct dans une somme directe finie d'injectifs indécomposables. Alors le quotient $t_n(F)/t_{n+1}(F)$ admet-il une filtration dont les quotients sont des foncteurs de Weyl dès que n est assez grand?*

Les énoncés ci-dessus peuvent être posés, de manière équivalente, dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod. Et, en fait, c'est dans celle-ci que nous allons travailler. Rappelons que la catégorie des modules instables quotientée par la sous-catégorie des modules nilpotents est équivalente à la catégorie de foncteurs analytiques, c'est-à-dire limite directe de foncteurs polynomiaux [HLS] (part 1). Comme le foncteur I_E est l'image, par l'équivalence de catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$, [HLS], de la cohomologie modulo 2 H^*E du 2-groupe abélien élémentaire E les questions posées, portent, alors sur la cohomologie H^*E modulo 2 d'un 2-groupe abélien élémentaire E. Celle ci a été étudiée en détails durant ces vingt dernières années, en ce qui concerne ses propriétés en tant que module instable et algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod. Celles ci sont à la source de résultats fondamentaux en théorie de l'homotopie [Mi], [La].
L'analogue (voir Appendice A) de la filtration par le degré sur I_E est obtenu comme suit. La cohomologie H^*E est une algèbre de Hopf (de même que le foncteur I_E est un foncteur en $\mathbf{F}_2$-algèbre de Hopf) et la filtration correspondante n'est autre que la filtration primitive. A la notion de degré d'un foncteur polynômial correspond celle de poids pour un module instable. On peut alors formuler les énoncés correspondants. Ce sont eux que l'on va démontrer les résultats.

L'avantage est que dans ce contexte nous pourrons utiliser les opérations de Steenrod. Il existe une notion de vecteur de poids maximal pour un élément dans un module instable réduit, définie *via* l'équivalence de catégorie avec les foncteurs polynômiaux. Dans une large mesure les résultats centraux de cet article sont le comportement de ces vecteurs de poids maximal par rapport à certaines opérations de Steenrod ainsi que leur interprétation pour un élément dans une algèbre de polynômes. La démonstration repose aussi sur les propriétés de la base standard des modules de Weyl, et sur le fait que l'action de l'algèbre de Steenrod est particulièrement facile à calculer sur des éléments de base particulier, dits semi-standards.

2 Un cas particulier

Dans cette section on étudie un cas particulier. La réduction du théorème 1.1 à ce cas est faite dans les sections suivantes. On rappelle d'abord l'énoncé. Soit V un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension d. On a donc $H^*V \cong \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$, où $\{x_1, \ldots, x_d\}$ est une base de V^*. On conservera cette notation dans toute la suite.

Le lecteur qui n'est pas familier avec la terminologie et les résultats sur les modules instables, sur le poids et sur H^*V pourra commencer par lire l'appendice A qui contient les rappels nécessaires pour la suite, et il pourra consulter l'appendice B pour les opérations P_t^s.

Dans l'énoncé suivant par sous-objets simples de $H^*V/P_{n-1}(H^*V)$ on entend modules instables réduits $\mathcal{N}il$-fermés simples en tant qu'objet dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. La simplicité équivaut à dire que le quotient par tout sous-module non-trivial est un module instable nilpotent.

On commence par reformuler le théorème 1.1 :

Théorème 2.1 *Le socle de $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$ est un sous-objet du socle de $H^*V/P_{n-1}(H^*V)$. Il coïncide avec lui si $n > d2^d$. Par conséquent tous les sous-objets simples de $H^*V/P_{n-1}(H^*V)$ sont de poids exactement n dès que $n > d2^d$.*

Ceci implique le théorème 1.1 car, les objets contenus dans le socle de

$$P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$$

considéré comme objet dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$, sont de poids n en tant que modules instables (A.5).

Pour démontrer 2.1 il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soit $d = \dim(V)$. Supposons que $n > d2^d$, alors pour tout élément $x \in P_n(H^*V)$ tel que $x \notin P_{n-1}(H^*V)$ on peut trouver une opération de Steenrod β telle que $\beta(x) \in P_{n-1}(H^*V)$ et $\beta(x) \notin P_{n-2}(H^*V)$.*

Le lemme suivant décrit l'action d'opérations de Steenrod sur certaines classes

$$p \in P_n(H^*V) \subset H^*V \cong \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$$

telle que $p \notin P_{n-1}(H^*V)$. Il montre que la proposition 2.2 a lieu pour ces classes. On montrera après que l'on peut se ramener à travailler sur ce type de classes.
Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ une partition 2-régulière pour les colonnes On a donc $\mu_i - \mu_{i+1} \leq 1$ pour tout i. D'après A.4 on a aussi $\mu_1 \leq d$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ sa partition conjuguée (ou associée), c'est-à-dire que :

$$\lambda_j = \mathrm{Card}\{i \mid \mu_i \geq j\} \quad ,$$

on a $t = \lambda_1$ et $h = \mu_1$. La partition λ est 2-régulière, c'est-à-dire que $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, pour tout i. On conserve ces notations dans la suite.
Soit un ensemble S d'entiers $\{h_1, \ldots, h_t\}$, avec $h_i < h_j$ si $i < j$.
On suppose aussi la suite h_i croissante, et que pour tout i on a l'inégalité :

$$2^{h_i} > \sum_1^{i-1} \mu_j 2^{h_j} \quad .$$

Cette condition assure que l'opération ϱ introduite plus bas agit sur les éléments considérés comme une dérivation, (*cf.* Appendice B).

Lemme 2.3 *Supposons que le polynôme $p \in \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ est de poids n exactement et est somme de monômes de la forme :*

$$x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \quad ;$$

où

- *où chaque exposant k_i s'écrit :*

$$k_i = \sum_j 2^{b_{i,j}} \quad ,$$

  où les entiers $b_{i,j}$, qui sont non-nécessairement deux à deux distincts (il ne s'agit donc pas nécessairement de la décomposition 2-adique de k_i), appartiennent à l'ensemble $\{h_1, \ldots, h_t\}$,

- *le nombre d'entiers $b_{i,j}$ égaux à h_ℓ est égal à μ_ℓ,*

Supposons enfin que :

- *$n > d2^d$, et que*
- *si $i < j$ et $\mu_i = \mu_j$, la classe $P^{h_i}_{h_j - h_i}(p)$ est de poids au plus $n-1$.*

Alors il existe une opération $P^s_t = \varrho$ telle que $\varrho(p) \in P_{n-1}(H^*V)$, mais $\varrho(p) \notin P_{n-2}(H^*V)$.

