À propos d'une question de Friedlander et Suslin I. – Une résolution injective des puissances symétriques twistées

Alain Troesch

23 octobre 2003

Résumé

Dans cet article, on construit une résolution injective explicite des puissances symétriques twistées $S^{*(j)}$ dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux. Cette construction généralise à toute caractéristique la construction donnée par Friedlander et Suslin en caractéristique 2.

Abstract

The aim of this paper is to construct in the category of strict polynomial functors an explicit injective resolution of the twisted symmetric powers $S^{*(j)}$. This generalizes to any prime characteristic the construction of Friedlander and Suslin in characteristic 2.

Mots clés : Catégories de foncteurs, résolutions injectives, puissances symétriques, twist de Frobenius, p-complexes.

Codes de classification : 18G05, 18G10, 18G35, 55U05.

Introduction

En 1997, Friedlander et Suslin [3] ont construit, en caractéristique 2, une résolution injective des puissances symétriques twistées $S^{n(j)}$, dans la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux de la catégorie des espaces vectoriels finis vers la catégorie des espaces vectoriels finis (sur $\mathbb{F}_2$). Leur but était de retrouver de manière élémentaire les expressions de certains groupes d'extensions (plus précisément de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(r)}, S^{p^j(r-j)})$) qu'ils avaient calculés en toute caractéristique à l'aide de suites spectrales, et d'essayer d'obtenir certains résultats supplémentaires : par exemple, ils ont montré que les puissances symétriques twistées sont de dimension projective finie en caractéristique 2, résultat qui a été ensuite généralisé par Totaro [7] à tout foncteur et en toute caractéristique. Un tel résultat a par exemple permis à l'auteur [9, 8] de montrer que les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}^{(r)}, F^{(j)})$ présentent une certaine forme de périodicité.

La construction de Friedlander et Suslin est basée sur la connaissance d'une résolution injective de $S^{*(1)}$ en caractéristique 2 :

$$S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n} \otimes S^0 \to S^{2n-1} \otimes S^1 \to \cdots \to S^0 \otimes S^{2n}. \tag{1}$$

Cette résolution était déjà bien connue auparavant, et a été utilisée dans plusieurs travaux, par exemple dans les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz [2], dont le but était de déterminer, dans une autre catégorie de foncteurs $\mathcal{F}$, les extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n)$. Dans cet article aussi, l'utilisation de cette résolution servait de méthode alternative à la méthode utilisant des suites spectrales d'hypercohomologie, et valable en toute caractéristique.

Si l'utilisation de résolutions injectives des puissances symétriques twistées n'a servi jusqu'à présent qu'à établir des méthodes alternatives, c'est bien que ces résolutions n'étaient connues qu'en caractéristique 2, et ceci pour la raison essentielle qu'une résolution de $S^{*(1)}$ n'était connue qu'en caractéristique 2 : on ne pouvait espérer obtenir quoi que ce soit par cette méthode *en toute généralité de caractéristique.*

Nous remédions ici à ce problème en construisant le chaînon manquant, à savoir, pour tout nombre premier p, une résolution injective de $S^{*(1)}$ en caractéristique p. Le cas d'un twist supérieur s'en déduit alors par une construction similaire à celle de Friedlander et Suslin.

En caractéristique 2, la résolution injective de $S^{*(1)}$ décrite par (1) est $S^* \otimes S^*$, avec une différentielle $\delta : S^i \otimes S^j \to S^{i-1} \otimes S^{j+1}$ définie par

$$\delta(x_1 \cdots x_i \otimes y_1 \cdots y_j) = \sum_{k=1}^{i} x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_i \otimes x_k y_1 \cdots y_j.$$

Par analogie, on peut définir, en caractéristique p, un objet gradué $(S^*)^{\otimes p}$, muni cette fois d'une "différentielle" $d = \sum 1 \otimes \cdots \otimes \delta \otimes \cdots \otimes 1$. La présence des guillemets est justifiée par le fait que d n'est pas à proprement parler une différentielle, puisque $d \circ d \neq 0$. Cependant $d^p = 0$: on dit que d est une *p-différentielle*, et que le foncteur gradué $(S^*)^{\otimes p}$ muni de la p-différentielle d est un *p-complexe*. De manière générale, à un p-complexe, on peut associer, pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, des foncteurs de cohomologie $\mathrm{H}^*_{[s]}$ obtenus en considérant le quotient du noyau de d^s par l'image de d^{p-s}. On dira alors qu'un p-complexe (défini en degrés cohomologiques positifs ou nuls) est une p-résolution d'un foncteur F si pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, $\mathrm{H}^i_{[s]}$ est nul si $i > 0$, et $\mathrm{H}^0_{[s]}$ vaut F. On notera qu'une p-résolution d'un foncteur F définit $p-1$ résolutions de F au sens usuel, en considérant, pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, la résolution obtenue de la p-résolution en composant les différentielles entre elles par blocs de s et $p-s$ alternativment.

Nous obtenons :

THÉORÈME 1 *Le p-complexe $(S^*)^{\otimes p}$ muni de la p-différentielle d définie ci-dessus est une p-résolution injective de $S^{*(1)}$. Le degré cohomologique d'un élément de $S^{m_0} \otimes \cdots \otimes S^{m_{p-1}}$ est $\sum_{k=0}^{k=p-1} k \cdot m_k$, et la p-différentielle d augmente le degré cohomologique de 1. En considérant la partie de degré polynomial pn de $(S^*)^{\otimes p}$, on obtient une p-résolution de $S^{n(1)}$.*

La construction de Friedlander et Suslin s'adapte alors, et permet d'obtenir la généralisation au cas d'un twist supérieur :

THÉORÈME 2 *On peut munir $(S^*)^{\otimes p^r}$ d'une p-différentielle d de sorte que l'on obtienne une p-résolution injective de $S^{*(r)}$. En considérant la partie de degré polynomial $p^r n$, on obtient une p-résolution injective de $S^{n(r)}$.*

Dans le contexte du théorème 2, le degré cohomologique d'un élément

$$X \in \bigotimes_{i_0,\dots,i_{r-1}\in\{0,\dots,p-1\}} S^{m_{i_0,\dots,i_{r-1}}}$$

est

$$\deg_{\mathrm{coh}}(X) = \sum_{i_0,\dots,i_{r-1}} (p^{r-1}i_0 + \cdots + p^0 i_{r-1}) \cdot m_{i_0,\dots,i_{r-1}},$$

et la p-différentielle d augmente le degré cohomologique de p^{r-1}.

Cet article est le premier d'une série dont le but final est de déterminer les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(A^*, B^*)$, dans le cas où A^* et B^* sont des puissances symétriques, extérieures ou divisées twistées. Certains de ces groupes d'extensions ont été déterminés par Franjou, Friedlander, Suslin et Scorichenko [1], à savoir les cas où :
- A^* est une algèbre divisée twistée, B^* est une algèbre divisée, extérieure ou symétrique twistée ;
- A^* est une algèbre extérieure twistée, B^* est une algèbre extérieure ou symétrique twistée ;
- A^* est une algèbre symétrique twistée, B^* est une algèbre symétrique twistée.

Les autres cas ne sont actuellement pas connus. Nous espérons pouvoir les calculer en nous servant de résolutions injectives explicites des différents foncteurs en jeu. Pour cela, nous montrerons dans un prochain article comment construire, à partir d'une résolution injective d'un foncteur F une résolution injective de $F^{(1)}$. Cette construction, basée sur la résolution de $S^{*(1)}$ construite dans cet article, permettra notamment de construire des résolutions explicites des puissances extérieures et divisées twistées.

L'article ci-présent se découpe comme suit.

1. Dans une première partie, nous faisons de très rapides rappels sur la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux ;
2. Nous introduisons ensuite, autour de la notion de p-complexe, tous les résultats homologiques nécessaires dans la suite.
3. La troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème 1.
4. Nous donnons enfin dans une quatrième partie la démonstration du théorème 2.

1 Très brefs rappels sur les foncteurs polynomiaux

Dans cette section, nous rappelons les définitions élémentaires concernant les foncteurs strictement polynomiaux, et certaines de leurs propriétés essentielles pour ce travail. Cette section est largement inspirée des travaux de Friedlander et Suslin [3].

Dans ce qui suit, p désigne un nombre premier, sauf mention explicite du contraire.

1.1 Définitions

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{F}_p$, et soit $\mathcal{E}^f$ sa sous-catégorie pleine constituée des espaces de dimension finie. On note $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$. Cette catégorie joue un rôle important en topologie algébrique, car, comme l'ont montré Henn, Lannes et Schwartz [4], cette catégorie possède une sous-catégorie pleine équivalente à un quotient de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$.

Nous donnons quelques exemples classiques d'objets de cette catégorie $\mathcal{F}$:

- les puissances tensorielles T^n envoyant V sur $T^n(V) = V^{\otimes n}$;
- les puissances symétriques S^n obtenues en quotientant $T^n(V)$ par l'action du groupe symétrique par permutation des facteurs du produit tensoriel : $S^n(V) = (V^{\otimes n})/\mathfrak{S}_n$;
- les puissances divisées Γ^n obtenues en considérant les invariants de l'action précédente : $\Gamma^n(V) = (V^{\otimes n})/\mathfrak{S}_n$;
- les puissance extérieures, définies comme usuellement par $\Lambda^n(V) = T^n(V)/(x \otimes y = -y \otimes x)$ si $p \neq 2$, et $\Lambda^n(V) = S^n(V)/(x^2 = 0)$ si $p = 2$;
- le foncteur identité Id est un cas particulier des quatre séries précédentes, puisque $\mathrm{Id} = T^1 = S^1 = \Lambda^1 = \Gamma^1$.

Les algèbres tensorielle T^*, symétrique S^*, divisée Γ^* et extérieure Λ^* sont les foncteurs obtenus en prenant la somme directe respectivement des foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n, pour $n \geqslant 0$.

On dispose dans la catégorie $\mathcal{F}$ d'une notion de dualisation $DF(V) = F(V^\sharp)^\sharp$, où le signe $\sharp$ désigne la dualisation dans la catégorie des espaces vectoriels. Par exemple, $DS^n = \Gamma^n$, $D\Gamma^n = S^n$ et $D\Lambda^n = \Lambda^n$. En particulier, $D\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

Étant donné deux espaces vectoriels V et W, on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes (strictement) polynomiaux de V vers W, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à plusieurs variables (données par les coordonnées dans une base de V) à valeurs dans l'espace W, invariants suivant le choix de la base. Plus formellement, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W) = S^*(V^\sharp) \otimes W$. De cette écriture, on déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ est aussi l'ensemble des applications linéaires de $\Gamma^*(V)$ vers W, ou encore de $W^\sharp$ vers $S^*(V^\sharp)$.

Un morphisme strictement polynomial de V vers W est dit *homogène* de degré d s'il est dans $S^d(V^\sharp) \otimes W \subset S^*(V^\sharp) \otimes W$.

Une application strictement polynomiale de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(V, W)$ donne lieu, après oubli de la structure strictement polynomiale, à une application polynomiale au sens usuel.

DÉFINITION 1.1.1 Un *foncteur strictement polynomial* P est la donnée

- d'une application $V \mapsto P(V)$ des objets de $\mathcal{E}^f$ vers les objets de $\mathcal{E}^f$,
- d'une application qui à tout couple (V, W) dans $(\mathcal{E}^f)^2$, associe un morphisme strictement polynomial $P_{V,W}$ de $\mathrm{Hom}(V, W)$ vers $\mathrm{Hom}(P(V), P(W))$, c'est-à-dire un objet $P_{V,W}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pol}}(\mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(P(V), P(W)))$,

tels que les conditions requises pour un foncteur usuel (après oubli de la structure strictement polynomiale sur les flèches) soient satisfaites, à savoir : compatibilité avec l'identité et avec la composition.

DÉFINITION 1.1.2 On dit qu'un foncteur strictement polynomial est *homogène de degré d* si tous les morphismes strictement polynomiaux $P_{V,W}$ sont homogènes de degré d.

On désigne par $\mathcal{P}$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux, et les morphismes sont les transformations naturelles (dans le sens usuel, après oubli de la structure strictement polynomiale). On note $\mathcal{P}_d$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ constituée des foncteurs homogènes de degré d.

On notera que l'oubli de la structure strictement polynomiale induit un foncteur de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{F}$.

Les foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n peuvent également être définis dans la catégorie $\mathcal{P}$. Pour ces différents foncteurs, la définition sur les flèches est intuitive. Les foncteurs T^n, S^n, Γ^n et Λ^n de $\mathcal{P}$ sont homogènes de degré n.

Un autre exemple important est le twist de Frobenius Tw. Ce foncteur est défini comme étant l'identité sur les objets, et la puissance p-ième formelle sur les flèches, c'est-à-dire le morphisme de Frobenius $\mathrm{Hom}(V, W) \to S^p(\mathrm{Hom}(V, W))$ envoyant X sur X^p. Il s'agit donc d'un foncteur homogène de degré p. Si on oublie la structure strictement polynomiale, Tw est le foncteur identité, mais en tant qu'objets de la catégorie $\mathcal{P}$, Tw et Id sont distincts.

Soit F un objet de $\mathcal{P}$. En le composant à droite par le twist de Frobenius Tw, on obtient un foncteur $F^{(1)} = F \circ \mathrm{Tw}$, appelé *twist de Frobenius du foncteur F*. En itérant cette construction, on obtient le n-ième twist de Frobenius $F^{(n)} = F \circ \mathrm{Tw}^n$. On notera que dans le contexte présent, $F \circ \mathrm{Tw} = \mathrm{Tw} \circ F$.

On notera également l'existence d'un produit tensoriel dans $\mathcal{P}$, défini sur les espaces vectoriels par la formule $(F \otimes G)(V) = F(V) \otimes G(V)$.

La proposition suivante montre que tous les morphismes dans $\mathcal{P}$ sont homogènes. Par cela, on entend qu'il n'existe pas de morphisme non trivial entre deux foncteurs homogènes de degrés différents.

PROPOSITION 1.1.3 (FRIEDLANDER, SUSLIN [3]) *La catégorie $\mathcal{P}$ est la somme directe de ses sous-catégories pleines $\mathcal{P}_d$, $d \geqslant 0$.*

Cela a pour conséquence, par exemple, de pouvoir scinder un complexe en une somme directe de ses sous-complexes homogènes.

1.2 Injectifs et projectifs

Voici maintenant une description, due à Friedlander et Suslin, des objets injectifs et projectifs de la catégorie $\mathcal{P}$.

THÉORÈME 1.2.1 (FRIEDLANDER, SUSLIN [3]) *Les foncteurs $S^{i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_k}$ forment un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}$. En se restreignant aux foncteurs de ce système dont le degré total est d, on obtient un système de cogénérateurs injectifs de $\mathcal{P}_d$.*

Par dualisation, on obtient de même un système de générateurs projectifs de $\mathcal{P}$, donné par les foncteurs $\Gamma^{i_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{i_k}$.

Par conséquent, tout foncteur $F \in \mathcal{P}$ admet une résolution injective dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques. On appelle *S-résolution* de F une telle résolution. De plus, si F est homogène de degré d, F admet une résolution injective dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques de degré total d. La résolution injective de $S^{n(j)}$ du théorème 2 est de cette forme.

2 Rappels sur les p-complexes

Le but de cette partie est de familiariser le lecteur avec la notion de p-complexe. On y expose les bases de l'algèbre homologique des p-complexes, et on prouve une formule de type "Künneth" dans un cas particulièrement simple. Cette section est largement inspirée d'un exposé de M. Wambst à l'Université Paris 13 en mars 2003. Sur ce sujet, on pourra consulter par exemple les travaux de Kassel et Wambst [6], et de Kapranov [5].

2.1 Définitions – Cohomologies

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et p un entier (non nécessairement premier).

DÉFINITION 2.1.1 Un *p-complexe* (de cochaînes) $(\mathcal{C}^\bullet, d)$ dans $\mathcal{A}$ est un objet gradué de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{C}^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}^n,$$

muni d'un morphisme d de degré 1, (c'est-à-dire d'une famille de morphismes $\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n+1}$) tel que $d^p = 0$. Un morphisme vérifiant ces propriétés est appelé *p-différentielle* de $\mathcal{C}^\bullet$.