L'hypothèse est donc que les mônomes qui apparaissent dans p ont des exposants qui s'écrivent comme somme des 2^{h_ℓ}. La puissance 2^{h_ℓ} peut apparaître plusieurs fois dans l'exposant d'un x_i donné, et apparait en tout exactement μ_ℓ fois. Un tel monôme est de poids strictement inférieur à n si une même puissance 2^{h_ℓ} apparaît plusieurs fois dans l'exposant d'un même x_i. En d'autres termes si la décomposition donnée ci-dessus des exposants en somme de puissances de 2 est la décomposition 2-adique le monôme est de poids n, et ne l'est pas sinon.
Démonstration : Choisissons un monôme

$$m = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$$

de poids n dont le coefficient est non-nul dans le polynôme p, un tel monôme existe car p est de poids n (Appendice A).

Lemme 2.4 *Il existe une paire (a, b) d'éléments de S tel que, pour tout entier i, $1 \le i \le d$*

- *soit 2^a et 2^b apparaissent tous les deux dans la décomposition donnée en somme de puissances de 2 de k_i,*
- *soit ni 2^a, ni 2^b n'apparaîssent.*

C'est un argument élémentaire de dénombrement. A l'entier $h_j \in S$ on associe un sous-ensemble de $\{1, \dots, d\}$: on considére le sous-ensemble des indices i de $\{1, \dots, d\}$ pour lesquels 2^{h_j} apparait dans la décomposition donnée de k_i en somme de puissances de 2, par hypothèse il apparaît une fois au plus car le monôme est de poids n. Il y a 2^d sous-ensembles.
Donc dès que $\lambda_1 = t > 2^d$ un même sous-ensemble (au moins) doit apparaître deux fois, pour $a = h_\ell$ et $b = h_k$, on notera que $\mu_\ell = \mu_k$.

Or $n > d2^d$. Sous cette hypothèse on montre alors facilement que pour une partition de l'entier μ, 2-régulière pour les colonnes, on a $\lambda_1 = t > 2^d$. Le lemme 2.4 est donc démontré.

On suppose que $a < b$, et on pose $\varrho = P^s_t$ avec $s = a$ et $a + t = b$. La proposition suivante achève cette partie de la démonstration.

Proposition 2.5 *L'élément $P^{b-a}_a(p)$ est non-nul et de poids exactement $n-1$.*

Démonstration : La dernière hypothèse de 2.3 implique que la classe $P^a_{b-a}(p)$ est donc de poids au plus $n-1$.
Elle est de poids exactement $n-1$ à cause des observations suivantes :

- A cause de l'inégalité :

  $$2^{h_i} > \sum_1^{i-1} \mu_j 2^{h_j} \quad .$$

  l'opération ϱ sur les éléments considérés comme une dérivation (*cf.* Appendice B). Plus précisement sur un monôme qui vérifie les deux premières conditions du lemme 2.3 on a :

  $$\varrho(x_1^{k_1}\dots x_d^{k_d}) = \sum_{b_{\ell,k}=a} x_1^{k_1}\dots x_\ell^{k_\ell - 2^a + 2^b}\dots x_d^{k_d}$$

- Soit m le monôme considéré plus haut et soit $T \subset \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des indices i tels que la décomposition de l'exposant k_i de x_i comporte 2^a et 2^b une fois et une seule, soit $\tilde{k}_i = k_i - 2^a - 2^b$. Le calcul montre que

  $$\varrho(m) = \sum_{i\in T} x_i^{\tilde{k}_i + 2^{b+1}} \prod_{j\neq i} x_j^{k_j} \quad .$$

- Ce terme est non nul et de poids $n-1$, exactement. Pour montrer que $\varrho(p)$ l'est aussi il suffit de montrer qu'en appliquant ϱ à un autre monôme apparaissant dans p, soit

  $$m' = x_1^{k'_1}\dots x_d^{k'_d} \quad ,$$

  on ne peut obtenir les monômes du membre de droite de l'équation ci-dessus;

- or l'effet de l'opération ϱ sur m' est de substituer dans l'exposant d'une variable x_i une puissance 2^b à une puissance 2^a, et de sommer sur toutes les occurences de cette situation. On a donc :

$$\varrho(\Pi_i\ x_i^{k'_i}) = \sum_{i \in Z} x_i^{k'_i - 2^a + 2^b}\, \Pi_{j \neq i} x_j^{k'_j} \quad ,$$

  où Z est l'ensemble des indices i, pour lesquels 2^a apparait dans la décomposition 2-adique de l'exposant k'_i;

- si m' est de poids n les termes dans le membre de droite ci-dessus sont de poids n si 2^b n'apparaît pas dans la décomposition 2-adique de k'_i, mais par hypothèse, les termes de poids n s'annulent. Supposons donc que 2^b apparaît dans la décomposition, pour tout $i \in Z$. On a donc une équation :

$$\varrho(m') = \sum_{i \in Z} x_i^{\tilde{k}'_i + 2^{b+1}} \prod_{j \neq i} x_j^{k_j} \quad .$$

  Si un terme du membre de droite de cette équation est égal à un terme du membre de droite de l'équation analogue pour $\varrho(m)$, on a clairement $m = m'$.

  Donc les monômes m' de poids n ne peuvent créer de termes annulant un monôme de $\varrho(m)$.

- Il reste à considérer les monômes m' de poids $n-1$. Quand on applique l'opération ϱ à m' elle agit comme une dérivation, en particulier on a $\varrho(m') = \sum_i \varrho(x_i^{k'_i} \prod_{j \neq i} x_j^{k'_j}$. Par ailleurs $\varrho(x_i^{k'_i})$ est non nul si et seulement si 2^a apparait dans la décomposition 2-adique de l'exposant k'_i.

- si 2^b apparait aussi dans la décomposition le facteur obtenu sera de poids inférieur où égal à $n-2$;

- sinon, les termes obtenus sont des monômes de poids $n-1$. L'exposant d'une variable x_i comportera dans sa décomposition 2-adique 2^b, or les termes de $\varrho(m)$ n'ont pas cette propriété.

Ceci achève l'argument.

On doit maintenant expliquer comment se réduire à des classes de ce type. On donne ci-dessous la première partie de la réduction, et on achèvera ceci dans la section suivante. On donne auparavant voici des rappels.
Les objets simples de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ sont décrits dans ([FS], [Sc]) de la manière suivante : on donne une liste de représentants de modules instables réduits $\mathcal{N}il$-fermés qui sont simples en tant qu'objet dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. La simplicité dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ équivaut à dire que le quotient par tout sous-module non-trivial est un module instable nilpotent. Dans la suite, par abus de langage, on dira souvent **modules réduits simples**.
On conserve dans toute la suite les notations μ et λ introduites plus haut pour une paire de partitions conjuguées. Si μ est 2-régulière pour les colonnes λ est 2-régulière. Les partitions 2-régulières pour les colonnes classifient les représentations irréductibles sur $\mathbf{F}_2$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. A une partition μ 2-régulière pour les colonnes on associe un symétriseur d'Young $s_\mu \in \mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$. La représentation simple associée est isomorphe à $s_\mu\mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$. L'élément s_μ n'est pas déterminé de manière unique. Par exemple à la partition$\underbrace{(1,\ldots,1)}_{n \quad \text{fois}}$ est associée la représentation triviale de dimension 1, et l'élément s_μ associé (unique dans ce cas) est la somme de tous les éléments du groupe $\mathcal{S}_n$. On renvoie à [Sc], [PS] et [K] pour plus de détails.
Les modules réduits simples sont indexés par les partitions 2-régulières pour les colonnes, l'entier n décrivant tous les entiers non-négatifs.
Soit $F(1)$ le module instable libre en un générateur de degré 1. Il s'identifie au sous-module de l'algèbre polynomiale $\mathbf{F}_2[u]$ engendré par la classe u. Il admet pour base en tant que $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel gradué les éléments u^{2^n}.
Le module instable réduit simple associé à une partition μ est isomorphe à

$$s_\mu F(1)^{\otimes n} \quad .$$

On le notera $S_\mu(F(1))$.
Par exemple à la partition $\underbrace{(1,\ldots,1)}_{n \quad \text{fois}}$ est associé le module $\Lambda^n(F(1))$.
Une autre description du module réduit simple est donnée, dans le contexte des foncteurs, dans [PS]. Soit λ la partition conjuguée de μ. Le foncteur est alors un sous-quotient du foncteur :

$$V \mapsto \bigotimes_{i=1,\ldots,d} \Lambda^{\lambda_i}(V)$$

C'est l'unique facteur de composition supérieur d'un sous-objet du produit tensoriel qui est déterminé comme noyau d'une certaine application. Ce noyau, noté $W_\mu(V)$, est appelé module de Weyl. Dans la prochaine section on reprendra rapidement cette construction dans le cadre des modules instables, et on décrira des générateurs de ces modules en tant que modules sur l'algèbre de Steenrod.

Pour achever de démontrer 2.2 il faut remplacer la classe x par une classe p qui satisfait aux hypothèses de 2.3.Voici la première étape de ce processus, annoncée plus haut, elle relève de généralités sur la théorie des modules.
Soit $x \in P_n(H^*V)$ tel que $x \notin P_{n-1}(H^*V)$ et $\bar{x} \in P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$ sa réduction. Le socle de ce module -considéré évidemment comme objet dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}_il$ -[Sc] chapitre 5- est une somme directe de la forme $\oplus_\mu \; S_\mu(F(1))^{a_\mu}$, la somme étant prise sur les partitions 2-régulières pour les colonnes de n. Le facteur $S_\mu(F(1))^{a_\mu}$ est appelé la composante isotypique associée à μ. Tout sous-module non-trivial de $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$ a une intersection non-triviale avec le socle. On peut donc trouver une opération de Steenrod ω telle que $\omega(\bar{x})$ est non-nulle et dans le socle de $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$.
Soit $\omega(\bar{x}) = \sum_\mu z_\mu$, où z_μ est dans la composante isotypique associée à μ. Soit I_μ l'idéal à gauche de $\mathcal{A}$ annulateur de z_μ. Si z_μ est non-nul le module instable $\mathcal{A}z_\mu$ est isomorphe à $S_\mu(F(1))$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ (par simplicité de $S_\mu(F(1))$). Soit α une partition (2-régulière pour les colonnes) de n, des arguments classiques de théorie des modules -utilisant la simplicité des $S_\mu(F(1))$- montrent alors que l'idéal I_α n'est pas contenu dans l'intersection des idéaux I_μ, $\mu \neq \alpha$. On obtient alors, encore une fois utilisant des arguments classiques, que :

Proposition 2.6 *Il existe une opération de Steenrod θ telle que :*

- *la réduction de $y = \theta(x)$ dans $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$, est non nulle, et dans le socle de ce module;*
- *de plus, elle est dans une composante isotypique de ce socle.*

Il faut maintenant modifier la classe y pour qu'elle ait les propriétés requises par 2.3. Ceci dépend essentiellement de la structure des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.

3 Générateurs des modules de Weyl et des modules simples

Cette section débute par une description plus explicite des modules de Weyl, des modules réduits simples et de leurs générateurs. Une part de ce qui suit de ce qui suit peut être trouvé dans [JK], [FS], [Sc] et [PS]. La différence, avec [PS], où on travaille dans le contexte des foncteurs, est que nous aurons besoin d'informations sur les générateurs des modules en question. Enfin dans [FS] on utilise, non pas les modules de Weyl, mais leurs duaux. Ceci étant, dans une très large mesure les résultats ci-dessous peuvent être déduits de ces deux références et de [JK].
Le théorème suivant décrit les principales propriétés des modules de Weyl.

Théorème 3.1 *Soit μ une partition 2-régulière pour les colonnes de l'entier n, et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ la partition conjuguée. Le module de Weyl $W_\mu(F(1))$ est un sous-module du produit tensoriel suivant :*

$$\Lambda^{\lambda_1}(F(1)) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\lambda_h}(F(1)) \quad .$$

Il est défini comme étant le noyau d'une application dans une somme directe de produit tensoriel de puissances extérieures. L'élément

$$w_\mu = \bigotimes_{i=1}^{i=d} u \wedge u^2 \wedge u^4 \wedge \ldots \wedge u^{2^{\lambda_i - 1}}$$

est un générateur comme module sur l'algèbre de Steenrod du module de Weyl $W_\mu(F(1))$. En tant qu'objet dans la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ le module de Weyl a un unique facteur de composition supérieur. C'est-à-dire que son quotient semi-simple maximal est simple. De plus ce quotient est de degré exactement n.