EXEMPLE 2.1.2 Un 2-complexe est un complexe au sens usuel.

EXEMPLE 2.1.3 Si $q \leqslant p-1$, alors une chaîne de q isomorphismes

$$\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^{q+1} \longrightarrow 0$$

est un p-complexe.

On définit les notions de *morphisme de p-complexes* et de *suite exacte courte de p-complexes* de manière similaire au cas des complexes usuels.

Soit $(\mathcal{C}, d)$ un p-complexe. Pour tout entier s strictement compris entre 0 et p, on peut définir des complexes au sens usuel, en considérant comme différentielle une alternance des morphismes d^s et d^{p-s} :

$$\cdots \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^n \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{n+s} \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{n+p} \xrightarrow{d^s} \cdots$$

Pour chaque entier s, on obtient de la sorte des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$ (non tous distincts), définis pour tout $i \in \mathbb{Z}$ par :

$$\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} \ : \ \cdots \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{kp+i} \xrightarrow{d^s} \mathcal{C}^{kp+i+s} \xrightarrow{d^{p-s}} \mathcal{C}^{(k+1)p+i} \xrightarrow{d^s} \cdots$$

Cette famille de complexes vérifie les relations suivantes :

1. $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} = \mathcal{C}^\bullet_{[s,p+i]}$,
2. $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]} = \mathcal{C}^\bullet_{[p-s,i+s]}$.

En considérant les complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,-]}$, on peut définir pour tout entier $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ des groupes de cohomologie pour le p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$:

DÉFINITION 2.1.4 La *s-ième cohomologie de degré i*, notée $\mathrm{H}^i_{[s]}$, est la cohomologie de degré i du complexe $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$. Autrement dit :

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d^s : \mathcal{C}^i \to \mathcal{C}^{i+s}\right)}{\mathrm{Im}\left(d^{p-s} : \mathcal{C}^{i-p+s} \to \mathcal{C}^i\right)}$$

On remarquera que la notation utilisée ici pour désigner la s-ième cohomologie diffère légèrement de celle employée par Kassel et Wambst [6].

EXEMPLE 2.1.5 Soit $\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow 0$ un p-complexe nul partout sauf en degré 0. Alors,

$$\forall \ s \in \{1, \ldots, p-1\}, \ \mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE 2.1.6 Soit $q \in \{1, \ldots, p-1\}$, et soit

$$\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^q \longrightarrow 0$$

une chaîne de q isomorphismes. Alors :

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C^i & \text{si } q-p+s < i < s, 0 \leqslant i \leqslant q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, la cohomologie d'une chaîne de $p-1$ isomorphismes est nulle partout.

La définition de $\mathrm{H}^*_{[s]}$ en termes des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{[s,i]}$ est particulièrement utile pour obtenir certaines des propriétés élémentaires sur la cohomologie des p-complexes à partir des propriétés usuelles concernant la cohomologie des complexes usuels. Par exemple, pour toute suite exacte courte de p-complexes $0 \to \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet \to 0$, et tout $s \in \{1, \ldots, p-1\}$, on obtient des suites exactes longues de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{i-p+s}_{[p-s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{B}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{B}^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^{i+s}_{[p-s]}(\mathcal{C}^\bullet) \arrow[dll] \\
\mathrm{H}^{i+p}_{[s]}(\mathcal{A}^\bullet) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

2.2 Complexes p-acycliques – p-résolutions

En général, les différents groupes de cohomologie de même degré n'ont pas de raison d'être égaux (considérer l'exemple 2.1.6). Cependant, c'est vrai dans le cas particulier suivant :

THÉORÈME 2.2.1 (KAPRANOV [5]) *S'il existe $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$, alors $\mathrm{H}^*_{[t]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$ pour tout $t \in \{1, \ldots, p-1\}$.*

DÉFINITION 2.2.2 Un p-complexe vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.1 est dit *p-acyclique*.

Un p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$ est donc p-acyclique si les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet)$ sont tous nuls, pour au moins un entier $s \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dans ce cas, ils sont nuls pour tous les entiers $s \in \{1, \ldots, p-1\}$.

EXEMPLE 2.2.3 Un 2-complexe 2-acyclique est un complexe acyclique au sens usuel.

EXEMPLE 2.2.4 Une chaîne de $p-1$ isomorphismes est p-acyclique :

$$0 \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\cong} C^2 \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} C^p \longrightarrow 0$$

Par exemple, si $p = 2$, $0 \to A \overset{\cong}{\to} B \to 0$ est acyclique.

On définit maintenant l'analogue de résolutions dans le cas de p-complexes.

DÉFINITION 2.2.5 Une *p-résolution* d'un objet F est un p-complexe $\mathcal{C}^\bullet$ tel que

1. $\mathcal{C}^i = 0$ si $i < 0$,

2. pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\mathrm{H}^i_{[s]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} F & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une p-résolution est dite *injective* si pour tout i, $\mathcal{C}^i$ est un objet injectif de la catégorie $\mathcal{A}$.

Exemple 2.2.6 Le complexe défini dans l'exemple 2.1.5 est une résolution de C^0. C'est une résolution injective si de plus C^0 est injectif.

Remarque 2.2.7 Contrairement à la p-acyclicité, il est nécessaire de considérer, pour la définition des p-résolutions, la cohomologie relative à *tous* les entiers $s \in \{1, \dots, p-1\}$.

Exemple 2.2.8 Soit $p = 3$, et soit $\mathcal{C}^\bullet \ : \ 0 \to C^0 \overset{\cong}{\to} C^1 \to 0$. Alors

$$\mathrm{H}^i_{[2]}(\mathcal{C}^\bullet) = \begin{cases} C^0 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cependant, $\mathcal{C}^\bullet$ n'est pas une p-résolution de C^0. En effet, $\mathrm{H}^0_{[1]}(\mathcal{C}^\bullet) = 0$.

Remarque 2.2.9 Dans le cas usuel, $\mathcal{C}^\bullet : C^0 \to C^1 \to \cdots$ est une résolution injective de F si et seulement s'il existe une injection $F \hookrightarrow C^0$ telle que $F \hookrightarrow \mathcal{C}^\bullet$ soit un complexe acyclique. Ce n'est pas le cas pour les p-complexes, comme le montre l'exemple 2.2.6. La proposition analogue dans le cas des p-complexes est la suivante :

Proposition 2.2.10 *Le p-complexe $\mathcal{C}^\bullet \ : \ C^0 \to C^1 \to \cdots$ est une p-résolution de F si et seulement s'il existe une injection $i \ : \ F \hookrightarrow C^0$ telle que*

$$0 \longrightarrow \underbrace{F \overset{=}{\longrightarrow} \cdots \overset{=}{\longrightarrow} F}_{p-1 \text{ termes égaux à } F} \overset{i}{\longrightarrow} C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

est un p-complexe p-acyclique.

Remarque 2.2.11 Pour que la suite (2) définisse effectivement un p-complexe, il faut et il suffit que la composition $F \hookrightarrow C^0 \to C^1$ soit nulle.

Remarque 2.2.12 À partir d'une p-résolution $\mathcal{C}^\bullet$ de F, on obtient $p-1$ résolutions de F au sens usuel : pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0 \overset{d^s}{\longrightarrow} C^s \overset{d^{p-s}}{\longrightarrow} C^p \overset{d^s}{\longrightarrow} C^{p+s} \overset{d^{p-s}}{\longrightarrow} C^{2p} \longrightarrow \cdots$$

est une résolution injective de F.

2.3 Théorème de Kunneth pour les p-complexes

Dans ce qui suit, on suppose que p est un nombre premier, et que la catégorie $\mathcal{A}$ est munie d'un produit tensoriel (par exemple une catégorie de modules, ou bien les catégories de foncteurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ définies plus haut). On se donne deux p-complexes $(\mathcal{A}^\bullet, d_\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B}^\bullet, d_\mathcal{B})$. On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ sont nuls en degrés strictement négatifs (ou au moins en degrés suffisamment petits). Notre but est de définir une structure de p-complexe sur $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$, et de déterminer dans des cas simples les cohomologies de ce p-complexe en fonction des cohomologies des p-complexes $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$.

Comme dans le cas usuel, $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ est gradué par le degré total :

$$(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^j.$$

On définit alors sur $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ un morphisme de degré 1 par

$$d = d_\mathcal{A} \otimes 1 + 1 \otimes d_\mathcal{B}.$$

Les morphismes $d_\mathcal{A} \otimes 1$ et $1 \otimes d_\mathcal{B}$ commutent, donc, puisque p est premier,

$$d^p = (d_\mathcal{A} \otimes 1)^p + (1 \otimes d_\mathcal{B})^p = d_\mathcal{A}^p \otimes 1 + 1 \otimes d_\mathcal{B}^p = 0.$$

Ainsi, $(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet, d)$ est un p-complexe.

Nous donnons un résultat "de type Künneth" dans le cas particulièrement simple où $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ sont des résolutions de deux foncteurs F et G de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{P}$.

THÉORÈME 2.3.1 *Soit F et G deux foncteurs dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ des p-résolutions de F et G respectivement. Alors $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ est une p-résolution de $F \otimes G$.*

Le cas particulier de $F = G = 0$ donne :

COROLLAIRE 2.3.2 *Soit $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ des p-complexes p-acycliques dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet$ est aussi p-acyclique.*

Démonstration du théorème 2.3.1.

Il suffit de montrer que

$$0 \longrightarrow \underbrace{F \otimes G \xrightarrow{=} \cdots \xrightarrow{=} F \otimes G}_{p-1 \text{ termes égaux à } F\otimes G} \longrightarrow \bigoplus_{i+j=0} \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^j \longrightarrow \cdots$$

est p-acyclique. Pour cela, d'après le théorème de Kapranov, il suffit de montrer que l'homologie $\mathrm{H}^*_{[p-1]}$ de ce complexe est nulle. Cela est le cas si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathrm{H}^i_{[p-1]}(\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{B}^*) = 0$ si $i > 0$;

(ii) $\mathrm{H}^0_{[p-1]}(\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{B}^*) = F \otimes G$

(iii) la composition $F \otimes G \to \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 \to \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^1 \oplus \mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^0$ est nulle.

Des conditions similaires sont satisfaites pour chacune des résolutions $\mathcal{A}^\bullet$ de F et $\mathcal{B}^\bullet$ de G. Ainsi, les compositions $F \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$ et $G \to \mathcal{B}^0 \to \mathcal{B}^1$ sont nulles, et par conséquent, le point (iii) est vérifié.

Nous vérifions maintenant le point (ii). Le point (iii) étant vérifié, il suffit de montrer l'inclusion

$$\mathrm{Ker}\left(\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0 \xrightarrow{d^{p-1}} \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^{p-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^{p-1} \otimes \mathcal{B}^0\right) \ \subset \ F \otimes G.$$

Ceci est une inclusion de foncteurs. Il suffit de la montrer après spécialisation à tout espace vectoriel V. Soit $x \in \mathcal{A}^0(V) \otimes \mathcal{B}^0(V)$ tel que $d^{p-1}(x)=0$. En particulier $(d_{\mathcal{A}}^{p-1} \otimes id)(x) = 0$. On peut écrire x sous la forme $\lambda_{i,j} e_i \otimes f_j$, où (e_i) est une base de $\mathcal{A}^0(V)$, et (f_i) est une base de $\mathcal{B}^0(V)$. Alors

$$0 = d_{\mathcal{A}}^{p-1} \otimes id(x) = \sum_j \sum_i \lambda_{i,j} d_{\mathcal{A}}^{p-1}(e_i) \otimes f_j$$

Par conséquent, pour tout j, $d_{\mathcal{A}}^{p-1}\left(\sum_i \lambda_{i,j} e_i\right) = 0$, et donc $\sum_i \lambda_{i,j} e_i$ est dans $F(V)$, puisque $\mathrm{H}^0_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet) = F$. Ainsi, x est dans $F(V) \otimes \mathcal{B}^0(V)$: on peut donc écrire x sous la forme $\mu_{k,j} g_k \otimes f_j$, où (g_k) est une base de $F(V)$. Un raisonnement similaire montre alors que pour tout k, $\sum_j \mu_{k,j} f_j$ est dans $G(V)$, et par conséquent, $x \in F(V) \otimes G(V)$. Cela montre le point (ii).

Soit maintenant $i > 0$. Soit

$$x = x_0 + \cdots + x_n \ \in \ \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^n \otimes \mathcal{B}^0, \text{ avec } x_i \in \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^{n-i},$$

représentant une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$. En particulier, $d^{p-1}(x) = 0$. On va démontrer que la classe de cohomologie représentée par x est forcément nulle. On montre dans un premier temps qu'il existe $y \in \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^n$ représentant la même classe de cohomologie que x dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$. Pour cela, on montre par récurrence descendante sur $k \in \{0, \ldots, n\}$ qu'il existe

$$z = z_0 + \cdots + z_k \ \in \ \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^k \otimes \mathcal{B}^{n-k},$$

avec $z_i \in \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^{n-i}$, tel que x et z représentent la même classe dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$. L'initialisation, pour $k = n$, est la donnée initiale de x, et la conclusion, pour $k = 0$, donne l'existence de y.

Supposons la propriété vérifiée au rang $k > 0$, $k \leqslant n$. Alors, il existe

$$t = t_0 + \cdots + t_k \ \in \ \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^k \otimes \mathcal{B}^{n-k},$$

avec $t_i \in \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^{n-i}$, tel que x et t représentent la même classe dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$. Puisque $d^{p-1}(t) = 0$, en particulier, $(d_{\mathcal{A}}^{p-1} \otimes id)(t_k) = 0$. Un argument similaire à celui utilisé pour le point (ii) montre alors que

$$t_k \in \mathrm{Ker}\left(d_{\mathcal{A}}^{p-1} : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+p-1}\right) \otimes \mathcal{B}^{n-k}$$

Or, $\mathrm{H}^i_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet) = 0$ si $i > 0$; donc, puisque $k > 0$,

$$t_k \in \mathrm{Im}\left(d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{k-1} \to \mathcal{A}^{k+p-1}\right) \otimes \mathcal{B}^{n-k} = \mathrm{Im}\left(d_{\mathcal{A}} \otimes id : \mathcal{A}^{k-1} \otimes \mathcal{B}^{n-k} \to \mathcal{A}^{k+p-1} \otimes \mathcal{B}^{n-k}\right)$$

Soit $t' \in \mathcal{A}^{k-1} \otimes \mathcal{B}^{n-k}$ tel que $(d_{\mathcal{A}} \otimes id)(t') = t_k$. On définit, pour $i < k$, $z_i \in \mathcal{A}^i \otimes \mathcal{B}^{n-i}$ de la manière suivante :

$$z_i = \begin{cases} t_i & \text{si } 0 \leqslant i < k-1; \\ t_i - (id \otimes d_{\mathcal{B}})(t') & \text{si } i = k-1. \end{cases}$$

Alors $z = z_1 + \cdots + z_{k-1}$ vérifie $t = z + d(t')$. Ainsi, z représente la même classe que t, et donc que x dans $\mathrm{H}^n_{[p-1]}(\mathcal{A}^\bullet \otimes \mathcal{B}^\bullet)$. Cela achève la récurrence.

On est donc ramené au cas où $x = y \in \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^n$. Il s'agit de trouver $u \in \mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^{n-1}$ tel que $d(u) = y$. Un raisonnement similaire à la démonstration du point (ii) montre que

$$y \in F \otimes \mathrm{Im}\left(\mathcal{B}^{n-1} \to \mathcal{B}^n\right) = \mathrm{Im}\left(id \otimes d_{\mathcal{B}} : F \otimes \mathcal{B}^{n-1} \to F \otimes \mathcal{B}^n\right).$$

Ainsi, $y = (id \otimes d_{\mathcal{B}})(\sum f_i \otimes b_i)$, avec $f_i \in F$, $b_i \in \mathcal{B}^{n-1}$. Soit f_i' l'image de f_i dans $\mathcal{A}^0$, et $u = \sum f_i' \otimes b_i$. Alors, d'après le point (iii) pour le complexe $\mathcal{A}^\bullet$, $d_{\mathcal{A}}(f_i') = 0$, donc $y = d(u)$, et la classe de cohomologie représentée par y (et donc par x) est nulle. Cela démontre le point (i).
$\square$

3 Le cas d'un twist unique

Le but de cette partie est de construire une S-résolution explicite de la puissance symétrique twistée $S^{n(1)}$ dans la catégorie $\mathcal{P}$, c'est-à-dire une résolution injective de $S^{n(1)}$ dont tous les termes sont des sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques de degré total np.

3.1 Énoncé

Dans le cas où la caractéristique p du corps de base est 2, on dispose d'une résolution injective bien connue de $S^{n(1)}$ (voir [2, 3]) :

$$S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n} \otimes S^0 \to \cdots \to S^{2n-k} \otimes S^k \xrightarrow{\delta} S^{2n-k-1} \otimes S^{k+1} \to \cdots \to S^0 \otimes S^{2n}.$$

L'inclusion $S^{n(1)} \hookrightarrow S^{2n}$ est le morphisme de Frobenius $x^{(1)} \mapsto x^2$, et la différentielle δ est définie par :

$$\delta(x_1 \cdots x_{2n-k} \otimes y_1 \cdots y_k) = \sum_{i=1}^{2n-k} x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{2n-k} \otimes x_i y_1 \cdots y_k. \tag{3}$$

En d'autres termes, $(S^* \otimes S^*, \delta)$ est une résolution injective de $S^{*(1)}$. Le degré cohomologique de $x \otimes y \in S^{2n-k} \otimes S^k$ est k.

Nous généralisons cette construction dans le cas où la caractéristique p du corps de base est un nombre premier *quelconque*. On note toujours δ le morphisme défini en caractéristique p par l'équation (3). On peut munir le foncteur $(S^*)^{\otimes p}$ d'un endomorphisme d défini par :

$$d = \sum_{i=0}^{p-2} \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{i \text{ facteurs}} \otimes \delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{p-2-i \text{ facteurs}},$$

c'est-à-dire

$$d(X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-2} X_0 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes \delta(X_i \otimes X_{i+1}) \otimes X_{i+2} \otimes \cdots \otimes X_{p-1}.$$

Définition 3.1.1 Soit $X \in S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}$. Le *degré total* de X est $i_0 + \cdots + i_{p-1} = \sum i_k$. Le *degré cohomologique* de X est $0 \cdot i_0 + \cdots + (p-1) \cdot i_{p-1} = \sum k \cdot i_k$.

L'endomorphisme d préserve le degré total, et augmente le degré cohomologique de 1.

Le foncteur $(S^*)^{\otimes p}$ est muni d'un produit défini par

$$(X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \cdot (Y_0 \otimes \cdots \otimes Y_{p-1}) = X_0 \cdot Y_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1} \cdot Y_{p-1},$$

les produits $X_i \cdot Y_i$ désignant les produits dans l'algèbre symétrique S^*. Le lemme suivant décrit le comportement de d par rapport à ce produit.

Lemme 3.1.2 *L'endomorphisme d de $(S^*)^{\otimes p}$ est une dérivation :*

$$d(X \cdot Y) = d(X) \cdot Y + X \cdot d(Y).$$

Démonstration.

C'est vrai pour $\delta : S^* \otimes S^* \to S^* \otimes S^*$. En effet,

$$\begin{aligned}
&\delta\big((x_1 \cdots x_k \otimes x_{k+1} \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_\ell \otimes y_{\ell+1} \cdots y_m)\big) \\
&\quad = \delta\left(x_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_\ell \otimes x_{k+1} \cdots x_n y_{\ell+1} \cdots y_m\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_k y_1 \cdots y_\ell \otimes x_i x_{k+1} \cdots x_n y_{\ell+1} \cdots y_m \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{\ell} x_1 \cdots x_k y_1 \cdots y_{j-1} y_{j+1} y_\ell \otimes x_{k+1} \cdots x_n y_j y_{\ell+1} \cdots y_m \\
&\quad = \delta(x_1 \cdots x_k \otimes x_{k+1} \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_\ell \otimes y_{\ell+1} \cdots y_m) \\
&\qquad + (x_1 \cdots x_k \otimes x_{k+1} \cdots x_n) \cdot \delta(y_1 \cdots y_\ell \otimes y_{\ell+1} \cdots y_m).
\end{aligned}$$

Ainsi, δ est une dérivation. On en déduit que d est aussi une dérivation. En effet :

$$\begin{aligned}
& d\big((X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \cdot (Y_0 \otimes \cdots \otimes Y_{p-1})\big) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{p-2} X_0Y_0 \otimes \cdots \otimes \delta((X_i \otimes X_{i+1}) \cdot (Y_i \otimes Y_{i+1})) \otimes \cdots \otimes X_{p-1}Y_{p-1} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{p-2} X_0Y_0 \otimes \cdots \otimes \delta(X_i \otimes X_{i+1}) \cdot (Y_i \otimes Y_{i+1}) \otimes \cdots \otimes X_{p-1}Y_{p-1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{p-2} X_0Y_0 \otimes \cdots \otimes (X_i \otimes X_{i+1}) \cdot \delta(Y_i \otimes Y_{i+1}) \otimes \cdots \otimes X_{p-1}Y_{p-1} \\
&\quad = d(X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \cdot (Y_0 \otimes \cdots \otimes Y_{p-1}) + (X_0 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \cdot d(Y_0 \otimes \cdots \otimes Y_{p-1}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.1.3 *L'endomorphisme d de $(S^*)^{\otimes p}$ est une p-différentielle, c'est-à-dire $d^p = 0$.*

Démonstration.

Soit $x \in V$. On note, pour $i \in \{0, \cdots, p-1\}$, $x(i)$ l'élément

$$\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{i \text{ facteurs}} \otimes x \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{p-1-i \text{ facteurs}} \in (\underbrace{S^0 \otimes \cdots \otimes S^0}_{i \text{ facteurs}} \otimes S^1 \otimes \underbrace{S^0 \otimes \cdots \otimes S^0}_{p-1-i \text{ facteurs}})(V).$$

Par convention, $x(i) = 0$ si $i \notin \{0, \dots, p-1\}$. Les éléments $x(i)$, $x \in V$, $i \in \{0, \dots, p-1\}$, engendrent mutiplicativement $(S^*)^{\otimes p}(V)$. Il suffit alors de montrer que d^p est nul sur tout produit de tels éléments.

Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de V, et $i_1, \dots, i_n$ des entiers dans $\{0, \dots, p-1\}$. Alors, puisque d est une dérivation,

$$d\big(x_1(i_1) \cdots x_n(i_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_1(i_1) \cdots x_k(i_k + 1) \cdots x_n(i_n).$$

Ainsi, en appliquant p fois le morphisme d,

$$d^p(x_1(i_1) \cdots x_n(i_n)) = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}, \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p, \\ \alpha_k + i_k \leqslant p-1}} \binom{p}{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1(i_1 + \alpha_1) \cdots x_n(i_n + \alpha_n).$$

Or, le coefficient multinomial $\binom{p}{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ est nul *modulo* p, sauf si un des entiers α_k est égal à p, ce qui est impossible du fait de l'hypothèse $\alpha_k + i_k \leqslant p - 1$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de cette section et de cet article.

Théorème 3.1.4 *Le p-complexe $((S^*)^{\otimes p}, d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(1)}$; l'injection de $S^{*(1)}$ dans $((S^*)^{\otimes p}, d)$ est donnée par le morphisme de Frobenius $x^{(1)} \mapsto x^p$ sur le premier facteur du produit tensoriel.*

Cette p-résolution se scinde suivant le degré total. Soit $\mathcal{S}_n^\bullet$ le p-complexe défini par

$$\mathcal{S}_n^j = \bigoplus_{\substack{\sum i_k = n \\ \sum k i_k = j}} S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}, \tag{4}$$

la p-différentielle $\mathcal{S}_n^j \to \mathcal{S}_n^{j+1}$ étant la restriction de δ. Alors, le théorème 3.1.4 se réécrit :

THÉORÈME 3.1.5 *Pour tout $n \geqslant 0$ non multiple de p, le p-complexe $(\mathcal{S}_n^\bullet, \delta)$ est p-acyclique. Par ailleurs, si $n = pk$, pour $k \geqslant 0$, alors $(\mathcal{S}_n^\bullet, \delta)$ est une p-résolution injective de $S^{k(1)}$.*

La fin de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3.2 Comment se ramener au cas d'un espace de dimension 1

La première étape consiste à se ramener d'un problème *fonctoriel* à un problème *vectoriel*. Montrer que $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*, d)$ est une résolution de $S^{*(1)}$ revient à montrer que pour tout espace vectoriel de dimension finie V, le p-complexe vectoriel $(S^*(V) \otimes \cdots \otimes S^*(V), d(V))$ est une p-résolution (dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$) de $S^{*(1)}(V)$. On montre qu'en fait il n'est pas nécessaire de vérifier cette propriété pour tous les espaces vectoriels de dimension finie V, mais juste pour $\mathbb{F}_p$:

PROPOSITION 3.2.1 *Si $(S^*(\mathbb{F}_p) \otimes \cdots \otimes S^*(\mathbb{F}_p), d(\mathbb{F}_p))$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(\mathbb{F}_p)$, alors $(S^*(V) \otimes \cdots \otimes S^*(V), d(V))$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(V)$ pour tout espace vectoriel de dimension finie V, et par conséquent $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*, d)$ est une résolution de $S^{*(1)}$ dans la catégorie $\mathcal{P}$.*

Démonstration.

L'idée de cette réduction est la même que celle utilisée pour le cas classique $p = 2$ (voir par exemple Franjou, Lannes, Schwartz [2]). Soit V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V \oplus W) = (S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V) \ \otimes \ (S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(W). \tag{5}$$

Cela provient de l'isomorphisme classique $S^*(V \oplus W) \cong S^*(V) \otimes S^*(W)$.

L'équation (5) est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués *différentiels* (vérification sans difficulté). En appliquant le théorème de Künneth (théorème 2.3.1) à l'équation (5), si $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V)$ et $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(W)$ sont des p-résolutions respectivement de $S^{*(1)}(V)$ et $S^{*(1)}(W)$, alors $(S^* \otimes \cdots \otimes S^*)(V \oplus W)$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(V) \otimes S^{*(1)}(W) \cong S^{*(1)}(V \oplus W)$. Ainsi, le cas de $V = \mathbb{F}_p$ fournit le cas de tous les espaces vectoriels de dimension finie. $\square$

3.3 Quelques p-complexes vectoriels

D'après la proposition 3.2.1, il suffit, pour montrer le théorème 3.1.5 (et donc le théorème 3.1.4), de montrer que pour tout n non multiple de p, $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$ est p-acyclique, et que pour $n = kp$, $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$ est une p-résolution de $S^{k(1)}(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$.

Pour simplifier, on note $\mathcal{C}_n^\bullet$ le p-complexe vectoriel $\mathcal{S}_n^\bullet(\mathbb{F}_p)$. Le p-complexe $\mathcal{C}_n^\bullet$ admet la description vectorielle suivante :

- Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathcal{C}_n^\ell$ admet une base d'éléments notés $[a_0, \ldots, a_{p-1}]$, pour tout p-uplet $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$ tel que $\sum a_k = n$ et $\sum k \cdot a_k = \ell$:

$$\mathcal{C}_n^\ell = \bigoplus_{\substack{\sum a_k = n \\ \sum k a_k = \ell}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{p-1}].$$

  Plus précisément,

$$\mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{p-1}] = S^{a_0}(\mathbb{F}_p) \otimes \cdots \otimes S^{a_{p-1}}(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p.$$

- La p-différentielle $d_\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_n^\bullet$ est décrite sur les éléments de cette base par :

$$d_\mathcal{C}([a_1, \ldots, a_{p-1}]) = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \cdot [a_0, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1} + 1, a_{k+2}, \ldots, a_{p-1}].$$

On introduit d'autres p-complexes vectoriels $\mathcal{D}_n^\bullet$ définis de la manière suivante :

- L'espace vectoriel $\mathcal{D}_n^\ell$ admet une base formée d'éléments $[[b_1, \ldots, b_n]]$, pour tous entiers positifs ou nuls $b_1, \ldots, b_n$ tels que $0 \leqslant b_k \leqslant p-1$ et $b_1 + \cdots + b_n = \ell$.
- La p-différentielle $d_\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}_n^\bullet$ est décrite par la formule suivante :

$$d_\mathcal{D}([[b_1, \ldots, b_n]]) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ b_k < p-1}} [[b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k + 1, b_{k+1}, \ldots, b_n]]$$

  Cette expression définit bien une p-différentielle. En effet,

$$d_\mathcal{D}^p([[b_1, \ldots, b_n]]) = \sum_{\substack{\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{N} \\ \forall k,\ b_k + \beta_k \leqslant p-1}} \binom{p}{\beta_1, \ldots, \beta_n} \cdot [[b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n]]$$

  Le coefficient multinomial provient du choix de l'ordre dans lequel on ajoute 1 à une des coordonnées de $[[b_1, \ldots, b_n]]$. Ce coefficient est nul *modulo* p sauf si un des β_k est égal à p, ce qui est impossible du fait de l'inégalité $b_k + \beta_k \leqslant p-1$.

On décrit ci-dessous le lien existant entre les complexes $\mathcal{C}_n^\bullet$ et $\mathcal{D}_n^\bullet$. Les bases, formée des éléments $[a_0, \ldots, a_{p-1}]$ d'une part, et formée des éléments $[[b_1, \ldots, b_n]]$ d'autre part peuvent toutes deux être décrites en terme de *répartitions de boules*.

On considère n-boules numérotées de 1 à n, disposées dans p cases numérotées de 0 à $p-1$. À une telle répartition, on peut associer

- un élément $[a_0, \dots, a_{p-1}]$ de la base de $\mathcal{C}_n^\bullet$, en définissant a_k comme le nombre de boule dans la case k ;
- un élément $[[b_1, \dots, b_n]]$ de la base de $\mathcal{D}_n^\bullet$, en définissant b_i comme la position de la boule i.

Dans les deux cas, les différentielles $d_\mathcal{C}$ et $d_\mathcal{D}$ proviennent de la même opération sur les boules, consistant à prendre la combinaison formelle de toutes les répartitions obtenues en avançant une boule de la répartition de départ (on ne peut pas avancer les boules de la case $p-1$).

À ce niveau apparaît bien le lien existant entre les p-complexes $\mathcal{C}_n^\bullet$ et $\mathcal{D}_n^\bullet$ ainsi que la différence fondamentale entre ces deux complexes : contrairement à $\mathcal{D}_n^\bullet$, $\mathcal{C}_n^\bullet$ ne prend pas en compte *l'ordre des boules.*

On formalise la discussion précédente en définissant un morphisme de p-complexes φ entre $\mathcal{D}_n^\bullet$ et $\mathcal{C}_n^\bullet$ par

$$\varphi([[b_1, \dots, b_n]]) = [a_0, \dots, a_{p-1}], \text{ où } a_k = \mathrm{Card}\{i | b_i = k\}. \tag{6}$$

L'équation (6) définit bien un morphisme de p-complexes. En effet, soit $[[b_1, \dots, b_n]]$ un élément de base de $\mathcal{D}_n^\ell$, et $[a_0, \dots, a_{p-1}] = \varphi([[b_1, \dots, b_n]])$ l'élément correspondant de la base de $\mathcal{C}_n^\ell$. Alors, si $b_i < p-1$,

$$\varphi\big([[b_1, \dots, b_i + 1, \dots, b_n]]\big) = [a_1, \dots, a_{b_i} - 1, a_{b_i+1} + 1, \dots, a_{p-1}].$$

Ainsi, pour tout élément de base $[[b_1, \dots, b_n]]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(d_\mathcal{D}([[b_1, \dots, b_n]])) &= \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{i \text{ tel que } b_i = k} [a_0, \dots, a_k - 1, a_{k+1} + 1, \dots, a_{p-1}] \\
&= \sum_{k=0}^{p-2} a_k \cdot [a_0, \dots, a_k - 1, a_{k+1} + 1, \dots, a_{p-1}] \\
&= d_\mathcal{D}([a_0, \dots, a_{p-1}]) \\
&= d_\mathcal{D}(\varphi([[b_1, \dots, b_n]])).
\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.3.1 *Le morphisme φ est surjectif.*

Démonstration.