L'application définissant $W_\mu(F(1))$ comme un noyau est décrite en détails dans [PS] dans le contexte des foncteurs. Elle est décrite ici brièvement dans celui des modules. Cette construction est celle du théorème des noyaux de James.
Soit le module $\Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^b(F(1))$, $a \geq b$, pour $1 \leq t \leq b$ soit l'application

$$\psi_{a,b,t} : \Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^b(F(1)) \to \Lambda^{a+t}(F(1)) \otimes \Lambda^{b-t}(F(1))$$

qui est la composée des applications suivantes :

$$\Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^b(F(1)) \xrightarrow{1\otimes\Delta_t} \Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^t(F(1)) \otimes \Lambda^{b-t}(F(1))$$

$$\Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^t(F(1)) \otimes \Lambda^{b-t}(F(1)) \xrightarrow{\text{mult}\otimes\text{Id}} \Lambda^{a+t}(F(1)) \otimes \Lambda^{b-t}(F(1)),$$

L'application Δ_t est induite par la diagonale $F(1) \to F(1) \oplus F(1)$, de $\Lambda^b(F(1))$ dans $\Lambda^b(F(1) \oplus F(1)) \cong \oplus_{k+\ell=b} \Lambda^k(F(1)) \otimes \Lambda^\ell(F(1))$, composée avec la projection sur le facteur concerné, et mult désigne la multiplication. On note alors $\psi_{a,b}$ l'application de source $\Lambda^a(F(1)) \otimes \Lambda^b(F(1))$, qui est le produit des applications $\psi_{a,b,t}$, $a \geq t \geq 1$. On étend l'application $\psi_{\lambda_i,\lambda_{i+1}}$ en une application de source Λ^λ par tensorisation à gauche et à droite par l'identité. Puis sommant sur l'indice i de 1 à $d-1$ on obtient une application de

$$\bigotimes_i \Lambda^{\lambda_i}(F(1))$$

dans une somme directe de produits tensoriels de puissances extérieures. Soit ψ_λ cette application. Le théorème des noyaux de James dit essentiellement que :

Théorème 3.2 *Le module $W_\mu(F(1))$ est contenu dans et égal au noyau* $\operatorname{Ker}\psi_\lambda$.

Cet énoncé suppose, évidemment, que l'on a donné une autre description du module de Weyl, par exemple à l'aide des symétriseurs de Young (pour les partitions 2-régulières) comme cela a été fait plus haut. Ce résultat, rend transparent le fait que l'élément w_μ, et plus généralement les éléments $w_\mu(\mathbf{x})$ définis ci-dessous, appartiennent au module de Weyl.
Il faut maintenant préciser l'affirmation sur les symétriseurs d'Young. La discussion qui suit ne vaut que sous l'hypothèse que μ est 2-régulière. Il existe un élément $\varepsilon_\mu \in \mathcal{S}_n$ tel que le module $W_\mu(F(1))$ est isomorphe au module $\varepsilon_\mu F(1)^{\otimes n}$. Une formule explicite pour ε_μ se trouve dans [JK]. Il peut être choisi comme le produit $C_\mu R_\mu$, de la somme $C_\mu \in \mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$, des éléments du groupe $\mathcal{S}_n$ qui laissent fixe les colonnes du diagramme de Young associé à μ, par la somme $R_\mu \in \mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$, des éléments qui laissent fixe les lignes.
Pour toute partition μ l'élément w_μ s'écrit :

$$w_\mu := C_\mu \bigotimes_{i=1}^{i=h} u \otimes u^2 \otimes u^4 \otimes \ldots \otimes u^{2^{\lambda_i-1}} \quad ,$$

dans cette formule les colonnes du diagramme de Young correspondent à la partition de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ donnée par $\{1,\ldots,\lambda_1\},\{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\},\ldots$.
Comme la partition est 2-régulière pour les colonnes on a :

$$w_\mu = C_\mu R_\mu \widetilde{\omega}_\mu$$

avec

$$\widetilde{\omega}_\mu := \bigotimes_{i=1}^{i=h} u^{2^{\lambda_i - 1}} \otimes \ldots \otimes u^4 \otimes u^2 \otimes u \quad .$$

Cet énoncé se trouve dans les exercices de [JK] (Chap. 8 8.2, 8.3).
On a donc :

$$W_\mu(F(1)) \cong C_\mu R_\mu F(1)^{\otimes n} \quad .$$

On a :

Théorème 3.3

$$W_\mu(F(1)) \cong \mathcal{A} w_\mu$$

Ce résultat a été démontré par le second auteur. La démonstration a été écrite en détails par P. Krason dans sa thèse. Un résultat aussi précis n'est pas nécessaire ici. Un résultat plus faible, vrai pour toute partition μ, et plus facile à démontrer suit. La démonstration de 3.3 sera donnée en appendice.
La troisième partie du théorème 3.1 est explorée en détails dans [FS], [PS], [Sc], et peut être déduite de [K1]. En fait le module simple $S_\mu(F(1))$ est aussi donné par la formule :

$$S_\mu(F(1)) \cong R_\mu C_\mu R_\mu F(1)^{\otimes n} \quad .$$

Définition 3.4 *On dira qu'un élément x d'un module instable M est F-générateur si le quotient $M/\mathcal{A}x$ est nilpotent.*

Par définition d'un objet simple dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ on a :

Lemme 3.5 *Un élément quelconque non nul de $S_\mu(F(1))$ est un F-générateur.*

Le résultat annoncé ci-dessus s'exprime comme suit. Soit $\mathbf{x} = \{x(i)\}$, $1 \leq i \leq \lambda_1$, une suite strictement croissante d'entiers positifs ou nuls. On a :

Proposition 3.6 *L'élément*

$$w_\mu(\mathbf{x}) := \bigotimes_{i=1}^{i=d} \bigwedge_{1\leq j\leq \lambda_i} u^{2^{x(j)}} \quad ,$$

est un F-générateur du module de Weyl. Ces F-générateurs seront dits semi-standards.

Comme plus haut, l'élément $w_\mu(\mathbf{x})$ est de la forme $C_\mu R_\mu \widetilde{w}_\mu(\mathbf{x})$ pour un certain tenseur $\widetilde{w}_\mu(\mathbf{x})$ dans $F(1)^{\otimes n}$.
Soit n entiers deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_n$ et soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Proposition 3.7 *L'élément*

$$u_\mu(\mathbf{a}) = C_\mu R_\mu \bigotimes_{i=1}^{i=n} u^{2^{a_i}} \quad ,$$

est un F-générateur de $W_\mu(F(1))$. Ces F-générateurs seront dits standards.

Le degré ℓ d'un F-générateur standard est tel que $\alpha(\ell) = n$, où α est le nombre de puissances de 2 dans la décomposition 2-adique de ℓ. On rappelle que μ est une partition de l'entier n. Ceci n'a pas lieu pour le degré d'un F-générateur semi-standard.
La proposition 3.7 est conséquence directe de l'observation suivante : l'élément $\bigotimes_{i=1}^{i=n} u^{2^{a_i}}$ est un F-générateur pour $F(1)^{\otimes n}$, affirmation qui se démontre à l'aide des opérations P_t^s décrites dans l'appendice B, voir [Sc] section 5.5.
La démonstration de 3.6 est donnée ci-dessous.
Soit μ une partition 2-régulière pour les colonnes. Les projections des éléments considérés en 3.5 et 3.6, dans le module simple $S_\mu(F(1))$, sont des F-générateurs de $S_\mu(F(1))$. On les appellera aussi F-générateurs semi-standards et standards. Par abus on conservera la même notation. L'observation triviale suivante sera utilisée plus loin : si une opération de Steenrod annule un générateur de $W_\mu(F(1))$, elle annule aussi la projection de cette classe dans $S_\mu(F(1))$.

Proposition 3.8 *Les classes du socle de $H^*V/P_{n-1}(H^*V)$ qui sont associées à des générateurs semi-standards de $S_\mu(F(1))$ ont les propriétés requises par le lemme 2.3.*

On va le vérifier, et en même temps montrer comment, à partir d'une classe quelconque se ramener à une classe associée à un F-générateur semi-standard.

Démonstration de 3.6 et de 3.8
Considérons 3.6, on se place, pour simplifier les notations, dans le cas où $x(i) = i - 1$, la démonstration s'étend sans peine au cas général. Soit l'opération :

$$\eta = \prod_{i=1}^{i=\lambda_1} \prod_{j=1}^{j=\mu_i} P^{i-1}_{c_{(i,j)}} \quad ,$$

où on suppose que les entiers $a_{(i,j)} := i - 1 + c_{(i,j)}$ sont deux à deux distincts, et sont tous supérieurs à λ_1.
L'application des règles de calcul énoncées dans l'appendice B ci-dessous donne :

Lemme 3.9 *La classe $\eta(w_\mu)$ est le F-générateur standard $u_\mu(\mathbf{a})$, avec $\mathbf{a} = (a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, \ldots, a_{(2,1)}, \ldots)$.*

Ceci montre donc qu'il existe une opération envoyant w_μ sur un F-générateur standard, et donc que w_μ est un F-générateur. La démonstration s'étend sans probléme à $w_\mu(\mathbf{x})$.
Soit $u_\mu(\mathbf{a})$ un F-générateur standard, tel que décrit en 3.7. Pour démontrer 3.8 il faut reexpliciter la démonstration et décrire une opération ϕ et un entier h tels que $\phi(u_\mu(\mathbf{a})) = \mathrm{Sq}_0^h w_\mu(\mathbf{x}) = w_\mu(\mathbf{x})^{2^h}$.
L'opération est donnée par la formule suivante :

$$\phi = \prod_{1 \leq i \leq \lambda_1} \prod_{1 \leq j \leq \mu_i} P^{a_{\ell_i - j+1}}_{h_i - a_{\ell_i - j+1}} \quad ,$$

où $\ell_{i-1} = \lambda_1 + \ldots \lambda_{i-1}$, si $i > 1$, et $\ell_0 = 0$. où $m_{i-1} = \mu_1 + \ldots + \mu_{i-1}$, si $i > 1$, et $m_0 = 0$. et $h_i = x(i) + h$, l'entier h est assez grand pour que toutes les quantités $h_i - a_j$ soient positives, et strictement supérieure aux a_j. Ces conditions assurent que chaque opération P^s_t dans le produit n'agit que sur un des termes du tenseur.

Lemme 3.10 *On a :*

$$\phi(u_\mu(\mathbf{a})) = \mathrm{Sq}_0^h(w_\mu(\mathbf{x})) = w_\mu(\mathbf{x})^{2^h} \quad .$$

En effet :

$$\phi(\bigotimes_{i=1}^{i=n} u^{2^{a_i}}) = \bigotimes_{i=1}^{i=\mu_1} \bigotimes_{1\leq j\leq \lambda_i} u^{2^{h+x(\ell_i-j))}} \quad ,$$

où $\ell_{i-1} = \lambda_1 + \ldots \lambda_{i-1}$, si $i > 1$, et $\ell_0 = 0$. Soit

$$\widetilde{\omega}_\mu(\mathbf{x}) = \bigotimes_{i=1}^{i=\mu_1} \bigotimes_{1\leq j\leq \lambda_i} u^{2^{x(\ell_i-j)}} \quad .$$

Comme plus haut les colonnes du diagramme de Young correspondent à la partition de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ donnée par $\{1,\ldots,\lambda_1\},\{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\},\ldots$.
On a donc :

$$\phi(u_\mu(\mathbf{a}) = C_\mu R_\mu \widetilde{\omega}_\mu(\mathbf{x})^{2^h} \quad .$$

Enfin, comme la partition est 2-régulière pour les colonnes, comme plus haut, on a :

$$w_\mu(\mathbf{x}) = C_\mu R_\mu \widetilde{\omega}_\mu(\mathbf{x}) \quad .$$

Le résultat suit.
Ces calculs qui sont faits dans $W_\mu(F(1))$, valent par projection dans son quotient simple $S_\mu(F(1))$.

Revenons à la démonstration de 3.8 et à la fin de la démonstration de 2.2 , que l'on va faire conjointement.
On reprend donc l'argumentation à la fin de la section 2. On garde les hypothèses sur la classe y qui y sont faites. On suppose de plus qu'elle se projette sur un F-générateur standard d'un module isomorphe à $S_\mu(F(1))$, on peut faire cela quitte à remplacer y par $\beta(y)$ pour une opération appropriée β. Son degré ℓ est donc tel que $\alpha(\ell) = n$. D'après A.2, elle s'écrit comme somme de monômes $x_1^{k_1}\ldots x_d^{k_d}$ avec

$$\alpha(k_1) + \ldots + \alpha(k_d) = n$$

et

$$k_1 + \ldots + k_d = \ell \quad .$$

Donc pour tout i, on peut trouver un sous-ensemble $S_i \subset \{1,\ldots,n\}$ avec

$$k_i = \sum_{j\in S_i} 2^{a_j} \quad ,$$

de plus les ensembles S_i forment une partition de $\{1, \ldots, n\}$, ils dépendent évidemment du monôme choisi.
Appliquons une opération de Steenrod ϕ telle que celle décrite auparavant dans cette section. Le lemme suivant montre que $p = \phi(y) \in \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ satisfait aux hypothèses de 2.3 et termine donc la démonstration de 2.2 .