On va en construire un scindement ψ. Ce scindement ψ est défini terme à terme, mais n'est pas un morphisme de p-complexes : il ne commute pas avec les différentielles. On définit ψ sur les éléments de base $[a_0, \dots, a_{p-1}]$ de $\mathcal{C}_n^\ell$ par :

$$\psi([a_0, \dots, a_{p-1}]) = [[\underbrace{0, \dots, 0}_{a_0 \text{ termes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{a_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{a_{p-1} \text{ termes}}]].$$

Alors, $\varphi \circ \psi = id$, ce qui prouve la surjectivité de φ. $\square$

Pour mémoire, on énonce :

LEMME 3.3.2 $\varphi \circ \psi = id$.

Le morphisme d'espaces vectoriels gradués ψ n'est pas un morphisme de p-complexes. En revanche, il vérifie les propriétés suivantes.

LEMME 3.3.3 *La relation suivante est vérifiée :* $\psi\varphi d_{\mathcal{D}}\psi = \psi d_{\mathcal{C}}$.

Démonstration.

L'opération $\psi\varphi$ sur un élément $[[b_1, \dots, b_n]]$ de $\mathcal{D}_n^\ell$ consiste à ordonner les parts de $[[b_1, \dots, b_n]]$. Par exemple, $\psi\varphi([[3, 0, 1, 1]]) = [[0, 1, 1, 3]]$. Or,

$$d_{\mathcal{D}}\psi([a_0, \dots, a_{p-1}]) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{a_k}[[\underbrace{0, \dots, 0}_{a_0 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{k, \dots, \overbrace{k+1}^{\substack{i\text{-ème terme } k \\ \text{remplacé par } k+1}}, \dots, k}_{a_k \text{ termes}}, \dots, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{a_{p-1} \text{ termes}}]].$$

Par conséquent,

$$\psi\varphi d\psi([a_0, \dots, a_{p-1}]) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot [[\underbrace{0, \dots, 0}_{a_0 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{k, \dots, k}_{a_k - 1 \text{ termes}}, \underbrace{k+1, \dots, k+1}_{a_{k+1}+1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{a_{p-1} \text{ termes}}]].$$

Cette expression est clairement égale à $\psi d_{\mathcal{C}}([a_0, \dots, a_{p-1}])$. □

LEMME 3.3.4 *La relation suivante est vérifiée :* $\varphi d_{\mathcal{D}}\psi\varphi = \varphi d_{\mathcal{D}}$.

Démonstration.

Soit $[[b_1, \dots, b_n]]$ un élément de $\mathcal{D}_n^\ell$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que $b_{\sigma(1)} \leqslant \dots \leqslant b_{\sigma(n)}$. Alors $\psi\varphi([[b_1, \dots, b_n]]) = [[b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}]]$, et par conséquent,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}}\psi\varphi([[b_1, \dots, b_n]]) &= \sum_{k=1}^{n}[[b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(k)} + 1, \dots b_{\sigma(n)}]] \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}[[b_{\sigma(1)}, \dots, \underbrace{b_\ell + 1}_{\text{en position } \sigma^{-1}(\ell)}, \dots b_{\sigma(n)}]]. \end{aligned}$$

Or, $[[b_{\sigma(1)}, \dots, b_\ell + 1, \dots b_{\sigma(n)}]]$ et $[[b_1, \dots, b_\ell + 1, \dots, b_n]]$ ne diffèrent que par l'ordre des éléments ; par conséquent, en appliquant φ à ces deux termes, on obtient le même élément de $\mathcal{C}_n^\ell$. Ainsi :

$$\varphi d_{\mathcal{D}}\psi\varphi([[b_1, \dots, b_n]]) = \varphi\left(\sum_{\ell=1}^{n}[[b_1, \dots, b_\ell + 1, \dots b_n]]\right) = \varphi d_{\mathcal{D}}([[b_1, \dots, b_n]]).$$

□

PROPOSITION 3.3.5 *Pour tout* $k \geqslant 1$, $\varphi d_{\mathcal{D}}^k\psi = d_{\mathcal{C}}^k$.

Démonstration.

Cela provient des trois lemmes précédents. En effet

$$d_{\mathcal{C}}^k = (\varphi\psi d_{\mathcal{C}})^k = (\varphi\psi\varphi d_{\mathcal{D}}\psi)^k = (\varphi d_{\mathcal{D}}\psi)^k = \varphi d_{\mathcal{D}}^k\psi$$

Voici quelques explications concernant ces égalités :

- la première et la troisième égalités proviennent du lemme 3.3.2 ;
- la deuxième égalité est une application du lemme 3.3.3 ;
- la quatrième égalité provient de l'application successive du lemme 3.3.4, en partant de la gauche. Ce lemme permet de supprimer les uns après les autres les termes $\psi\varphi$ apparaissant entre les différentielles $d_{\mathcal{D}}$.

□

3.4 Acyclicité de $\mathcal{D}_n^\bullet$

LEMME 3.4.1 *Le p-complexe $\mathcal{D}_1^\bullet$ est p-acyclique.*

Démonstration.

Le p-complexe $\mathcal{D}_1^\bullet$ peut être décrit ainsi :

$$\mathcal{D}_1^\bullet : 0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \cdot [[0]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [[1]] \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [[p-1]] \longrightarrow 0$$

Il s'agit d'une chaîne de $p-1$ isomorphismes. La p-acyclicité provient alors de l'exemple 2.2.4.
□

LEMME 3.4.2 *Le p-complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$ est égal à $(\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$.*

Démonstration.

On définit deux morphismes $\Phi : (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{D}_n^\bullet$ et $\Psi : \mathcal{D}_n^\bullet \longrightarrow (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$ par :

$$\Phi([[\ell_1]] \otimes \cdots \otimes [[\ell_n]]) = [[\ell_1, \ldots, \ell_n]] \qquad \text{et} \qquad \Psi([[\ell_1, \ldots, \ell_n]]) = [[\ell_1]] \otimes \cdots \otimes [[\ell_n]].$$

Ce sont clairement des morphismes de p-complexes (ils commutent avec les différentielles), et ils sont réciproques l'un de l'autre. □

PROPOSITION 3.4.3 *Le p-complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$ est p-acyclique.*

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème de Künneth (corollaire 2.3.2) à $\mathcal{D}_n^\bullet = (\mathcal{D}_1^\bullet)^{\otimes n}$. □

3.5 Acyclicité de $\mathcal{C}_n^\bullet$ pour $n \leqslant p-1$

On étudie maintenant l'acyclicité de $\mathcal{C}_n^\bullet$ en petits degrés. Cette acyclicité se déduit de celle de $\mathcal{D}_n^\bullet$.

PROPOSITION 3.5.1 *Pour tout $n \in \{1, \ldots, p-1\}$ le complexe $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique.*

La démonstration de la proposition repose sur plusieurs lemmes, basés sur une opération de *symétrisation* dans le complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$. Pour $1 \leqslant n \leqslant p-1$, l'entier $n!$ est inversible *modulo* p, ce qui permet de définir un morphisme de symétrisation $s : \mathcal{D}_n^k \longrightarrow \mathcal{D}_n^k$ par :

$$s([[b_1, \dots, b_n]]) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} [[b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}]].$$

LEMME 3.5.2 *Pour tout $y \in \mathcal{D}_n^k$, $\varphi(y) = \varphi s(y)$.*

Démonstration.

Quelque soit $[[b_1, \dots, b_n]] \in \mathcal{D}_n^k$, et quelque soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varphi([[b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}]]) = \varphi([[b_1, \dots, b_n]]).$$

Par conséquent,

$$\varphi s([[b_1, \dots, b_n]]) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi([[b_1, \dots, b_n]]) = \varphi([[b_1, \dots, b_n]]),$$

ce qui démontre le lemme. □

REMARQUE 3.5.3 On peut définir s en termes d'action de $\mathfrak{S}_n$ sur le complexe $\mathcal{D}_n^\bullet$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathcal{D}_n^k$ par $\sigma \cdot [[b_1, \dots, b_n]] = [[b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, b_{\sigma^{-1}(n)}]]$, étendu par linéarité. Alors, $s(y) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \cdot y$.

LEMME 3.5.4 *Soit $y \in \mathcal{D}_n^k$. Alors $\varphi(y) = 0$ si et seulement si $s(y) = 0$.*

Démonstration.

Soit E_n^k l'ensemble $\{[[b_1, \dots, b_n]] \mid b_1 + \dots + b_n = k\}$. On définit une relation d'équivalence sur E_n^k par

$$[[b_1, \dots, b_n]] \sim [[b'_1, \dots, b'_n]] \Longleftrightarrow \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, [[b'_1, \dots, b'_n]] = \sigma \cdot [[b_1, \dots, b_n]].$$

On note $C_1, \dots, C_t$ les classes d'équivalence de E_n^k sous cette relation.

Soit $y \in \mathcal{D}_n^k$. On peut écrire y comme une unique combinaison des éléments de E_n^k à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, en regroupant les termes d'une même classe :

$$y = \sum_{i=1}^{t} \sum_{[[b_1,\dots,b_n]] \in C_i} \lambda_{[[b_1,\dots,b_n]]} \cdot [[b_1, \dots, b_n]].$$

Pour $i \in \{1, \dots, t\}$, on note

$$\lambda_{C_i} = \sum_{[[b_1,\dots,b_n]] \in C_i} \lambda_{[[b_1,\dots,b_n]]}.$$

Comme φ est $\mathfrak{S}_n$-invariante, on peut définir une fonction encore notée φ de $\{C_1, \dots, C_t\}$ vers $\mathcal{C}_n^k$. Alors,

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_{C_i} \varphi(C_i).$$

Comme $\varphi(C_i) \neq \varphi(C_j)$ si $i \neq j$, et que la famille $(\varphi(C_i))_{i \in \{1,\dots,t\}}$ est libre, $\varphi(y) = 0$ si et seulement si $\lambda_{C_i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$.

D'un autre côté, pour tout $z_1, z_2 \in C_i$, $s(z_1) = s(z_2)$. On note cette valeur commune $s(C_1)$. Ainsi,

$$s(y) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_{C_i} s(C_i).$$

Donc, comme précédemment, $s(y) = 0$ si et seulement si $\lambda_{C_i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, car les $s(C_i)$, $i \in \{1, \dots, t\}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{D}_n^\bullet$. □

Le lemme suivant est évident :

LEMME 3.5.5 *La p-différentielle $d_{\mathcal{D}}$ commute avec l'action de $\mathfrak{S}_n$, donc avec s.*

LEMME 3.5.6 *Si $\varphi d_{\mathcal{D}}(y) = 0$ alors $d_{\mathcal{D}} s(y) = 0$.*

Démonstration.

D'après le lemme 3.5.4 appliqué à $d_{\mathcal{D}}(y)$, l'hypothèse $\varphi d_{\mathcal{D}}(y) = 0$ implique que $s d_{\mathcal{D}}(y) = 0$. Le lemme 3.5.5 permet de conclure. □

LEMME 3.5.7 *Soit $x \in \mathcal{C}_n^k$ tel que $d_{\mathcal{C}}(x) = 0$. Alors il existe $y \in \mathcal{D}_n^k$ tel que $\varphi(y) = x$ et $d_{\mathcal{D}}(y) = 0$.*

Démonstration.

On prend $y = s\psi(x)$. Alors :

1. $\varphi(y) = \varphi s \psi(x) = \varphi\psi(x) = x$, d'après les lemmes 3.5.2 et 3.3.2 ;
2. $\varphi d_{\mathcal{D}} \psi(x) = d_{\mathcal{C}}(x)$ d'après le lemme 3.3.5, donc $\varphi d_{\mathcal{D}} \psi(x) = 0$;
3. par conséquent, $d_{\mathcal{D}}(y) = d_{\mathcal{D}} s \psi(x) = 0$ d'après le lemme 3.5.6 appliqué à $\psi(x)$.

□

Démonstration de la proposition 3.5.1.

D'après le théorème de Kapranov, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^*_{[1]}(\mathcal{C}_n^\bullet) = 0$. Soit $x \in \mathcal{C}_n^k$ tel que $d_{\mathcal{C}}(x) = 0$. Il s'agit de montrer que la classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^k_{[1]}(\mathcal{C}_n^\bullet)$ représentée par x est nulle. D'après le lemme 3.5.7, il existe y tel que $\varphi(y) = x$ et $d_{\mathcal{D}}(y) = 0$. Puisque $\mathcal{D}_n^\bullet$ est p-acyclique, il existe $y' \in \mathcal{D}_n^{k-p-1}$ tel que $d_{\mathcal{D}}^{p-1}(y') = y$. Soit $x' = \varphi(y')$. Alors

$$d_{\mathcal{C}}^{p-1}(x') = d_{\mathcal{C}}^{p-1} \varphi(y') = \varphi d_{\mathcal{D}}^{p-1}(y') = \varphi(y) = x.$$

Donc x est un bord. □

REMARQUE 3.5.8 Cette démonstration n'est valable que pour $n < p$, car pour $n \geqslant p$, $n!$ n'est pas inversible *modulo* p : on ne peut plus employer ce procédé de symétrisation. Pour étudier le cas de $\mathcal{C}_n^\bullet$, $n \geqslant p$, nous introduisons d'autres p-complexes.

3.6 Plus de p-complexes

Les p-complexes que nous allons introduire maintenant ont une description similaire à celle de $\mathcal{C}_n^\bullet$, à part qu'on change le nombre d'entiers composant un élément de base de $\mathcal{C}_n^\bullet$. Dans l'analogie avec les répartitions de boules, on change le nombre de cases.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$. On définit pour tout $n \geqslant 1$ un p-complexe $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$ par :

$$\mathcal{C}_{n,k}^\ell = \bigoplus_{\substack{a_0+\cdots+a_{k-1}=n \\ 0\cdot a_0+\cdots+(k-1)a_{k-1}=\ell}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{k-1}].$$

On peut munir $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$ d'une p-différentielle $d_{n,k}$ définie de manière analogue à celle de $\mathcal{C}_n^\bullet$. Plus précisément, la projection de $d_{n,k}([a_0, \ldots, a_{k-1}])$ sur l'espace engendré par $[a'_0, \ldots, a'_{k-1}]$ est égale à la projection de $d_{\mathcal{C}}([a_0, \ldots, a_{k-1}, 0 \cdots 0])$ sur $[a'_0, \ldots, a'_{k-1}, 0 \cdots 0]$. Cela montre en particulier que $d_{n,k}$ est bien une p-différentielle. On notera que $\mathcal{C}_{n,p}^\bullet = \mathcal{C}_n^\bullet$.

Toujours pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on définit aussi $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$:

$$\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\ell = \bigoplus_{\substack{a_0+\cdots+a_{k-1}=n \\ 0\cdot a_0+\cdots+(k-1)a_{k-1}=\ell \\ a_0<p}} \mathbb{F}_p \cdot [a_0, \ldots, a_{k-1}].$$

La p-différentielle $\bar{d}_{n,k}$ est définie de manière analogue à précédemment. Le p-complexe $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$ est un sous-complexe de $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$. Par convention, on définit $\mathcal{C}_{n,0}^\bullet$ et $\bar{\mathcal{C}}_{n,0}^\bullet$ comme étant nuls.

REMARQUE 3.6.1
- Si $n \leqslant p-1$, alors $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet = \mathcal{C}_{n,k}^\bullet$.
- Si $n > p-1$ et $k = 1$, le complexe $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$ est nul.
- Si $n \geqslant p-1$ et $k \geqslant 2$, le premier facteur non nul de $\bar{\mathcal{C}}_n^\bullet$ est

$$\bar{\mathcal{C}}_n^{n-p+1} = \mathbb{F}_p \cdot [p-1, n-p+1, 0 \ldots, 0].$$

Nous donnons maintenant quelques suites exactes courtes reliant les complexes $\mathcal{C}_{n,k}^\bullet$ et $\bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet$.