Lemme 3.11 *La classe de p dans le quotient par $P_{n-1}(H^*V)$ s'identifie à un F-générateur semi-standard de $S_\mu(F(1))$. Le polynôme p est somme de monômes de la forme :*

$$x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \quad ;$$

où chaque exposant k_i s'écrit :

$$k_i = \sum_j 2^{b_{i,j}} \quad ,$$

et les $b_{i,j}$ sont non-nécessairement deux à deux distincts, et appartiennent à l'ensemble $\{h_1, \ldots, h_t\}$, $t = \lambda_1$, et le nombre d'occurences des indices $b_{i,j}$ égaux à h_ℓ est égal à μ_ℓ.

Les règles de calcul concernant les opérations P_t^s donnent le lemme.
Dans la suite on dira que la partition μ est **vecteur de poids maximal** de $s \in M$, M module instable réduit, si la composante isotypique associée à S_μ du quotient semi-simple maximal de $\mathcal{A}s$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ est non-nulle. Un élément peut avoir plusieurs vecteurs de poids maximal.
Les lemmes 3.10 et 3.11 ont comme corollaire :

Corollaire 3.12 *Si un élément $x \in \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ admet pour unique vecteur de poids maximal la partition μ et a pour image dans S_μ un élément qui s'identifie à un F-générateur semi-standard, alors c'est un polynôme de la forme décrite dans 3.11.*
Inversement soit $x \in P_n(H^*V)$, et soit μ une partition 2-régulière de l'entier n, supposons que x, en tant que polynôme en les variables x_i soit somme de monômes de la forme :

$$x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \quad ;$$

où chaque exposant k_i s'écrit :

$$k_i = \sum_j 2^{b_{i,j}} \quad ,$$

les $b_{i,j}$ appartiennent à un ensemble d'entiers deux à deux distincts $\{h_1, \ldots, h_t\}$, $t = \lambda_1$, enfin le nombre d'occurences des indices $b_{i,j}$ égaux à h_ℓ est égal à μ_ℓ. Alors les vecteurs de poids maximal, qui sont partitions de l'entier n, de x sont des partitions μ' (μ' 2-régulière pour les colonnes) avec μ inférieur à μ' pour l'ordre naturel sur les partitions [JK].

La première partie du corollaire vient de ce que -à cause de 3.10- tout F-générateur semi-standard peut être obtenu, à élévation à une puissance de 2 prés comme image sous l'action d'une opération d'un F-générateur standard comme il est décrit plus haut. Puis on applique 3.11.
La seconde partie se démontre comme suit. On considère l'image de x dans le quotient $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$. Celui ci est isomorphe à la somme directe

$$\bigoplus_\nu \quad \Lambda^{\nu_1}(F(1)) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\nu_d}(F(1))$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ parcourt l'ensemble de d-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme n. Chaque produit tensoriel de puissances extérieures se plonge dans $F(1)^{\otimes n}$ [FS]. Par hypothèse, *via* ce plongement, x a dans chacun des facteurs pour image une somme de tenseurs de la forme $u^{2^{a_1}} \otimes \ldots \otimes u^{2^{a_n}}$, où les a_i appartiennent à l'ensemble $\{h_1, \ldots, h_t\}$, le nombre de a_j égaux à h_i étant μ_i.
Considérons l'application qui envoie le module instable engendré par x sur son quotient semi-simple maximal de poids n (au sens de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$). Tout module instable réduit simple de poids n se plonge dans $F(1)^{\otimes n}$ [FS]. Si bien que l'on obtient par composition une application ϕ, de source $\mathcal{A}x \subset P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$ et d'image une somme directe finie de $F(1)^{\otimes n}$, telle que $\phi(x)$ soit dans le socle de l'image et ait les mêmes vecteurs de poids maximaux -en poids n- que x.
Le module $F(1)^{\otimes n}$ est injectif parmi les modules instables réduits de poids n [FS]. L'application ϕ s'étend donc en une application de source une somme directe finie de $F(1)^{\otimes n}$ vers une image de même type. L'anneau des endomorphismes de $F(1)^{\otimes n}$ est l'algèbre $\mathbf{F}_2[S_n]$ [Sc], chaque élément du groupe symétrique agissant par permutation des coordonnées. Il en résulte que $\phi(x)$ est aussi une somme de tenseurs de la forme $u^{2^{a_1}} \otimes \ldots \otimes u^{2^{a_n}}$, où les a_i appartiennent à l'ensemble $\{h_1, \ldots, h_t\}$, le nombre d'occurence de h_i parmi les a_j étant μ_i.
Le résultat est alors une conséquence de la description de la base des modules W_μ donnée dans [JK], voir aussi l'appendice C. Elle donne par projection un

système générateur de S_μ. On applique le résultat du chapitre 8 de [JK] en substituant à un espace vectoriel V le module instable $F(1)$ et sa base canonique. On renvoie aussi à [PS]. Or un exercice aisé de combinatoire montre qu'un élément qui est somme de tenseurs du type décrit plus haut ne peut provenir que d'un μ'-tableau, avec μ' est inférieur à μ ([JK] chapitre 8). Ceci sétend à tout plongement de S_μ dans $F(1)^{\otimes n}$ à cause des remarques faites plus haut : on passe d'un plongement à un autre par une application induite par une somme d'éléments du groupe symétrique.
Le résultat suit.

A Le poids pour les modules instables

Un module instable M est **réduit** si l'application

$$x \mapsto \mathrm{Sq}_0(x) = \mathrm{Sq}^{|x|}x$$

est injective ou s'il ne contient aucune suspension non-triviale. Si M est une algèbre instable le terme de droite est égal à x^2, ce qui explique la terminologie. Les modules instables H^*E sont des cogénérateurs pour les modules instables réduits [LS]. C'est-à-dire que tout module réduit se plonge dans un produit de H^*E.
Un module instable M est **nilpotent** si pour tout $x \in M$ il existe k tel que $\mathrm{Sq}_0^k x = 0$.
On rappelle que dans un algèbre instable $\mathrm{Sq}_0 x = x^2$, par abus on écrira donc parfois x^{2^s} pour $\mathrm{Sq}_0^s(x)$.
Un module instable M est $\mathcal{N}il$-**fermé**, s'il ne peut être plongé dans un module N réduit distinct de lui-même, et tel que pour tout $x \in N$ il existe k avec

$$\mathrm{Sq}_0^k(x) \in M \quad .$$

Les modules instables réduits sont filtrés par le poids, [FS]. Cette filtration correspond à celle du degré sur les foncteurs. Comme il a été dit plus haut, la filtration de H^*E par le poids s'identifie à la filtration primitive. En utilisant le fait que les H^*E sont cogénérateurs on induit la fitration par le poids sur un module réduit quelconque à partir de la filtration primitive des H^*E. Cette filtration ne dépend pas du plongement.
Voici une caractérisation intrinsèque de la filtration par le poids pour un module réduit.