PROPOSITION 3.6.2 *Pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant p$, ($2 \leqslant k \leqslant p$ pour $\bar{\mathcal{C}}$) il existe des suites exactes courtes de p-complexes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{n-1,k}^{\bullet-k+1} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{C}_{n,k}^\bullet \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{C}_{n,k-1}^\bullet \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}_{n-1,k}^{\bullet-k+1} \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} \bar{\mathcal{C}}_{n,k}^\bullet \xrightarrow{\bar{\psi}_1} \bar{\mathcal{C}}_{n,k-1}^\bullet \longrightarrow 0.$$

Démonstration.

L'essentiel du travail consiste à définir les morphismes φ_1, ψ_1, $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. On définit le morphisme $\varphi_1 : \mathcal{C}^{\ell-k+1}_{n-1,k} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n,k}$ par :

$$\varphi_1([a_0, \dots, a_{k-1}]) = [a_0, \dots, a_{k-2}, a_{k-1} + 1],$$

et le morphisme $\psi_1 : \mathcal{C}^{\ell}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n,k-1}$ par :

$$\psi_1([a_0, \dots, a_{k-1}]) = \begin{cases} [a_0, \dots, a_{k-2}] & \text{si } a_{k-1} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que φ_1 et ψ_1 sont des morphismes de p-complexes. L'exactitude est alors immédiate.

On définit de la même façon $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. Puisque dans ce cas $k \geqslant 2$, à aucun moment on n'augmente la composante en position 0 dans la définition de $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$. Par conséquent, cette composante reste toujours strictement inférieure à p, ce qui assure que $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\psi}_1$ sont bien définis. L'exactitude est immédiate. □

Proposition 3.6.3 *Pour tout $1 \leqslant n < p$ ($1 \leqslant n$ pour $\bar{\mathcal{C}}$), $1 \leqslant k \leqslant p$, il existe des suites exactes courtes de p-complexes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet-n}_{n,k-1} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{C}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{C}^{\bullet}_{n-1,k} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^{\bullet-n}_{n,k-1} \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n,k} \xrightarrow{\bar{\psi}_2} \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}_{n-1,k} \longrightarrow 0.$$

Démonstration.

On définit $\varphi_2 : \mathcal{C}^{\ell-n}_{n,k-1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n,k}$ par

$$\varphi_2([a_0, \dots, a_{k-2}]) = [0, a_0, \dots, a_{k-2}].$$

et $\psi_2 : \mathcal{C}^{\ell}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{C}^{\ell}_{n-1,k}$ par

$$\psi_2([a_0, \dots, a_{k-1}]) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_0 = 0, \\ a_0 \cdot [a_0 - 1, a_1, \dots, a_{k-1}] & \text{si } a_0 \neq 0. \end{cases}$$

Quitte à donner un sens à $[-1, a_1, \dots, a_{k-1}]$, l'expression

$$\psi_2([a_0, \dots, a_{k-1}]) = a_0 \cdot [a_0 - 1, a_1, \dots, a_{k-1}]$$

est valable quelque soit la valeur de a_0. On vérifie alors facilement que φ_2 et ψ_2 sont des morphismes de p-complexes.

L'exactitude requiert que le noyau de φ_2 soit engendré par tous les $[a_0, \dots, a_{k-1}]$ tels que $a_0 = 0$. Or ce noyau est engendré par les $[a_0, \dots, a_{k-1}]$ tels que p divise a_0. Si $n < p$, a_0 est strictement plus petit que p, et par conséquent, $a_0 = 0$ si et seulement si p divise a_0. Ce n'est en revanche plus le cas pour $n \geqslant p$.

On peut définir de manière similaire $\bar{\varphi}_2$ et $\bar{\psi}_2$. Dans ce cas, si $a_0 \neq 0$, a_0 est nécessairement non nul *modulo* p, car on a imposé $a_0 < p$. Aussi n'a-t-on pas besoin de supposer cette fois que $n < p$ pour avoir l'exactitude. □

REMARQUE 3.6.4 Le théorème 3.5.1 affirme que $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ est p-acyclique pour $0 < n < p$, et que $\mathcal{C}^\bullet_{0,p}$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. C'est également le cas pour $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$, puisque pour $n < p$, les complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$ sont égaux.

3.7 Cohomologies des complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$

On termine maintenant la démonstration du théorème 3.1.4 en déterminant les différentes cohomologies des p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$. On en déduit les cohomologies des complexes $\mathcal{C}^\bullet_n$. Le théorème 3.1.4 en découle.

PROPOSITION 3.7.1 *Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant p-1$, $k \leqslant p$ et $n + k > p$. Alors, les p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ et $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ sont p-acycliques.*

Démonstration.

On montre la proposition par récurrence sur n. L'hypothèse de récurrence au rang n est donc que les p-complexes $\mathcal{C}^\bullet_{n,p+1-n}, \ldots, \mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ sont p-acycliques. L'initialisation pour $n = 1$ revient à dire que $\mathcal{C}^\bullet_{1,p}$ est p-acyclique, ce qui est vrai en vertu de la proposition 3.5.1.

Supposons donc la propriété vraie pour $n-1$ tel que $1 \leqslant n-1 < p-1$. Le complexe $\mathcal{C}^\bullet_{n,p}$ est p-acyclique d'après la proposition 3.5.1, ce qui initialise une récurrence descendante sur k. De plus, supposons que $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ est p-acylique pour un certain $k > p+1-n$. Considérons la suite exacte de la proposition 3.6.2 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet-k+1}_{n-1,k} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{n,k} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{n,k-1} \longrightarrow 0.$$

Le complexe de gauche est p-acyclique par l'hypothèse de la récurrence sur n (remarquer que $k \geqslant p + 1 - (n-1)$) et le complexe central est p-acyclique par l'hypothèse de la récurrence descendante sur k. Par conséquent, l'examen des suites exactes longues prouve la p-acyclicité du complexe de droite $\mathcal{C}^\bullet_{n,k-1}$, ce qui termine la récurrence sur k, puis sur n.

Pour $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$, on remarquera que ce complexe est égal à $\mathcal{C}^\bullet_{n,k}$ dans les cas étudiés ici, puisqu'on suppose ici que $n < p$. □

PROPOSITION 3.7.2 *Pour tout $n \geqslant p-1$, $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,2}$ est p-acyclique.*

Démonstration.

Pour $n \geqslant p-1$, le complexe $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,2}$ est explicitement décrit par :

$$\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,2} \ : \ 0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \cdot [p-1, n-p+1] \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [p-2, n-p+2] \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p \cdot [0, n] \longrightarrow 0.$$

On obtient une chaîne de $p-1$ isomorphismes, p-acyclique d'après l'exemple 2.2.4. □

PROPOSITION 3.7.3 *Pour tout $n \geqslant p-1$, et tout k tel que $2 \leqslant k \leqslant p$, $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est p-acyclique.*

Démonstration.

On fait une récurrence sur n puis sur k. L'initialisation pour $n = p-1$, provient de la proposition 3.7.1. L'initialisation pour $k = 2$ provient de la proposition 3.7.2.

Soit $N, K \in \mathbb{N}$ tels que $N > p-1$ et $2 < K \leqslant p$. On suppose que $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est p-acyclique si $(n,k) < (N,K)$ pour l'ordre lexicographique. Alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^{\bullet-k+1}_{n-1,k} \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k} \longrightarrow \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k-1} \longrightarrow 0$$

de la proposition 3.6.2 est constituée de deux complexes p-acycliques à gauche et à droite. Le complexe central $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,k}$ est donc aussi p-acyclique. □

PROPOSITION 3.7.4 *Pour tout $n \geqslant 0$, et tout $k \in \{1, \dots, p\}$,*

$$\mathcal{C}^\bullet_{n+p,k} = \mathcal{C}^\bullet_{n,k} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n+p,k}.$$

Démonstration.

On construit deux morphismes de p-complexes réciproques l'un de l'autre :

- $\Phi : \mathcal{C}^\bullet_{n+p,k} \to \mathcal{C}^\bullet_{p,n} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{p+n,k}$ défini sur l'élément de base $[a_0, \dots, a_{k-1}]$ par :

$$\Phi([a_0, \dots, a_{k-1}]) = \begin{cases} ([a_0 - p, a_1, \dots, a_{k-1}]; 0) & \text{si } a_0 \geqslant p, \\ (0; [a_0, \dots, a_{k-1}]) & \text{si } a_0 < p\,; \end{cases}$$

- $\Psi : \mathcal{C}^\bullet_{p,n} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{p+n,k} \to \mathcal{C}^\bullet_{n+p,k}$ défini sur l'élément de base $([a_0, \dots, a_{k-1}]; [b_0, \dots, b_{k-1}])$ par :

$$\Psi(([a_0, \dots, a_{k-1}]; [b_0, \dots, b_{k-1}]) = [a_0 + p, \dots, a_{k-1}] + [b_0, \dots, b_{k-1}].$$

Le lecteur vérifiera sans problème que Φ et Ψ sont des morphismes de p-complexes, et qu'ils sont réciproques l'un de l'autre. □

PROPOSITION 3.7.5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est un multiple de p, alors $\mathcal{C}^\bullet_n$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. Sinon, $\mathcal{C}^\bullet_n$ est p-acyclique.*

Démonstration.

On fait une récurrence sur n avec un pas de longueur p.

L'initialisation se fait pour $n \in \{0, \dots, p-1\}$:

- si $n = 0$, $\mathcal{C}^\bullet_n$ est le complexe $0 \to \mathbb{F}_p \to 0$, qui est trivialement une p-résolution de $\mathbb{F}_p$;
- si $n \in \{1, \dots, p-1\}$, $\mathcal{C}^\bullet_n$ est p-acyclique d'après la proposition 3.5.1.

Soit donc $n > p$, et supposons que la proposition soit vraie pour $n - p$.

- Si $n \equiv 0 \mod p$, alors $n - p \equiv 0 \mod p$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{C}^\bullet_{n-p} = \mathcal{C}^\bullet_{n-p,p}$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. D'autre part, d'après la proposition 3.7.3, le p-complexe $\bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$ est p-acyclique. Par conséquent, $\mathcal{C}^\bullet_{n-p,p} \oplus \bar{\mathcal{C}}^\bullet_{n,p}$ est une p-résolution de $\mathbb{F}_p$. D'après la proposition 3.7.4, ce complexe est égal à $\mathcal{C}^\bullet_{n,p} = \mathcal{C}^\bullet_n$, qui est par conséquent une résolution de $\mathbb{F}_p$.

– Si $n \not\equiv 0 \mod p$, le même argument montre que $\mathcal{C}_n^\bullet$ est p-acyclique, puisque cette fois, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{C}_{n-p}^\bullet$ est p-acyclique.

□

Le théorème 3.1.4 est maintenant une conséquence directe de la proposition 3.7.5. En effet, la proposition 3.7.5 se réexprime ainsi : $\big(S^* \otimes \cdots \otimes S^*(\mathbb{F}_p), d(\mathbb{F}_p)\big)$ est une p-résolution de $S^{*(1)}(\mathbb{F}_p)$. D'après la proposition 3.2.1, cela suffit pour montrer le théorème 3.1.4.

4 Le cas de $S^{n(j)}$

Friedlander et Suslin [3] construisent, pour $p = 2$, une résolution injective explicite de $S^{n(j)}$. Cette construction est obtenue comme une *itération* de la résolution de $S^{n(1)}$. Cette construction s'adapte assez bien au cas où $p > 2$, en utilisant la résolution de $S^{n(1)}$ du théorème 3.1.4. La principale difficulté provient de l'absence d'une théorie satisfaisante des suites spectrales pour les p-bicomplexes. L'utilisation des suites spectrales reste assez élémentaire dans la preuve de Friedlander et Suslin, et peut de fait être évitée sans problème majeur.

Imitant la construction de Friedlander et Suslin [3], on commence par construire une famille de p-différentielles sur $(S^*)^{\otimes p}$.

4.1 Des différentielles

On note $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}$ le foncteur $S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}$. Cela définit un foncteur p-gradué

$$B^{*,\dots,*} = \bigoplus_{i_0,\dots,i_{p-1} \in \mathbb{N}} B^{i_0,\dots,i_{p-1}}. \qquad (7)$$

Pour simplifier, on notera souvent B au lieu de $B^{*,\dots,*}$.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Sur $B(V)$ on définit deux notions de degré :

– le *degré polynomial* des éléments de $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}(V)$ est égal à $i_0 + \cdots + i_{p-1}$;

– le *degré cohomologique* des éléments de $B^{i_0,\dots,i_{p-1}}(V)$ est égal à $0 \cdot i_0 + \cdots + (p-1) \cdot i_{p-1}$.

On notera que cette terminologie coïncide avec celle de la section précédente.

Enfin, on note

– B^j la restriction de la somme (7) aux facteurs de degré cohomologique j,

– B_n la restriction de la somme (7) aux facteurs de degré polynomial n,

– B_n^j la restriction de la somme (7) aux facteurs de degré cohomologique j et de degré polynomial n.

On définit maintenant sur le foncteur gradué B une famille de différentielles $(d_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$. La différentielle d_1 est la différentielle d définie dans la section précédente :

$$d_1 = \sum_{i=0}^{p-2} \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{i \text{ facteurs}} \otimes \delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{p-2-i \text{ facteurs}}. \qquad (8)$$

Pour définir plus généralement d_ℓ, on introduit quelques notations. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$, et soit $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de V. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$.

- On note x_I l'élément de $S^{|I|}(V)$ obtenu en prenant le produit (dans $S^*(V)$) des éléments x_i dont l'indice est contenu dans I :
$$x_I = \prod_{i \in I} x_i.$$
- On note $x_{\widehat{I}}$ l'élément de $S^{n-|I|}(V)$ obtenu en prenant le produit (dans $S^*(V)$) des éléments x_i dont l'indice n'est pas contenu dans I :
$$x_{\widehat{I}} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}-I} x_i.$$

Soit $X^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1}$ un élément de $S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_{p-1}}$, avec $X^k = x_1^k \cdots x_{i_k}^k$. Pour tout $\ell \geqslant 1$, on définit d_ℓ sur $X^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1}$ par :

$$\begin{aligned} &d_\ell(X^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1}) \\ &= \sum_{\substack{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-2}, \\ \alpha_0+\cdots+\alpha_{p-2}=\ell}} \left(\sum_{\substack{I_0 \subset \{1,\ldots,i_0\},\ |I_0|=\alpha_0, \\ \cdots \\ I_{p-2} \subset \{1,\ldots,i_{p-2}\},\ |I_{p-2}|=\alpha_{p-2}}} x^0_{\widehat{I}_0} \otimes x^0_{I_0} x^1_{\widehat{I}_1} \otimes x^1_{I_1} x^2_{\widehat{I}_2} \otimes \cdots \otimes x^{p-3}_{I_{p-3}} x^{p-2}_{\widehat{I}_{p-2}} \otimes x^{p-2}_{I_{p-2}} X^{p-1} \right). \end{aligned}$$

On notera que pour $\ell = 1$, cette définition coïncide avec l'expression (8). Par convention, on pose $d_0 = id$.

On rappelle que B est muni d'un produit défini par :
$$(X^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1}) \cdot (Y^0 \otimes \cdots \otimes Y^{p-1}) = X^0 \cdot Y^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1} \cdot Y^{p-1}.$$

La proposition suivante donne une formule de Cartan pour les différentielles d_ℓ relativement à ce produit.

Proposition 4.1.1 *Soit X et Y dans $B(V)$. Alors, $d_\ell(XY) = \sum_{s=0}^{\ell} d_s(X) d_{\ell-s}(Y)$.*

Démonstration.

Soit $X = X^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1}$ et $Y = Y^0 \otimes \cdots \otimes Y^{p-1}$, avec $X^k = x_1^k \cdots x_{i_k}^k$ et $Y^k = y_1^k \cdots y_{j_k}^k$. Alors
$$X \cdot Y = X^0 Y^0 \otimes \cdots \otimes X^{p-1} Y^{p-1} = Z^0 \otimes \cdots \otimes Z^{p-1},$$
avec $Z^k = z_1^k \cdots z_{i_k+j_k}^k$, où $z_i^k = x_i^k$ si $i \leqslant i_k$, et $z_i^k = y_{i-i_k}^k$ si $i > i_k$. Ainsi,
$$d_\ell(X \cdot Y) = \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{p-2}=\ell} \left(\sum_{\substack{I_0^Z \subset \{1,\ldots,i_0+j_0\},\ |I_0^Z|=\alpha_0, \\ \cdots \\ I_{p-2}^Z \subset \{1,\ldots,i_{p-2}+j_{p-2}\},\ |I_{p-2}^Z|=\alpha_{p-2}}} z^0_{\widehat{I}_0^Z} \otimes z^0_{I_0^Z} z^1_{\widehat{I}_1^Z} \otimes \cdots \otimes z^{p-2}_{I_{p-2}^Z} Z^{p-1} \right).$$

En découpant I_k^Z suivant ses éléments contenus respectivement dans les ensembles $\{1, \ldots, i_k\}$ et $\{i_k + 1, \ldots, i_k + j_k\}$ (c'est-à-dire suivant les facteurs x et les facteurs y), cette somme s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} d_\ell(X \cdot Y) &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\substack{\beta_0+\cdots+\beta_{p-2}=s \\ \gamma_0+\cdots+\gamma_{p-2}=\ell-s}} \sum_{\substack{I_0^X \subset \{1,\ldots,i_0\},\ |I_0^X|=\beta_0, \\ \cdots \\ I_{p-2}^X \subset \{1,\ldots,i_{p-2}\},\ |I_{p-2}^X|=\beta_{p-2}, \\ I_0^Y \subset \{1,\ldots,j_0\},\ |I_0^Y|=\gamma_0, \\ \cdots \\ I_{p-2}^Y \subset \{1,\ldots,j_{p-2}\},\ |I_{p-2}^Y|=\gamma_{p-2},}} x^0_{\widehat{I_0^X}} y^0_{\widehat{I_0^Y}} \otimes \cdots \otimes x^{p-2}_{I_{p-2}^X} y^{p-2}_{I_{p-2}^Y} X^{p-1} Y^{p-1} \\ &= \sum_{s=0}^{\ell} d_s(X) \cdot d_{\ell-s}(Y). \end{aligned}$$

□

Par récurrence sur le nombre d'éléments dans le produit, on obtient :

Corollaire 4.1.2 *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des éléments de $B(V)$. Alors,*

$$d_\ell(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_n \in \mathbb{N}^* \\ s_1+\cdots+s_n=\ell}} d_{s_1}(X_1) \cdots d_{s_n}(X_n).$$

On peut alors appliquer itérativement cette formule :

Corollaire 4.1.3 *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des éléments de $B(V)$. Alors,*

$$d_\ell^k(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\substack{s_{1,1},\ldots,s_{1,n} \in \mathbb{N}^* \\ s_{1,1}+\cdots+s_{1,n}=\ell}} \cdots \sum_{\substack{s_{k,1},\ldots,s_{k,n} \in \mathbb{N}^* \\ s_{k,1}+\cdots+s_{k,n}=\ell}} \Big(d_{s_{k,1}} \circ \cdots \circ d_{s_{1,1}}(X_1)\Big) \cdots \Big(d_{s_{k,n}} \circ \cdots \circ d_{s_{1,n}}(X_n)\Big). \quad (9)$$

On rappelle que pour tout $x \in V$, on note $x(j)$ l'élément $1 \otimes \cdots \otimes x \otimes \cdots \otimes 1$, où x est placé en position j. Si $j \notin \{0, \ldots, p-1\}$, $x(j)$ est par convention nul. Alors $d_1(x(j)) = x(j+1)$ et $d_\ell(x(j)) = 0$ si $\ell > 1$.

Proposition 4.1.4 *Pour tout $\ell > 0$, $d_\ell^p = 0$. Autrement dit, d_ℓ est une p-différentielle.*

Démonstration.

Les $x(j),\ x \in V,\ j \in \{0, \ldots, p-1\}$ formant un système de générateurs multiplicatifs de $B(V)$, un élément générique de $B(V)$ est $x_1(j_1) \cdots x_n(j_n)$. On applique le corollaire 4.1.3 à ce produit. Comme $d_\ell(x(j))$ est nul si $\ell > 1$, seuls les termes de la somme (9) pour lesquels tous les entiers $s_{i,j}$ sont égaux soit à 0 soit à 1 sont non nuls. En notant I_i l'ensemble des indices j pour lesquels $s_{i,j}$ est égal à 1, on obtient alors

$$d_\ell^p(x_1(j_1) \cdots x_n(j_n)) = \sum_{\substack{I_1,\ldots,I_p \subset \{1,\ldots,n\}, \\ |I_1|=\cdots=|I_p|=\ell}} x_1(j_1 + \alpha_1(I_1, \ldots, I_p)) \cdots x_n(j_n + \alpha_n(I_1, \ldots, I_p)),$$

où $\alpha_j(I_1,\dots,I_p)$ est le nombre d'ensembles parmis $I_1,\dots,I_p$ contenant j, c'est-à-dire la multiplicité de j dans le multiensemble $I_1\cup\cdots\cup I_p$. Ainsi,

$$d_\ell^p(x_1(j_1)\cdots x_n(j_n)) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N},\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=p\ell}} C(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cdot\big(x_1(j_1+\alpha_1)\cdots x_n(j_n+\alpha_n)\big),$$

où $C(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est le nombre de p-uplets $(I_1,\dots,I_p)$ de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal ℓ tels que le multiensemble $I_1\cup\cdots\cup I_p$ contienne, pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, l'entier j en multiplicité α_j. On peut en outre mettre sur la somme la restriction $\alpha_i<p$ pour tout i, car $(x_i,j_i+\alpha_i)$ est nul si $\alpha_i\geqslant p$.

Soit donc $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des entiers contenus dans $\{0,\dots,p-1\}$ tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=p\ell$. Il suffit de montrer que $C(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est nul *modulo* p. Soit $E(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ l'ensemble des p-uplets $(I_1,\dots,I_p)$ de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal ℓ tels que le multiensemble $I_1\cup\cdots\cup I_p$ contienne, pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$, l'entier j en multiplicité α_j. Le cardinal de $E(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est $C(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. On définit sur $E(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ une relation d'équivalence

$$(I_1,\dots,I_p)\sim(I'_1,\dots,I'_p)\iff\exists\sigma\in\mathfrak{S}_p, I'_1=I_{\sigma(1)},\dots,I'_p=I_{\sigma(p)}.$$

Ainsi, $E(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est une union disjointe des différentes classes d'équivalence de cette relation. Il suffit donc de montrer que toutes les classes d'équivalence sont de cardinal divisible par p.

Soit $(I_1,\dots,I_p)$ un représentant d'une classe d'équivalence. Les ensembles I_j ne sont pas forcément distincts deux à deux. En tant que multiensemble d'ensembles, on peut écrire

$$\{I_1,\dots,I_p\}=\{J_1^{\beta_1},\dots,J_t^{\beta_t}\},$$

où β_i est la multiplicité de J_i dans le multiensemble $\{I_1,\dots,I_p\}$. Dans cette écriture, les ensembles $J_1,\dots,J_t$ sont distincts deux à deux. Alors, le cardinal de la classe d'équivalence représentée par $(I_1,\dots,I_p)$ est $\binom{p}{\beta_1,\dots,\beta_t}$. Cet entier est divisible par p, sauf si un des β_i est égal à p, ce qui ne peut pas se produire, car cela signifierait qu'au moins un des entiers α_j est au moins égal à p. $\square$

On donne maintenant quelques propriétés des p-différentielles d_ℓ.

Proposition 4.1.5 *Les p-différentielles d_ℓ vérifient les trois propriétés suivantes :*

1. *d_ℓ augmente le degré cohomologique de ℓ et préserve le degré polynomial;*
2. *pour tout $x\in B(V)$,* $d_\ell(x^p)=\begin{cases} d_{\ell/p}(x)^p & \textit{si } \ell\equiv 0 \mod p,\\ 0 & \textit{sinon;}\end{cases}$
3. *pour tout $x\in B(V)$,* $d_\ell(x^{p^r})=\begin{cases} d_{\ell/p^r}(x)^{p^r} & \textit{si } \ell\equiv 0 \mod p^r,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$

Démonstration.

La première propriété est évidente d'après la définition de d_ℓ.

Pour la seconde propriété, on utilise le corollaire 4.1.2, en vertu duquel :

$$d_\ell(x^p) = \sum_{i_1+\cdots+i_p=\ell} d_{i_1}(x)\cdots d_{i_p}(x).$$

Sur l'ensemble E des p-uplets $(i_1,\ldots,i_p)$ tels que $i_1+\cdots+i_p=\ell$, on introduit une relation d'équivalence

$$(i_1,\ldots,i_p)\sim(i'_1,\ldots,i'_p) \iff \exists\sigma\in\mathfrak{S}_p, i'_1=i_{\sigma(1)},\ldots,i'_p=i_{\sigma(p)}.$$

Soit C l'ensemble des classes d'équivalence. Alors, le produit de $B(V)$ étant commutatif, $d_{i_1}(x)\cdots d_{i_p}(x) = d_{i'_1}(x)\cdots d_{i'_p}(x)$ si les p-uplets $(i_1,\ldots,i_p)$ et $(i'_1,\ldots,i'_p)$ sont équivalents. Autrement dit, $d_{i_1}(x)\cdots d_{i_p}(x)$ est indépendant du choix de $(i_1,\ldots,i_p)$ dans une classe d'équivalence donnée. Soit $c\in C$. On note $d_c(x)$ la valeur commune $d_{i_1}(x)\cdots d_{i_p}(x)$ obtenue pour tout $(i_1,\ldots,i_p)\in c$. Alors :

$$d_\ell(x^p) = \sum_{c\in C}|c|\cdot d_c(x). \tag{10}$$

Dans de nombreux cas, $|c|$ est nul *modulo* p. En effet, soit $(i_1,\ldots,i_p)$ un représentant de la classe c. En tant que multiensemble, $\{i_1,\ldots,i_p\}$ est égal à $\{j_1^{m_1},\ldots,j_k^{m_k}\}$, c'est-à-dire au multiensemble constitué d'entiers supposés distincts j_i $(i\in\{1,\ldots,k\})$ avec multiplicité m_i. Alors, le cardinal de la classe c est $\binom{p}{m_1,\ldots,m_k}$. Ce coefficient multinomial est divisible par p, sauf si un des m_i est égal à p, c'est-à-dire si $i_1=\cdots=i_p$. Puisque $i_1+\cdots+i_p=\ell$, ceci n'est pas possible si $\ell\not\equiv 0 \mod p$. Dans ce cas, $d_\ell(x^p)=0$. Si au contraire ℓ est nul *modulo* p, alors la seule classe contribuant à un facteur non nul dans la somme (10) est une classe constituée d'un seul élément $\left(\frac{\ell}{p},\ldots,\frac{\ell}{p}\right)$. Par conséquent, $d_\ell(x^p)=d_{\ell/p}(x)^p$.

La troisième propriété se déduit de la deuxième par une récurrence immédiate sur r. □

4.2 Le complexe $B(r)^\bullet$

Le but de cette section est de définir un complexe $B(r)^\bullet$ (ou plus simplement $B(r)$) construit itérativement à partir de B, et généralisant à la caractéristique $p>2$ le complexe $B(r)^\bullet$ construit par Friedlander et Suslin [3] en caractéristique 2.

En tant qu'espace vectoriel, $B(r)=(S^*)^{\otimes p^r}$. Pour des besoins d'écriture, on indexe ce produit tensoriel comme suit :

$$B(r) = \bigotimes_{i_0=0}^{p-1}\cdots\bigotimes_{i_{r-1}=0}^{p-1} S^*_{i_0,\ldots,i_{r-1}},$$

où, pour tout multi-indice $(i_0,\ldots,i_{r-1})$, $S^*_{i_0,\ldots,i_{r-1}}=S^*$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\Delta^n:\mathcal{E}^f\to\mathcal{E}^f$ le foncteur *diagonale* $V\mapsto V^{\oplus n}$. On rappelle que $S^*\circ\Delta^n\cong(S^*)^{\otimes n}$. Ainsi, en tant qu'espace vectoriel, $B(r)=S^*\circ\Delta^{p^r}$, et plus généralement, $B(r)=B(\ell)\circ\Delta^{p^{r-\ell}}$.

Exemple 4.2.1 On peut construire, pour tout $s \in \{0, \dots, r-1\}$, un isomorphisme $i_s(r)$ entre $B(r-1) \circ \Delta^p$ et $B(r)$ de la manière suivante. On dispose d'un isomorphisme canonique

$$B(r-1) \circ \Delta^p \xrightarrow{\cong} B(r-1)^{\otimes p}.$$

En numérotant $B(r-1)_0, \dots, B(r-1)_{p-1}$ les différents facteurs de ce produit tensoriel, cela s'écrit

$$B(r-1) \circ \Delta^p \xrightarrow{\cong} B(r-1)_0 \otimes \cdots \otimes B(r-1)_{p-1}.$$

Or, $B(r-1) = (S^*)^{\otimes p^{r-1}}$; pour se ramener à l'indexation des termes de $B(r)$, on peut par exemple décréter que

$$B(r-1)_i = \bigotimes_{\substack{i_0, \dots, i_{r-1} \in \{0, \dots, p-1\} \\ i_s = i}} S^*_{i_0, \dots, i_{r-1}}$$

On obtient ainsi un isomorphisme $i_s(r)$ entre $B(r-1) \circ \Delta^p$ et $B(r)$. Plus précisément, cet isomorphisme consiste à identifier le facteur $S^*_{i_0, \dots, i_{r-2}}$ de $B(r-1)_i$ au facteur $S^*_{i_0, \dots, i_{s-1}, i, i_s, \dots, i_{r-2}}$ de $B(r)$.

Exemple 4.2.2 À l'autre extrême, on peut voir $B(1) \circ \Delta^{p^{r-1}} = B \circ \Delta^{p^{r-1}}$ comme étant égal à $B(r)$ de r façons différentes. En effet, étant donné $s \in \{0, \dots, r-1\}$, on peut séparer les facteurs du produit tensoriel définissant $B(r)$ suivant la valeur de i_s ; ainsi, si on note

$$C_i = \bigotimes_{\substack{i_0, \dots, i_{r-1} \in \{0, \dots, p-1\}, \\ i_s = i}} S^*_{i_0, \dots, i_{r-1}},$$

alors $B(r) = C_0 \otimes \cdots \otimes C_{r-1}$. Or chaque C_i est canoniquement isomorphe à $S^* \circ \Delta^{p^{r-1}}$; on obtient de la sorte un isomorphisme

$$S^* \circ \Delta^{p^{r-1}} \otimes \cdots \otimes S^* \circ \Delta^{p^{r-1}} \xrightarrow{\cong} B(r),$$

c'est-à-dire un isomorphisme (dépendant du choix de s)

$$\iota_s(r) \ : \ B \circ \Delta^{p^{r-1}} \xrightarrow{\cong} B(r).$$

Lemme 4.2.3 *La composition* $B(1) \circ \Delta^{p^{r-2}} \circ \Delta^p \xrightarrow{\iota_s(r-1)(\Delta^p)} B(r-1) \circ \Delta^p \xrightarrow{i_t(r)} B(r)$ *est égale à* $\iota_s(r)$ *si* $s < t$, *et à* $\iota_{s+1}(r)$ *si* $s \geqslant t$.

Démonstration.

Indexons $S^*(\Delta^{p^{r-2}}) = (S^*)^{\otimes p^{r-2}}$ par

$$S^*(\Delta^{p^{r-2}}) = \bigotimes_{i_0, \dots, i_{r-3} \in \{0, \dots, p-1\}} S^*_{i_0, \dots, i_{r-3}}.$$

Or,

$$B(1) \circ \Delta^{p^{r-2}} \cong \underbrace{S^*(\Delta^{p^{r-2}}) \otimes \cdots \otimes S^*(\Delta^{p^{r-2}})}_{p \text{ facteurs indicés de } 0 \text{ à } p-1}.$$

Le morphisme $\iota_s(r-1)$ consiste à identifier le terme $S^*_{i_0,\ldots,i_{r-3}}$ du facteur en position i au terme $S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}$ de $B(r-1)$. Ainsi, le morphisme $\iota_s(r-1)(\Delta^p)$ consiste à identifier le terme $S^*_{i_0,\ldots,i_{r-3}}(\Delta^p)$ du facteur i au terme $S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}(\Delta^p)$ de $B(r-1)(\Delta^p)$.