Proposition A.1 *Un module réduit M est de poids inférieur ou égal à d si et seulement si il est nul en tout degré k tel que $\alpha(k) > d$, où $\alpha(k)$ désigne le nombre de puissances de 2 dans la décomposition 2-adique (en base 2) de k. On dira que M est de poids d si il est de poids inférieur ou égal à d, mais n'est pas de poids inférieur ou égal à $d-1$.*

On notera $w(M)$ le poids d'un module, le poids $w(x)$ d'un élément $x \in M$ est le poids du sous-module qu'il engendre.
Voici un lemme utile :

Lemme A.2 *Soit M un module instable réduit de poids inférieur ou égal à n. Un élément $x \in M$ est de poids n si et seulement si il existe une opération θ telle que $\alpha(|\theta(x)| = n$.*

L'algèbre H^*V est une algèbre de Hopf, soit $P_n(H^*V)$ le n-ième terme de la filtration primitive de H^*V.
Sur H^*V la filtration par le poids est la même que la filtration primitive. On a le résultat suivant qui permet de calculer le poids du sous-module, engendré par un élément x de H^*V.

Proposition A.3 (FS) *Soit V un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension d. Soit $x_1, \ldots, x_d$, une base de E^*, alors $H^*V \cong \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$. Soit $x \in H^*V$,*

$$x = \sum_{(a_1,\ldots,a_d)} u_{a_1,\ldots,a_d} \, x_1^{a_1} \ldots x_d^{a_d} \quad ,$$

la somme étant prise sur un ensemble de multi-indices. Le poids du sous-module engendré par x est égal à

$$\sup_{(a_1,\ldots,a_d)} \alpha(a_1) + \ldots + \alpha(a_d) \quad ,$$

le sup étant pris sur les multi-indices $(a_1, \ldots, a_d)$ pour lesquels $u_{a_1,\ldots,a_d}$ est non nul.

Par conséquent on a :

- En degré ℓ tel que $\alpha(\ell) = n$, on a :

$$(P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V))^\ell \cong (P_n(H^*V))^\ell \quad ,$$

- dans les degrés ℓ tels que $\alpha(\ell) \geq n+1$ les deux modules sont triviaux,

- l'application quotient est non-injective dans les degrés ℓ tels que $\alpha(\ell) < n$.

Le résultat suivant est classique :

Lemme A.4 *Le quotient $P_n(H^*V)/P_{n-1}(H^*V)$ est isomorphe à la somme directe :*

$$\bigoplus_{\nu} \Lambda^{\nu_1}(F(1)) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\nu_d}(F(1))$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ parcourt l'ensemble de d-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme n.

Le cas $d = 1$ est très classique, et le cas général s'en déduit par produit tensoriel. C'est aussi un cas particulier de la description de la filtration primitive, et de ses quotients, sur une algèbre instable "very nice", c'est-à-dire de la forme $U(M)$, où U désigne le foncteur de Steenrod-Epstein [St], ici $M \cong F(1)^{\oplus d}$.
Rappelons que dans une catégorie abélienne le socle d'un objet est le plus grand sous-objet semi-simple (*i.e.* somme directe d'objets simples) contenu dans cet objet. La simplicité dans tout ce qui suit est évidemment comprise au sens de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.
On a :

Lemme A.5 *Le module instable :*

$$\Lambda^{\nu_1}(F(1)) \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\nu_d}(F(1)) \quad ,$$

avec $\sum_i \nu_i = n$, a une série de Jordan-Hőlder finie dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Les sous-objets simples de ce module sont :

- *de poids exactement n, i.e. ne sont pas de poids inférieur ou égal à $n-1$,*
- *et leurs partitions associées λ sont de longueur au plus d.*

La première partie se déduit de [Sc] (5.3.5, 5.3.6), ou [K1] en utilisant l'équivalence de catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$. La seconde résulte du cas $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = 1$; c'est-à-dire du fait que les seuls sous-objets simples, dans la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$, de $F(1)^{\otimes n}$ sont de poids exactement n ([FS], [Sc] 5.6.3). La troisième est dans [FS] (section 6). Le lecteur observera que dans cette référence l'indexation des objets simples est faite par les partitions duales.

B Les opérations P_t^s

L'opération $P_t^s \in \mathcal{A}$ [Ma] est duale de l'élément $\xi_t^{2^s}$ du dual de Milnor de $\mathcal{A}$. Les propriétés suivantes se déduisent de sa définition.

- son action sur $F(1)$ est donnée par $P_t^s(u^{2^s}) = u^{2^{s+t}}$;
- et par $P_t^s(u^{2^v}) = 0$ si $v \neq s$;
- sur $F(1)^{\otimes k}$ l'action P_t^s est donnée par les observations suivantes, elle agit comme une dérivation sur les tenseurs qui sont produits de classes de la forme u^{2^v} avec $v \geq s$,
- étant donné un tenseur de la forme $x \otimes y$, où x est produit de classes de la forme u^{2^v} avec $v \geq s$ et y est produit de classes de la forme u^{2^v} avec $v < s$, alors $P_t^s(x \otimes y) = P_t^s(x) \otimes y + x \otimes P_t^s(y)$;
- on en déduit que sur un tenseur $u^{2^{a_1}} \otimes \ldots u^{2^{a_k}}$ où les entiers a_i appartiennent à un ensemble d'entiers $\{h_1, \ldots, h_k\}$ où les différences $|h_i - h_j|$, si $h_i \neq h_j$, sont grandes devant s, P_t^s agit comme une dérivation.