D'autre part,

$$S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}(\Delta^p) \cong \underbrace{S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}} \otimes \cdots \otimes S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}}_{p \text{ facteurs indicés de } 0 \text{ à } p-1}.$$

Le morphisme $i_t(r)$ consiste à identifier le facteur $S^*_{i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}$ en position j avec le facteur de $B(r)$ indicé par le r-uplet obtenu du $(r-1)$-uplet $(i_0,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3})$ en intercalant j en position t, c'est-à-dire

- $S^*_{i_0,\ldots,i_{t-1},j,i_t,\ldots,i_{s-1},i,i_s,\ldots,i_{r-3}}$ si $t \leqslant s$,
- $S^*_{i_0,\ldots,i_{t s-1},i,i_s,\ldots,i_{t-1},j,i_t,\ldots,i_{r-3}}$ si $t > s$.

Dans le premier cas, l'indice i provenant de la première étape est décalé d'un cran, et se retrouve en position $s+1$: la composition correspond à $\iota_{s+1}(r)$. Dans le second cas, il reste en position s : la composition correspond à $\iota_s(r)$. □

Notation 4.2.4 Soit $v \in V$, et soit $i_0,\ldots,i_{r-1} \in \{0,\ldots,p-1\}$. On note $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$ l'élément de $B(r-1)$ dont tous les facteurs dans le produit tensoriel sont 1, sauf celui indicé par $(i_0,\ldots,i_{r-1})$, égal à v :

$$v(i_0,\ldots,i_{r-1}) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \overset{\text{en position } (i_0,\ldots,i_{r-1})}{\overset{|}{v}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1.$$

La famille $(v(i_0,\ldots,i_{r-1}))_{v\in V, i_0,\ldots,i_{r-1}\in\{0,\ldots,p-1\}}$ est une famille de générateurs multiplicatifs de $B(r)(V)$. De plus, à condition de se restreindre aux éléments v d'une *base* de V, la famille obtenue est algébriquement libre. Par conséquent, la donnée d'une dérivation de $B(r)(V)$ est équivalente à la donnée des images des éléments générateurs $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$, avec la condition supplémentaire que pour $(i_0,\ldots,i_{r-1})$ fixé, ces images soient linéaires en v.

On définit alors des dérivations d_1^s sur $B(r)$ pour tout $s \in \{0,\ldots,r-1\}$, en les décrivant sur la famille $v(i_0,\ldots,i_{r-1})$:

$$d_1^s(v(i_0,\ldots,i_{r-1})) = \begin{cases} v(i_0,\ldots,i_s+1,\ldots,i_{r-1}) & \text{si } i_s < p-1, \\ 0 & \text{si } i_s = p-1. \end{cases}$$

Remarque 4.2.5 La dérivation d_1^s correspond à la dérivation $d_1 \circ \Delta^{p^{r-1}}$ de $B \circ \Delta^{p^{r-1}}$ *via* l'isomorphisme $\iota_s(r)$, c'est-à-dire $d_1^s = \iota_s(r)(d_1 \circ \Delta^{p^{r-1}})$. En particulier, on en déduit que d_1^s est une p-différentielle.

On définit de même, pour tout $j > 0$ la p-différentielle d_ℓ^s comme étant la p-différentielle $d_\ell \circ \Delta^{p^{r-1}}$ de $B \circ \Delta^{p^{r-1}}$ *via* l'isomorphisme $\iota_s(r)$:

$$d_\ell^s = \iota_s(r)(d_\ell \circ \Delta^{p^{r-1}}). \tag{11}$$

Les p-différentielles d^s_ℓ vérifient des propriétés analogues à celles de la proposition 4.1.5.

Une manière équivalente de définir la différentielle d^s_ℓ est de la définir récursivement sur ℓ, puis sur le degré de la source, à l'aide de la formule de la proposition 4.1.1 : supposons que $\ell > 1$ et que $d^s_1, \ldots, d^s_{\ell-1}$ soient définis. On définit alors d^s_ℓ comme étant nul sur les termes $v(i_0, \ldots, i_{r-1})$. On définit ensuite d^s_ℓ sur les monômes en les générateurs $v(i_0, \ldots, i_{r-1})$ par récurrence sur le degré du monôme : supposons d^s_ℓ défini sur les monômes de degré strictement plus petit que n. Alors, soit M un monôme de degré n. Il peut s'écrire $M = v(i_0, \ldots, i_{r-1}) \cdot M'$, où M' est un monôme de degré $n-1$. On définit alors d^s_ℓ sur M par la formule

$$d^s_\ell(M) = \sum_{j=0}^{\ell} d^s_j(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) \cdot d^s_{\ell-j}(M'). \tag{12}$$

Tous les termes dans cette somme sont définis par les hypothèses de récurrence. La proposition 4.1.1 nous assure que cette définition de d^s_ℓ coïncide avec la définition par la formule (11). Cette définition possède l'avantage qu'elle n'utilise pas l'isomorphisme $\iota_s(r)$ et est de ce fait plus propice à des calculs explicites. En revanche, elle est moins adéquate pour faire des récurrences sur r.

Si la référence au complexe $B(r)$ est utile, on écrira $d^s_\ell(r)$ pour désigner la différentielle d^s_ℓ du complexe $B(r)$; dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omettra la référence à r.

Proposition 4.2.6 *Les p-différentielles d^s_ℓ de $B(r-1)$ et de $B(r)$ sont liées par les relations :*

$$i_t(r)(d^s_\ell(r-1)(\Delta^p)) = \begin{cases} d^s_\ell(r) & si\ s < t \\ d^{s+1}_\ell(r) & si\ s \geqslant t, \end{cases}$$

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate du lemme 4.2.3 et de la définition (11) de d^s_ℓ. $\square$

Proposition 4.2.7 *Soit $s, t \in \{0, \ldots, p-1\}$ tels que $s \neq t$. Alors, pour tout $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d^s_j \circ d^t_\ell = d^t_\ell \circ d^s_j$.*

Démonstration.

On montre d'abord que cette propriété de commutation est stable par multiplication dans $B(r)$: si pour tout $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d^s_j \circ d^t_\ell(X) = d^t_\ell \circ d^s_j(X)$ et pour tout $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d^s_j \circ d^t_\ell(Y) = d^t_\ell \circ d^s_j(Y)$, alors pour tout $j, \ell \in \mathbb{N}$, $d^s_j \circ d^t_\ell(X \cdot Y) = d^t_\ell \circ d^s_j(X \cdot Y)$. Soit donc X et Y dans $B(r)$ pour lesquels cette propriété de commutation est vérifiée pour tout couple (j, ℓ), et soit $(j, \ell) \in \mathbb{N}^2$. Alors, en utilisant la proposition 4.1.1,

$$d^s_j \circ d^t_\ell(X \cdot Y) = \sum_{k=0}^{\ell} d^s_j \left(d^t_k X \cdot d^t_{\ell-k} Y \right) = \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{j} (d^s_i \circ d^t_k(X)) \cdot (d^s_{j-i} \circ d^t_{\ell-k}(Y)).$$

Dans cette somme, on peut commuter les différentielles, à cause de l'hypothèse vérifiée par X et Y :

$$d_j^s \circ d_\ell^t(X \cdot Y) = \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{\ell} (d_k^t \circ d_i^s(X)) \cdot (d_{\ell-k}^t \circ d_{j-i}^s(Y)) = d_\ell^t \circ d_j^s(X \cdot Y).$$

Il suffit donc de vérifier la commutation sur les générateurs multiplicatifs $v(i_0, \ldots, i_{r-1})$ de $B(r)$. Si ℓ ou j est égal à 0, c'est évident (un des deux morphismes est l'identité). Supposons donc $j, \ell > 0$. Or,

$$d_j^s(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) = \begin{cases} v(i_0, \ldots, i_s + 1, \ldots, i_{r-1}) & \text{si } j = 1 \text{ et } i_s < p-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$d_\ell^t \circ d_j^s(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) = \begin{cases} v(i_0, \ldots, i_s+1, \ldots, i_t+1, \ldots, i_{r-1}) & \text{si } j=\ell=1 \text{ et } i_s, i_t < p-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette expression est entièrement symétrique en (j, s) et (ℓ, t), et donne donc également l'expression de $d_j^s \circ d_\ell^t(v(i_0, \ldots, i_{r-1}))$. □

Remarque 4.2.8 La propriété 4.2.7 est encore vraie pour $s = t$ (vérification immédiate sur les générateurs).

Corollaire 4.2.9 *L'endomorphisme $d = d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1}$ est une p-différentielle.*

Démonstration.

Puisque les différents facteurs de la somme $d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1}$ commutent deux à deux d'après la proposition 4.2.7,

$$d^p = (d_1^0 + d_p^1 + \cdots + d_{p^{r-1}}^{r-1})^p = (d_1^0)^p + (d_p^1)^p + \cdots + (d_{p^{r-1}}^{r-1})^p.$$

Cette somme est nulle, car chacun des endomorphismes $d_{p^k}^k$ est une p-différentielle. □

Ainsi, on a muni $B(r)$ d'une structure d'espace vectoriel p-différentiel $(B(r), d)$. Pour en faire un complexe, il faut définir une notion de *degré cohomologique*. C'est l'objet de la section suivante.

4.3 Degrés sur $B(r)$

Comme pour $B = B(1)$, on veut définir sur $B(r)$ une notion de *degré polynomial* et de *degré cohomologique*. Soit

$$\bigotimes_{i_0, \ldots, i_{r-1} \in \{0, \ldots, p-1\}} S^{m_{i_0, \ldots, i_{r-1}}}$$

un facteur de $B(r)$, où $S^{m_{i_0, \ldots, i_{r-1}}} \subset S^*_{i_0, \ldots, i_{r-1}}$. Alors son *degré polynomial* (et celui de ses éléments non nuls, après spécialisation à un espace V) est

$$\sum_{i_0, \ldots, i_{r-1} \in \{0, \ldots, p-1\}} m_{i_0, \ldots, i_{r-1}}.$$

En d'autres termes, le degré polynomial est le degré en tant que foncteur strictement polynomial.

LEMME 4.3.1 *La p-différentielle d conserve le degré polynomial. Par conséquent,* $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r))$ *est gradué par le degré polynomial et la partie de degré n correspond à la cohomologie* $\mathrm{H}^*_{[s]}$ *de la partie de degré n du p-complexe* $B(r)$.

On note $B_n(r)$ la partie de degré polynomial n de $B(r)$.

On définit des *degrés cohomologiques partiels* $\deg^s$ pour $s \in \{0, \ldots, r-1\}$ par :

$$\deg^s \left(\bigotimes_{i_0,\ldots,i_{r-1} \in \{0,\ldots,p-1\}} S^{m_{i_0,\ldots,i_{r-1}}} \right) = \sum_{i_0,\ldots,i_{r-1} \in \{0,\ldots,p-1\}} i_s \cdot m_{i_0,\ldots,i_{r-1}}.$$

LEMME 4.3.2 *La p-différentielle* d^s_j *augmente* $\deg^s$ *de* j.

Démonstration.

Il est bien entendu que cet énoncé signifie que $\deg^s(d^s_j(M)) = \deg^s(M) + j$ *si* $d^s_j(M)$ *n'est pas nul*. On le montre par récurrence sur ℓ, puis sur le degré polynomial du monôme auquel on applique d^s_j, grâce à la formule (12). L'initialisation se fait :

- d'une part pour $\ell = 0$; ce cas est évident, puisque d^s_0 est le morphisme identité ;
- d'autre part pour les monômes de degré 1, c'est-à-dire les monômes $v(i_0, \ldots, i_{r-1})$. Dans le cas où $\ell > 1$, le résultat est immédiat puisque $d^s_\ell(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) = 0$. Si $\ell = 1$, $d^s_1(v(i_0, \ldots, i_{r-1}))$ est nul si $i_s = p-1$, et vaut $v(i_0, \ldots, i_s + 1, \ldots, i_{r-1})$ si $i_s < p-1$. Dans ce dernier cas,

$$\deg^s(d^s_\ell(v(i_0, \ldots, i_{r-1}))) = i_s + 1 = \deg^s(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) + 1,$$

  et la propriété est donc satisfaite. Enfin, si $\ell = 0$, c'est l'initialisation de la récurrence sur ℓ.

Soit $\ell \geqslant 1$, et $n > 1$. Supposons que pour tout $(j, m) < (\ell, n)$ dans l'ordre lexicographique, et pour tout monôme M' de degré m, on ait $\deg^s(d^s_j(M')) = \deg^s(M') + j$ si $d^s_j(M') \neq 0$. Soit M un monôme de degré n. On peut écrire $M = v(i_0, \ldots, i_{r-1}) \cdot M'$, où M' est un monôme de degré $n-1$. Alors, d'après la formule (12),

$$d^s_\ell(M) = \sum_{j=0}^{\ell} d^s_j(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) \cdot d^s_{\ell-j}(M').$$

Dans cette somme, le terme d'indice j est soit nul, soit, d'après les hypothèses de récurrence, de degré $\deg^s$ égal à

$$(\deg^s(v(i_0, \ldots, i_{r-1})) + j) + (\deg^s(M') + \ell - j) = \deg^s(M) + \ell.$$

Cela achève la récurrence. □

Lemme 4.3.3 *La p-différentielle d_j^t préserve* $\deg^s$ *si $s \neq t$.*

Démonstration.

La même démonstration que pour le lemme précédent s'applique ici. Il suffit de remarquer que cette fois

$$\deg^s(d_\ell^t(v(i_0,\ldots,i_{r-1}))) = \deg^s(v(i_0,\ldots,i_t+1,\ldots,i_{r-1})) = i_s = \deg^s(v(i_0,\ldots,i_{r-1})).$$

Le reste en découle. □

On définit maintenant le *degré cohomologique* deg sur $B(r)$ par

$$\deg = \sum_{s=0}^{r-1} p^{r-s-1}\deg^s$$

Pour $r = 1$, on retrouve le degré cohomologique défini dans la partie précédente.

La proposition suivante découle immédiatement des lemmes 4.3.2 et 4.3.3 :

Proposition 4.3.4 *La p-différentielle d augmente le degré cohomologique* deg *de p^{r-1}.*

Soit $B^k(r)$ la restriction de $B(r)$ aux facteurs de degré cohomologique k. Alors $(B^\bullet(r), d)$ est un p-complexe dont la p-différentielle est de degré p^{r-1}. Autrement dit, cela définit p^{r-1} différents p-complexes

$$0 \to B^i(r) \to B^{i+p^{r-1}} \to B^{i+2p^{r-1}} \to \cdots,$$

pour tout $i \in \{0,\ldots,p^{r-1}-1\}$. On notera ces complexes en abrégé $(B^{i+p^{r-1}\bullet}(r), d)$. On notera comme précédemment $\mathrm{H}^k_{[s]}(B(r))$ la s-ième cohomologie en degré cohomologique k, c'est-à-dire la cohomologie $\mathrm{H}_{[s]}$ en $B^k(r)$:

$$\mathrm{H}^k_{[s]}(B(r)) = \frac{\mathrm{Ker}\Big(d^s : B^k(r) \to B^{k+sp^{r-1}}\Big)}{\mathrm{Im}\Big(d^{p-s} : B^{k-(p-s)p^{r-1}} \to B^k(r)\Big)}.$$

4.4 Une résolution injective de $S^{n(j)}$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Théorème 4.4.1 *Le p-complexe $(B(r), d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(r)}$.*

Par cela, on entend que le p-complexe $(B^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$ est une p-résolution injective de $S^{*(r)}$, tandis que les p-complexes $(B^{i+p^{r-1}\bullet}(r), d)$ sont p-acycliques pour $i \in \{1,\ldots,p^{r-1}-1\}$. En décomposant $(B^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$ suivant le degré polynomial, on obtient de manière plus précise :

Théorème 4.4.2 *Le p-complexe $(B_{kp^r}^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$ est une p-résolution injective de $S^{k(r)}$. Si n n'est pas un multiple de p^r, $(B_n^{p^{r-1}\bullet}(r), d)$ est p-acyclique.*

La fin de l'article est consacrée à la démonstration du théorème 4.4.1.

Lemme 4.4.3 *Il existe une injection* $i\ :\ S^{*(r)} \hookrightarrow B^0(r)$ *telle que* $d \circ i = 0$.

Démonstration.

Le foncteur $B^0(r)$ est égal à $S^* \otimes S^0 \otimes \cdots \otimes S^0$, où le seul terme non égal à S^0 est en position $(0, \dots, 0)$. Ainsi, $B^0(r) \cong S^*$. Alors, l'injection $i\ :\ S^{*(r)} \hookrightarrow B^0(r)$ est donnée par le morphisme de Frobenius $S^{*(r)} \hookrightarrow S^*$ envoyant $X^{(r)}$ sur X^{p^r}. Pour montrer que $d \circ i = 0$, il suffit de montrer que $d(X^{p^r}) = 0$ pour tout $X \in S^*(V)$. Cela découle du fait que pour tout $s \in \{0, \dots, r-1\}$, $d^s_{p^s}(X^{p^r})$ est nul d'après la proposition 4.1.5. □

Par conséquent, on obtient, pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$, une injection

$$\begin{tikzcd} S^{*(r)} \arrow[r, tail] \arrow[rr, tail, bend right, "i_{[s]}"'] & \mathrm{H}^0_{[s]}(B(r), d) \arrow[r, tail] & \mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d). \end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que $i_{[s]}$ est un isomorphisme.

On définit une structure de p-bicomplexe (terminologie évidente) sur $B(r)$ comme suit : on définit deux différentielles d' et d'' par :

$$d' = \sum_{s=0}^{r-2} d^s_{p^s} \qquad \text{et} \qquad d' = d^{r-1}_{p^{r-1}}.$$

Alors, d' et d'' sont clairement des p-différentielles (même démonstration que pour d), commutent entre elles d'après la proposition 4.2.7, et $d = d' + d''$. De plus, on définit deux degrés $\deg'$ et $\deg''$ par

$$\deg' = \sum_{s=0}^{r-2} p^{r-s-1} \deg^s \qquad \text{et} \qquad \deg'' = \deg^{r-1}.$$

Alors :

– d' augmente $\deg'$ de p^{r-1} et préserve $\deg''$;

– d'' augmente $\deg''$ de p^{r-1} et préserve $\deg'$.

Ainsi, en définissant $B^{k,\ell}(r)$ comme la somme des facteurs de $B(r)$ de degré $\deg'$ égal à k et de degré $\deg''$ égal à ℓ, on obtient un p-bicomplexe $(B^{\bullet,\bullet}(r), d', d'')$, avec

$$d'\ :\ B^{\bullet,\bullet}(r) \longrightarrow B^{\bullet + p^{r-1}, \bullet}(r) \qquad \text{et} \qquad d''\ :\ B^{\bullet,\bullet}(r) \longrightarrow B^{\bullet, \bullet + p^{r-1}}(r).$$

Le complexe total de $(B^{\bullet,\bullet}(r), d', d'')$ est le p-complexe $(B(r), d)$.

Par convention, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B^{\bullet,\bullet}(r), d')$ désigne la cohomologie par rapport à d', *gradué selon le degré cohomologique* $\deg'$, et non selon le degré total deg. Chaque $\mathrm{H}^i_{[s]}(B^{\bullet,\bullet}(r), d')$ est aussi gradué selon $\deg''$.

Pour démontrer le théorème 4.4.1, on utilise les trois lemmes ci-dessous.

Lemme 4.4.4 *En tant que p-complexes,* $(B(r), d') \cong (B(r-1) \circ \Delta^p, d \circ \Delta^p)$.

LEMME 4.4.5 *Supposons que* $B(r-1)$ *soit une résolution de* $S^{*(r-1)}$. *Alors, pour tout* $s \in \{1,\dots,p-1\}$

$$\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d') = B^{(r-1)},$$

concentré en degré cohomologique $\deg'$ *égal à* 0. *De plus, l'image encore notée* d'' *de la différentielle* d'' *dans* $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d')$ *est la différentielle* $d^{(r-1)}$ *de* $B^{(r-1)}$.

Autrement dit, si $B(r-1)$ est une p-résolution de $S^{*(r-1)}$, alors $(\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r),d'),d'')$ est égal au p-complexe obtenu en twistant $r-1$ fois le complexe (B,d).

LEMME 4.4.6 *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d',d'')$ *un* p*-bicomplexe dans le quadrant positif tel que*

(i) *pour tout couple* $(s,t)\in\{1,\dots,p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d') = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d')$; *on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d')$ *la valeur commune ;*

(ii) $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d') = 0$ *pour tout* $i>0$ *;*

(iii) *pour tout couple* $(s,t)\in\{1,\dots,p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d'') = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d'')$; *on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d'')$ *la valeur commune ;*

(iv) $\mathrm{H}^i(\mathrm{H}^*(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d'') = 0$ *pour tout* $i>0$.

Alors, si on note $d=d'+d''$ *la* p*-différentielle totale, pour tout couple* $(s,t)\in\{1,\dots,p-1\}^2$, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d) = \mathrm{H}^*_{[t]}(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d)$; *on note simplement* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d)$ *la valeur commune. De plus,*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d) = \mathrm{H}^0(\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d''),$$

concentré en degré total 0. *En d'autres termes, le* p*-complexe* $(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d)$ *est une* p*-résolution de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^{\bullet,\bullet},d'),d'')$.

Le lemme 4.4.6 est la transcription au cas d'un p-bicomplexe de la situation simple d'une suite spectrale associée à un bicomplexe, qui dégénèrerait au rang 2 ; plus précisément telle que E^1 serait concentré sur la ligne d'ordonnée 0, et E^2 serait concentré en degré total 0. Dans ce cas, la théorie des suites spectrales permet de conclure immédiatement que le complexe total est une résolution de la cohomologie concentrée en degré 0. C'est cet argument qu'utilisent Friedlander et Suslin lorsque $p=2$.

Démonstration du lemme 4.4.4.

On considère l'isomorphisme $i_{r-1}(r)\ :\ B(r-1)\circ\Delta^p \longrightarrow B(r)$ de l'exemple 4.2.1. D'après la proposition 4.2.6, $i_{r-1}(r)$ transporte les p-différentielles $d^s_{p^s}(r-1)(\Delta^p)$ sur les p-différentielles $d^s_{p^s}(r)$, à condition que $s<r-1$. Or, la différentielle $d=d(r-1)$ de $B(r-1)$ est définie par

$$d(r-1) = \sum_{s=0}^{r-2} d^s_{p^s}(r-1).$$

Par conséquent, l'image de $d(r-1)$ par l'isomorphisme $i_{r-1}(r)$ est $d' = \sum_{s=0}^{r-2} d^s_{p^s}(r)$. Ainsi, $i_{r-1}(r)$ induit un isomorphisme de p-complexes entre $(B(r-1)\circ\Delta^p, d\circ\Delta^p)$ et $(B(r),d')$. □

Démonstration du lemme 4.4.5.

Si $B(r-1)$ est une résolution de $S^{*(r-1)}$, alors, pour tout $s \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') = \mathrm{H}^*_{[s]}(B(r-1) \circ \Delta^p, d \circ \Delta^p) = S^{*(r-1)} \circ \Delta^p = (S^{*(r-1)})^{\otimes p} = B^{(r-1)}.$$

Plus précisément, $S^{*(r-1)} \circ \Delta^p$ est concentré en degré cohomologique nul dans $B(r-1) \circ \Delta^p$, et est donc inclus dans $B^0(r-1) \circ \Delta^p$. Cette inclusion est donnée par le lemme 4.4.3 et consiste en une itération $r-1$ fois du morphisme de Frobenius φ sur le facteur indicé par $(0, \dots, 0)$:

$$x \in \Delta^p(V) \longmapsto \underset{\substack{| \\ \text{position } (0,\dots,0)}}{x^{p^{r-1}}} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1.$$

D'après la description de $i_{r-1}(r)$ donnée dans l'exemple 4.2.1, et d'après le lemme 4.4.4, l'inclusion correspondante de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') = (S^{*(r-1)})^{\otimes p}$ dans $B(r)$ est donnée, sur le facteur $S^{*(r-1)}$ en position i, par le morphisme de Frobenius itéré φ^{r-1} sur le facteur en position $(0, \dots, 0, i)$ de $B(r)$. En particulier, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d')$ est concentré en degré cohomologique partiel $\deg'$ égal à 0.

Les p-différentielles d^{r-1}_ℓ commutent avec d' (proposition 4.2.7), et définissent donc par restriction des p-différentielles $\bar{d}^{r-1}_\ell$ sur $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d')$. On note aussi $\bar{d}_0$ le morphisme identité, restriction de d_0.

Pour terminer la démonstration du lemme 4.4.5, nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 4.4.7 *Pour tout $\ell \in \{1, \dots, p^{r-1}-1\}$, la p-différentielle $\bar{d}^{r-1}_\ell$ est nulle.*

Démonstration.

Un élément de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') \subset B(r)$ est de la forme $X^{p^{r-1}}$. Alors, d'après la proposition 4.1.2,

$$\bar{d}^{r-1}_\ell(X^{p^{r-1}}) = \sum_{j_1 + \dots + j_{p^{r-1}} = \ell} d_{j_1}(X) \cdots d_{j_{p^{r-1}}}(X).$$

Deux multi-indices $(j_1, \dots, j_{p^{r-1}})$ et $(j'_1, \dots, j'_{p^{r-1}})$ sont équivalents si l'un est obtenu de l'autre par permutation. Deux multi-indices dans une même classe d'équivalence donnent le même terme dans la somme. Il suffit donc de montrer que le cardinal de toutes les classes d'équivalence est divisible par p. Or le cardinal d'une classe d'équivalence représentée par $(j_1, \dots, j_{p^{r-1}})$ est $\binom{p^{r-1}}{\beta_1, \dots, \beta_k}$, où $\beta_1, \dots, \beta_k$ sont les nombres d'indices égaux entre eux dans $(j_1, \dots, j_{p^{r-1}})$. Ce coefficient binomial est toujours divisible par p, sauf si un des entiers β_i est égal à p^{r-1}, ce qui signifie que $j_1 = \dots = j_{p^{r-1}}$. Cela n'est pas possible puisque la somme des indices est ℓ, qui n'est pas divisible par p^{r-1}. □

LEMME 4.4.8 *La p-différentielle $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}$ est une dérivation.*

Démonstration.

Soit X et Y des éléments de $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d') \subset B(r)$. Alors, d'après le lemme 4.1.1,

$$\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}(X \cdot Y) = \sum_{\ell=0}^{p^{r-1}} \bar{d}^{r-1}_{\ell}(X) \cdot \bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}-\ell}(Y).$$

D'après le lemme 4.4.7, tous les termes de cette somme sont nuls, sauf ceux correspondant aux indices $\ell = 0$ et $\ell = p^{r-1}$, d'où le résultat. $\square$

Fin de la démonstration du lemme 4.4.5.

D'après les lemmes 3.1.2 et 4.4.8, il suffit, pour montrer que $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}$ coïncide avec la p-différentielle $d^{(r-1)}$ de $B^{(r-1)}$, de montrer que ces p-différentielles commutent sur des générateurs multiplicatifs, par exemple sur les générateurs $(v(i))_{v \in V, i \in \{0,\ldots,p-1\}}$. Le générateur $v(i)$ de $B = B(1)$ correspond à $v(0,\ldots,0,i)^{p^{r-1}}$ dans $B(r)$. Or, d'après la proposition 4.1.2,

$$d^{r-1}_{p^{r-1}}(v(0,\ldots,0,i)^{p^{r-1}}) = \sum_{j_1+\cdots+j_{p^{r-1}}=p^{r-1}} d^{r-1}_{j_1}(v(0,\ldots,0,i)) \cdots d^{r-1}_{j_{p^{r-1}}}(v(0,\ldots,0,i)).$$

Par définition (version alternative), d^{r-1}_j est nul sur le générateur $v(0,\ldots,0,i)$, sauf si $j = 0$ ou $j = 1$. Le seul terme de la somme ci-dessus qui soit non nul correspond donc aux indices $j_1 = \cdots = j_{p^{r-1}} = 1$. Ainsi

$$d^{r-1}_{p^{r-1}}(v(0,\ldots,0,i)^{p^{r-1}}) = d^{r-1}_1(v(0,\ldots,0,i))^{p^{r-1}} = \begin{cases} v(0,\ldots,0,i+1)^{p^{r-1}} & \text{si } i < p-1, \\ 0 & \text{si } i = p-1. \end{cases}$$

Par conséquent, $\bar{d}^{r-1}_{p^{r-1}}(v(i))$ est égal à $v(i+1)$ si $i < p-1$, et est nul si $i = p-1$. Cela correspond à la description de la différentielle $d^{(r-1)}$ de $B^{(r-1)}$. $\square$

Démonstration du lemme 4.4.6.

La démonstration de ce lemme est strictement identique à celle du théorème 2.3.1. Le théorème 2.3.1 en est d'ailleurs un cas particulier. $\square$

Démonstration du théorème 4.4.1.

Le caractère "injectif" découle évidemment de la description des foncteurs injectifs dans la catégorie $\mathcal{P}$ (théorème 1.2.1). L'essentiel du travail consiste donc à montrer qu'il s'agit d'une p-résolution de $S^{*(r)}$.

Pour ce faire, on effectue une récurrence sur l'entier r. L'initialisation est donnée par le cas de $S^{*(1)}$, admettant $B = B(1)$ pour résolution d'après le théorème 3.1.4.

Supposons que le théorème soit vrai jusqu'à $r-1$. Alors, $B(r)$ est muni d'une structure de bicomplexe $(B(r), d', d'')$. Ce bicomplexe vérifie les hypothèses du lemme 4.4.6 :

- Les conditions d'application du lemme 4.4.5 sont remplies, d'après l'hypothèse de récurrence. Alors, $\mathrm{H}^*_{[s]}(B(r), d')$ est indépendant de s et est nul en degré cohomologique $\deg'$ non nul. Ainsi, les conditions (i) et (ii) sont remplies.

– Toujours d'après le lemme 4.4.5, le p-complexe $(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'')$ est isomorphe au p-complexe $(B^{(r-1)}, d^{(r-1)})$, c'est-à-dire au twist itéré $r-1$ fois du p-complexe (B, d). Ainsi, d'après le théorème 3.1.4, $\mathrm{H}^*_{[s]}(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'')$ est égal à $\mathrm{H}^*_{[s]}(B^{(r-1)}, d^{(r-1)})$. Il est donc indépendant de s (condition (iii)), concentré en degré cohomologique total 0 (condition (iv)), et égal à $(S^{*(1)})^{(r-1)} = S^{*(r)}$.

Par conséquent, les conditions d'application du lemme 4.4.6 sont remplies, et le complexe total $(B(r), d)$ est une p-résolution de $\mathrm{H}^0(\mathrm{H}^*(B(r), d'), d'') = S^{*(r)}$. La propriété de récurrence est donc vérifiée pour r. □

Références

[1] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko et A. Suslin, *General linear and functor cohomology over finite fields*, Ann. of Math. **150** (1999), no. 2, 663–728.

[2] V. Franjou, J. Lannes et L. Schwartz, *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis*, Invent. Math. **115** (1994), 513–538.

[3] E. Friedlander et A. Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 209–270.

[4] H.-W. Henn, J. Lannes et L. Schwartz, *Analytic functors, unstable algebras and cohomology of classifying spaces*, Alg. Top. Proc. **96** (1989), 197–220, Northwestern University, Cont.

[5] M. M. Kapranov, *On the q-analog of homological algebra*, Preprint q-alg/9611005 (1996).

[6] C. Kassel et M. Wambst, *Algèbre homologique des N-complexes et homologie de Hochschild aux racines de l'unité*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** (1998), no. 2, 91–114.

[7] B. Totaro, *Projective resolutions of representations of $GL(n)$*, J. Reine Angew. Math. **482** (1997), 1–13.

[8] A. Troesch, *Comparaison des modules d'extensions dans des catégories de foncteurs*, Prépublication du CRM (Barcelone) (2002), no. 497.

[9] ———, *Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques*, Comm. in Algebra **30** (2002), no. 7, 3351–3382.

Alain Troesch
Institut de mathématiques de Jussieu
Université Paris 6

e-mail : troesch@math.jussieu.fr