C Démonstration du théorème 3.3

On va donner ici une démonstration du théorème 3.3 distincte de celle donnée dans ses grandes lignes par le second auteur dans une lettre à N. Kuhn, et détaillée par P. Krason dans sa thèse.
On reprend quelques notations de la section 3.
Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ une partition de l'entier n, et soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_h)$ la partition conjuguée, notons que $t = \mu_1$ et $h = \lambda_1$. On suppose que μ est une partition 2-régulière de l'entier n. On rappelle les deux partitions de l'ensemble $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

La première, C_λ, est constituée de μ_1 sous-ensembles C_i, $1 \leq i \leq \mu_1$,

$$C_i = \Big\{ \sum_{j=1}^{j=i-1} \lambda_j + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{j=i-1} \lambda_j + \lambda_i \Big\}, \text{ donc } \#C_i = \lambda_i.$$

La seconde, R_λ, est constituée de λ_1 sous-ensembles R_i, $1 \leq i \leq \lambda_1$, et

$$R_i = \Big\{ i, i + \lambda_1, \ldots, i + \sum_{1,\ldots,\lambda_i - 1} \lambda_j \Big\}, \text{ donc } \# R_i = \mu_i.$$

Il s'agit là d'une description du premier λ-tableau standard [JK] :

1	λ_1+1	$\cdots\cdots$	n
2	λ_1+2	$\cdots\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$		
λ_2	$\lambda_1+\lambda_2$		
$\vdots$			
λ_1			

Le sous-ensemble C_i (*resp.* R_i) est l'ensemble des entiers figurant sur la i-ième colonne (*resp.* ligne) qui est composé de λ_i (*resp.* μ_i) cases.
On considèrera les sous-groupes de Young stabilisant C_λ et R_λ. Ils seront également notés C_λ et R_λ par abus de notation et sont respectivement isomorphes à

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_h} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\mu_t} \quad .$$

Les éléments de la base standard de $W_\lambda(F(1))$, [JK], [PS]. On note comme d'habitude u^{2^n} les éléments de la base standard de $F(1)$. Soit t une fonction définie sur l'ensemble $[n] = \{1, \ldots, n\}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que t est strictement croissante (resp. croissante) sur chaque sous-ensemble de la partition C_λ (resp. R_λ).
Notons (par abus) $C_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \sigma$, on définit un élément $w_t \in W_\lambda(F(1))$ par :

$$w_t = C_\lambda \sum_{t'} \otimes_1^n u^{2^{t'(i)}}$$

où la somme est prise sur toutes les fonctions $t' : [n] \to \mathbf{N}$ qui prennent le même ensemble de valeurs que t sur tout sous-ensemble appartenant à la partition R_λ.

Théorème C.1 (JK) *L'ensemble des éléments w_t, où $t : [n] \to \mathbf{N}$ décrit le sous-ensemble des fonctions strictement croissantes (resp. croissantes) sur chaque sous-ensemble appartenant à la partition C_λ (resp. R_λ), est une base de $W_\lambda(F(1))$.*

Sur ces éléments on introduit une relation binaire que par abus on appellera ordre lexichographique, abus car la relation n'est pas antisymétrique, la relation est "stricte". On dira que $w_k < w_\ell$, si :

- $\sum_{1\leq i\leq n} 2^{k(i)} = \sum_{1\leq i\leq n} 2^{\ell(i)}$, et en ordonnant les $k(i)$ et les $\ell(j)$ par ordre décroissant, soit : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$, et $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$, on a $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_u = \beta_u$, et $\alpha_{u+1} > \beta_{u+1}$.

On va démontrer qu'il existe une opération η telle que $\eta(w_\mu) = w_t$ modulo des éléments de la base standard inférieur pour l'ordre lexichographique. Ceci donnera le résultat. L'opération η est définie par :

$$\eta = \prod_{i=1}^{i=\lambda_1} \prod_{j=1}^{j=\mu_i} P^{i-1}_{t(i+\ell_{j-1})-i+1} \quad ,$$

avec, comme plus haut, $\ell_i = \lambda_1 + \ldots + \lambda_i$.
Par définition de P^s_t on a la relation suivante, dans laquelle Δ est la diagonale de $\mathcal{A}$;

$$\Delta^k(P^s_t) = \sum_{b_1+\ldots+b_k=t} \otimes_u Q_t(b_u) \quad ,$$

où $Q_t(b_u)$ est l'opération de Milnor duale de $\xi_t^{b_u}$. Donc, si on applique P^s_t à un produit tensoriel $\otimes_{1\leq u\leq k} u^{2^{a_u}}$ on obtient :

$$P^s_t(\otimes_{1\leq u\leq k} u^{2^{a_u}}) = \sum_{b_1+\ldots+b_k=t} \otimes_u Q_t(b_u)(u^{2^{a_u}}) \quad ,$$

En dehors de l'identité seule l'opération duale de $\xi_t^{b_u}$ avec $b_u = 2^{a_u}$ a une action non-triviale sur la classe $u^{2^{a_u}}$.
En conséquence, l'effet de l'opération $P^{i-1}_{t(i+\ell_{j-1})-i+1}$ sur un produit tensoriel de classes u^{2^ℓ} se décrit comme suit :

- soit de substituer dans le tenseur à une puissance $u^{2^{i-1}}$ la puissance $u^{2^{t(i+\ell_{j-1})}}$, sommant sur toutes les occurences de $u^{2^{i-1}}$;

- soit, de sustituer à un sous-tenseur égal à $\otimes_{1\leq u\leq k} u^{2^{a_u}}$, avec $2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k} = 2^{i-1}$ et $k > 1$, le sous-tenseur $\otimes_{1\leq u\leq k} u^{2^{t(i+\ell_{j-1})-i+1+a_u}}$, sommant sur toutes les occurences possibles.

Les termes obtenus dans le deuxième cas sont (strictement) inférieurs -au sens donné plus haut- à celui obtenu dans le premier. Ils correspondent à des éléments inférieurs dans la base standard.
Si donc on applique toutes les opérations P^s_t apparaissant dans la définition de η suivant la première règle on obtient clairement w_t. Tous les termes résiduels se décomposent sur des éléments de base (strictement) inférieurs.

Références

(FS) V. Franjou, L. Schwartz, *Reduced unstable $\mathcal{A}$-modules and the modular representation theory of the symmetric groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 23 (1990), 593-624.

(HLS) H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, *The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects*, Am. J. of Math. (1993), Vol 115, Number 5, 1053-1106.

(JK) G. D. James et A. Kerber : The representation theory of the symmetric groups, Encycl. Math. Appl. **16**, (1981)

(K1) N. Kuhn *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra*, Am. Journal of Math. 116 (1993), 327-360.

(K2) N. Kuhn *Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra*, K-theory 8 (1994), 395-428.

(La) J. Lannes *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien ́lémentaire*, Pub. IHES 75 (1992) 135-244.

(Ma) H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod algebra*, Amsterdam, North Holland 1983.

(Mi) H. R. Miller *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Annals of Math. 120 (1984) 39-87.

(PS) L. Piriou, L. Schwartz, *Extensions de foncteurs simples*, K-Theory 15 (1998), 269-291.

(Sc) L. Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics Series 1994.